ASSOCIAZIONE PER LA MATEMATICA APPLICATA
ALLE SCIENZE ECONOMICHE E SOCIALI

ATTI DEL SEDICESIMO CONVEGNO A.M.A.S.E.S.

Treviso, 10-13 Settembre 1992

Ha contribuito alla pubblicazione del volume
il Consiglio Nazionale delle Ricerche

AUTOSIMILARITA' E COMPORTAMENTO NON LINEARE DI UN INDICE AZIONARIO NEL MERCATO ITALIANO.[1]

Antonella BRASOLIN
Marco CORAZZA
Università degli Studi di BRESCIA

Carla NARDELLI
Universita' degli Studi di BRESCIA
Universita' degli Studi di VENEZIA

1. INTRODUZIONE.

L'approccio "classico" all'analisi delle serie temporali relative al mercato azionario consisteva nello studio delle distribuzioni degli incrementi dei prezzi azionari P(t+dt)-P(t) [1]. La maggior parte dei modelli sviluppati si basava sull'ipotesi di distribuzione normale per le variazioni di tali prezzi. Mediante studi di carattere principalmente empirico, si è successivamente messo in evidenza che tali distribuzioni non godono di tutte le proprietà tipiche della distribuzione normale, come le code "lunghe" e l'instabilità della varianza. Negli anni '60, la ricerca empirica si è indirizzata allo studio dei tassi di rendimento dei titoli (P(t+dt)--P(t))/P(t), piuttosto che delle variazioni assolute di questi. Mandelbrot [22] e Fama [8], oltre a proporre come tasso di rendimento il logaritmo del rapporto tra due prezzi consecutivi, suggeriscono l'utilizzo delle distribuzioni Pareto - stabili, introdotte da Lévy nel 1925 [15], poichè sembrano spiegare meglio le due evidenze empiriche riguardanti le code e la varianza della distribuzione. Infatti le leggi stabili rappresentano una generalizzazione della legge normale quando i momenti del primo e del secondo ordine esistono non necessariamente finiti. Lo stesso Mandelbrot aveva notato che il comportamento reale delle serie storiche dei rendimenti presentava la tendenza a non rimanere indipendente nel tempo.

In lavori recenti di carattere empirico sia con l'applicazione dell'analisi R/S (rescaled range) [25], sia con l'applicazione di tecniche parametriche [31], [3], si

---

[1] Ricerca finanziata parzialmente dal M.U.R.S.T-fondi 40%.

evidenzia che i rendimenti del mercato azionario sembrano seguire un processo di tipo "random walk biased" (fractional brownian motion), cioè il comportamento dei rendimenti in un certo periodo (per es. di sei mesi) influenza tutti i successivi periodi (di sei mesi). E' questo il fenomeno di dipendenza a lungo termine che Hurst chiama persistenza [27].

Fra gli apporti teorici recentemente introdotti per questo tipo di analisi spicca la geometria frattale (Mandelbrot [21], ispirato dai lavori precedenti del matematico Julia [14]) che descrive le strutture sottostanti alle serie storiche generate da particolare sistemi dinamici non lineari. In particolare se i mercati finanziari risultano governati da queste dinamiche, si possono produrre nei prezzi dei comportamenti "caotici", indistinguibili da quelli generati da processi stocastici, nonostante la loro origine deterministica.

A tal fine ci si propone di studiare la serie storica di un indice azionario del mercato italiano, ipotizzando una distribuzione Pareto-stabile per i rendimenti, in primo luogo per vedere se e' presente una struttura frattale, in secondo luogo per scoprire se tale struttura e' generata da un processo dinamico "caotico". Il presente lavoro e' stato compiuto sul tasso di rendimento dell'indice azionario COMIT, ma nel prossimo futuro ci si propone di eseguire lo stesso tipo di analisi sui prezzi azionari deflazionati e/o detrendizzati come proposto da altri autori [23], [25] e [26].

2. ANALISI DELLA STRUTTURA FRATTALE.

2.1. Aspetti teorici.

Il primo modello che descrive analiticamente le variazioni dei corsi azionari è quello di Bachelier - Einstein che risale ai primi del '900, in cui si suppone che il processo che genera le serie storiche relative alle variazioni dei prezzi azionari sia un moto browniano standard; la relativa distribuzione di probabilità è la sola che presenti varianza finita ed abbia incrementi indipendenti e stazionari.

In simboli, la v.c. $X:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è un processo di Wiener o un moto browniano standard (MBS) se [6]:

(2.1.1.a) $X(0)=0$ con probab. 1 e $X(t)$ è continua in t;

(2.1.1.b) $\forall\ t\geq 0$ e $\forall\ h>0$ gli incrementi $X(t+h)-X(t)$ sono normalmente distribuiti con media nulla e varianza h (stazionarietà);

(2.1.1.c) $\forall\ 0\leq t_1\leq \ldots \leq t_{2m}$ gli incrementi $X(t_2)-X(t_1)$, ..., $X(t_{2m})-X(t_{2m-1})$ sono indipendenti.

Poichè tali proprietà delle distribuzioni non sono del tutto confermate dall'evidenza empirica, si possono alternativamente rilassare le due ipotesi riguardanti o la varianza oppure l'indipendenza degli incrementi. Si introducono allora da un lato i processi stabili di Pareto-Lévy (PLS), che presentano quasi tutti varianza infinita, e dall'altro il processo, detto moto browniano frattale (MBF), in cui gli incrementi, pur essendo ancora normalmente distribuiti, non risultano indipendenti.

In particolare la v.c. $X: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è stabile se:

(2.1.2.a) gli incrementi $X(t+h)-X(t)$ sono stazionari (la distribuzione è indipendente da t ma dipende da h);
(2.1.2.b) gli incrementi sono v.c. indipendenti.

Questi processi stocastici sono discontinui con probabilità 1, hanno generalmente i momenti I e/o II infiniti e, salvo alcuni casi particolari (Gaussiana, Cauchy-Lorenz, Lévy-Holtsmark-Smirnov), non si puó specificare analiticamente la funzione di densità di probabilità della distribuzione se non in forma integrale.

Invece, un processo stocastico $X: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ risulta un moto browniano frattale di indice $H \in (0,1]$, detto esponente di Hurst, se:

(2.1.3.a) $X(t)$ è continuo con probabilità 1 e $X(0)=0$;
(2.1.3.b) $\forall\ t\geq 0$ e $\forall\ h>0$ gli incrementi $X(t+h)-X(t)$ sono normalmente distribuiti con media nulla e varianza h^{2H} (stazionarietà ma non indipendenza).

Si noti che se $H=1/2$ si ottiene un MBS, cioè un "random walk" puro in cui non c'è dipendenza statistica a lungo termine negli incrementi della v.c.. Se invece il numero reale H è diverso da 1/2 si verifica una dipendenza (memoria) a lungo termine tra le osservazioni e quindi gli eventi di un periodo influenzano tutti i periodi successivi (persistenza). Nel modello di Bachelier, al contrario, si ipotizza che la serie temporale dei cambiamenti dei prezzi dei titoli sia un processo di Markov (senza memoria).

In particolare, se $H \in (0,\ 0.5)$ si verifica un comportamento anti-persistente, nel senso che se in un determinato periodo si realizza una variazione positiva, nel periodo successivo è più verosimile un cambiamento di segno contrario. Viceversa se $H \in (0.5,1]$ il comportamento è di tipo persistente e l'esponente H misura la probabilità di osservare un trend persistente tanto più H risulta maggiore di 0.5. In tal caso nella serie storica è presente meno rumore quanto più H è vicino ad 1.

Per determinare H si puó utilizzare la legge empirica di Hurst oppure l'equazione di Mandelbrot [27].

Si mostra di seguito il legame esistente tra un MBF ed un PLS. Innanzitutto si ricorda che una v.c. stabile risulta descritta non tanto dalla sua funzione di densità di probabilità, di cui si conosce soltanto una rappresentazione integrale, quanto piuttosto dalla funzione caratteristica, data in forma canonica (dovuta a

Lévy-Khintchin) da:

(2.1.1) $\Phi(t)=\exp \{i\delta t - |\gamma t|^{\alpha} [1 + i\beta \,\mathrm{sgn}(t)\, \mathrm{tg}(\alpha\pi/2)]\}$

per $\alpha \neq 1$, dove sgn(t) è la funzione segno. Si vede che questa funzione dipende dai quattro seguenti parametri:

α: esponente caratteristico $\in\ ]0,2]$;
β: parametro di asimmetria $\in [-1,1]$;
γ: parametro di scala $\in\ ]0,+\infty[$;
δ: parametro di localizzazione $\in \mathbb{R}$.

Ebbene, l'esponente di Hurst coincide con l'inverso dell'esponente caratteristico α, sicché, se H=1/2 allora $\alpha=2$ e si tratta del MBS ovvero della distribuzione normale. In tutti gli altri casi si tratta di distribuzioni di probabilità in generale asimmetriche ($\beta \neq 0$) e dotate dei primi due momenti infiniti.

Come precedentemente accennato le serie storiche dei rendimenti dei titoli azionari presentano delle peculiarita' tali da far ipotizzare che la geometria frattale possa risultare utile a descrivere i loro andamenti.

Le figure frattali possono essere definite dall'insieme delle seguenti proprietà caratteristiche:

(2.1.4.a) <u>autosimilarita'</u>: la maggior parte delle figure frattali possiede la proprietà di contenere parti che in qualche senso assomigliano al tutto (proprietà di <u>isotropia</u>). Se si tratta di figure generate da regole deterministiche allora la similitudine è di tipo geometrico, mentre se le leggi sono stocastiche allora le forme sono statisticamente auto-affini (le figure auto-affini sono insiemi compatti, invarianti rispetto al gruppo delle contrazioni affini). In particolare, considerando le traiettorie del sistema dinamico nello spazio n-dimensionale, le distribuzioni del vettore $\underline{X}(t)$ e del vettore $\lambda^{-1/\alpha}\ \underline{X}(\lambda t)$ sono le stesse, il che significa che, sotto l'ipotesi di distribuzioni Pareto-stabili, le funzioni caratteristiche associate alle due v.c. precedenti possiedono lo stesso esponente caratteristico α, che perció non risulta alterato né da una dilatazione del passo temporale (λt) né dalla contemporanea omotetia della scala spaziale ($\lambda^{-1/\alpha}$). Invece, il parametro γ varia linearmente con la dilatazione temporale, cioè se γ_n rappresenta il parametro di scala relativo alla distribuzione della serie storica di passo temporale n e γ_1 quello del passo 1 (per esempio giornaliero), allora vale la relazione: $\gamma_n = n\ \gamma_1$;

(2.1.4.b) <u>struttura fine</u>: le figure frattali contengono dettagli a tutte le scale, cioè godono della proprietà di <u>invarianza</u> per cambiamento di scala;

(2.1.4.c) <u>ricorsivita'</u>: le figure frattali si possono rappresentare graficamente solo tramite procedure ricorsive;

(2.1.4.d) struttura irregolare: nonostante una definizione spesso semplice la forma delle figure è molto complessa;

(2.1.4.e) la figura frattale non è un luogo geometrico inteso in senso classico e nemmeno rappresenta l'insieme delle soluzioni di un'equazione algebrica;

(2.1.4.f) i frattali sono insiemi infiniti (non numerabili) di punti;

(2.1.4.g) i frattali sono figure per cui la dimensione di Hausdorff è sempre strettamente maggiore della dimensione topologica [6]. Tutte le figure frattali possiedono dimensioni non intere ma frazionarie.

Per chiarire quest'ultimo punto, introduciamo il concetto di dimensione: essa fornisce informazione circa lo spazio occupato da un generico insieme e ne descrive le proprietà geometriche. Fornisce una misura del grado di irregolarità di un insieme quando questo viene osservato a scale molto piccole. Si possono elencare i seguenti tipi di dimensioni associate a tematiche frattali: dimensione topologica, dimensione di similarita', dimensione box-counting, dimensione di Hausdorff [6].

2.2. Aspetti applicativi.

Si intende ora verificare la proprieta' di autosimilaritá, precedentemente descritta, per la serie storica relativa all'indice azionario COMIT, di cui abbiamo preso in considerazione il periodo che va dal 26.1.1977 al 28.1.1992, per un totale di 3762 osservazioni.[2] Dalle quotazioni siamo passati al calcolo dei tassi di rendimento giornalieri percentuali mediante la seguente formula: $x_i = 100 \ln(P_i/P_{i-1})$, per $i = 1, \ldots, 3762$. Sulla serie e' stata poi effettuata un'analisi di autocorrelazione mediante un modello AR(1); stimato il coefficiente autoregressivo del primo ordine si e' passati a considerare la serie dei residui.

Per quanto sopra visto la verifica della proprieta' di autosimilarita', sotto l'ipotesi che la distribuzione sia Pareto-stabile, implica la verifica sia dell'uguaglianza tra l'esponente caratteristico α_1 della serie storica indagata e quello, α_n, della serie storica ottenuta dilatando il passo temporale n, con n=2, ..., 5, sia dell'uguaglianza tra il parametro di scala γ_n e la quantita' $n\gamma_1$.[3] In particolare, per una maggiore signifi-

---

2 Banca dati del Dipartimento di Matematica Applicata ed Informatica dell'Universita' degli Studi di Venezia.

3 Questa uguaglianza vale nel caso in cui β=0 e δ=0.

cativita', si sono considerate tutte le possibili sotto successioni x_{k+jn}, con k=1, ..., n, j=0, ..., Int[3762/n], estraibili dalla serie originaria, stimati i rispettivi esponenti $\alpha_{n,j}$ e $\gamma_{n,j}$ e fatte le seguenti medie:

$\alpha_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{n,j}/n$, $\gamma_n = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{n,j}/n$.

I risultati ottenuti sono i seguenti:

Tabella 2.2.1 - Parametri della distribuzione stabile.

n	α_n	γ_n
1	1.68	0.0067
2	1.72	0.0112
3	1.75	0.0142
4	1.77	0.0170
5	1.75	0.0200

Ora considerando significativa solo la prima cifra decimale, come fatto da Walter [31], si verifica che α_n assume soltano i due valori 1.7 ed 1.8, ma anche considerando le due cifre decimali il range di variazione per α_n, [1.68, 1.77], e' inferiore a quello trovato da Walter che accettava, ad ogni modo, l'ipotesi di autosimilarita' sul mercato francese. Invece, per quanto riguarda i risultati su γ_n, si verifica un andamento crescente ma non secondo la proposta relazione $\gamma_n = n\gamma_1$, con n=1, ..., 5. Presumibilmente cio' e' imputabile ad una certa quantita' di errore presente nei dati ed al fatto che l'aver trovato le stime di β e di δ diverse da zero si discosta dall'ipotesi su cui si basa tale relazione.

3. ANALISI DEI COMPORTAMENTI CAOTICI.

3.1. Dall'autosimilarita' al caos deterministico.

Un sistema dinamico deterministico puó ammettere configurazioni di equilibrio, descritte nello spazio delle fasi da orbite periodiche di periodo p=1 (punto fisso) oppure p>1 (ciclo limite). Inoltre, recentemente, sono stati individuati anche particolari sistemi dinamici deterministici, di tipo non lineare, che possono ammettere comportamenti anche caotici. Qualora si realizzino questi andamenti la dinamica del sistema viene caratterizzata dalla comparsa di un particolare luogo d'equilibrio detto "attrattore strano". In particolare quando la serie storica indagata presenta una struttura frattale (come sembra verificato dalla precedente applicazione), poichè questa risulta essere una proprietà caratterizzante gli attrattori strani, si puó per induzione ipotizzare l'esistenza di un sottostante regime caotico che governa il moto del sistema.

Formalmente, un insieme F è un <u>attrattore</u> per un sistema dinamico $f: U \to V$ se F è un insieme chiuso, invariante sotto f, cioè $f(F)=F$, ed inoltre $\forall\ x \in A$, aperto di F, la distanza tra l'iterata k-esima di x sotto f e l'insieme F tende a 0 quando $k \to \infty$.

In particolare, si definisce intuitivamente <u>attrattore strano</u> o <u>frattale</u> quella particolare evoluzione temporale del sistema dinamico, definita in una specifica regione dello spazio delle fasi n-dimensionale, avente periodicità infinita. Piu' formalmente si possono riassumere le caratteristiche topologiche [28] dell'attrattore strano F, insieme limitato e compatto dello spazio delle fasi associato ad un sistema dinamico non lineare f, dicendo che:

(3.1.1.a) esiste un insieme B, detto <u>bacino di attrazione</u>, che è intorno di F (proprietà di "attrattività" di F);

(3.1.1.b) le orbite di due qualsiasi punti di F arbitrariamente vicini divergono, senza peró mai abbandonare il bacino di attrazione B (proprietà di "stranezza" di F);

(3.1.1.c) per ogni punto x^* di F esiste sempre un altro punto di F arbitrariamente vicino ad una opportuna iterata di x^* sotto f (proprietà di "indecomponibilità" di F in sottoattrattori elementari).

Invece, relativamente al sistema dinamico f, se questo ammette un attrattore o repulsore frattale F allora f mostra un comportamento caotico su F. Il che significa per f presentare tre proprietà:

(3.1.2.a) l'orbita $\{f^k(x_0)\}$ è <u>densa</u> in F per qualche $x_0 \in F$. Tale fatto si enuncia anche dicendo che f è <u>topologicamente transitiva</u>: $\forall\ U, V$ aperti $\exists\ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ t.c. $f^k(U) \cap V \neq \Phi$.

(3.1.2.b) l'insieme dei punti periodici di f è <u>denso</u> in F;

(3.1.2.c) f mostra <u>dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali</u>: $\forall\ x, y \in F$ e $\forall\ \varepsilon > 0$ con $\|x-y\|<\varepsilon$ $\exists\ n \in \mathbb{N}$ e $M>0$ t. c. $\|f^n(x)-f^n(y)\| > M$.

Peculiarita' delle serie storiche caotiche unidimensionali è il fatto che ognuna di esse, anche se proveniente da un sistema dinamico multidimensionale, contiene informazioni su tutto il fenomeno generatore. Questa proprietà discende dalle caratteristiche delle figure frattali messe in luce in (2.1), ed in particolare l'isotropia, l'autosimilarità e la struttura fine.

Le proprieta' precedentemente elencate sembrano, almeno "morfologicamente", ben descrivere l'andamento di regola presentato dalle serie storiche finanziarie, nelle quali, pur essendo presente una sorta di regolarita' di fondo (l'attrattore strano), si possono cogliere sia la presenza di una vasta gamma di valori assunti dal sistema dinamico (indecomponibilita') sia una certa difficolta' previsiva relativa a questi stessi valori (dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali). A tal fine abbiamo individuato un insieme di strumenti provenienti dalle discipline fisiche che permettono di rilevare l'eventuale presenza di comportamento caotico.

3.2. Misure sul caos.

Da quanto premesso risulta di un certo interesse indagare la presenza, o meno, del caos deterministico nelle serie storiche finanziarie. Tuttavia bisogna sottolineare che, se in generale risulta poco agevole il verificare tale presenza gia' conoscendo la forma funzionale dello stesso sistema dinamico, cio' risulta ancora piu' complesso quando se ne conosca la sola determinazione storica. Ai fini di questa indagine la letteratura propone alcuni strumenti numerici. Peraltro, preliminarmente alla loro introduzione, si intende porre in evidenza come una prassi completa richiederebbe una previa verifica dell'ipotesi di non linearita' della serie storica indagata, poiche', qualora si rifiutasse tale ipotesi, sarebbe privo di significato ricercarvi comportamenti caotici. Tralasciando questa prima fase e, dunque, ipotizzando la non linearita', si ricorda la esistenza di diversi tipi di strumenti, alcuni che indagano nel domino temporale (BARMA, TAR, SETAR, EXPAR,...) altri invece che indagano nel dominio frequenziale (trasformata ed antitrasformata di Fourier). In particolare per questi ultimi e' da osservare come lo spettro di potenza dell'antitrasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione di una serie storica generata da un processo caotico risulti indistinguibile da quella relativa ad un random-walk.

A causa dell'impotenza induttiva di tali strumenti si preferiscono altri tipi di strumenti provenienti dall'ambito delle discipline fisiche. In particolare, qui di seguito si illustrano:

(3.2.A) la dimensione frattale,
(3.2.B) la dimensione di correlazione,
(3.2.C) gli esponenti di Liapunov,
(3.2.D) la entropia di Kolmogorov,
(3.2.E) la entropia informativa.

Le due prime quantita' risultano associate piu' alla proprieta' di indecomponibilita', mentre le rimanenti risultano associate piu' a quella della dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali.

Preliminarmente a queste misure e' opportuno introdurre il concetto di <u>embedding</u> [17]. Consideriamo il processo generatore "vero"

(3.2.1) $x^i_{t+1} = g_i\left(\underline{x}_t\right), \ \underline{x}_t \in \mathbb{R}^n, \ i = 1, \ldots, n$

dove x^i_{t+1} e' la componente i-esima della dinamica. Poiche' $\underline{x}_t$ ed n risultano sconosciuti all'osservatore, questo misurera':

(3.2.2) $\bar{x}^i_{t+1} = h\left(\underline{x}_t\right),$

dove, in generale, $\bar{x}^i_{t+1} \neq x^i_{t+1}$.

Peraltro dalla serie storica unidimensionale osservata e' possibile determinare un sistema dinamico "artificiale" detto appunto embedding che risulta, sotto date ipotesi, diffeomorficamente equivalente al sistema dinamico "vero". Quindi si riorganizza la serie storica osservata nel seguente insieme di vettori m-dimensionali, ognuno dei quali chiamato "m-history":

(3.2.3) $\underline{\bar{x}}^m_T = \left(\bar{x}^i_T, \bar{x}^i_{T-1}, \ldots, \bar{x}^i_{T-m+1}\right),$

(3.2.4) $\underline{\bar{x}}^m_{T-1} = \left(\bar{x}^i_{T-1}, \bar{x}^i_{T-2}, \ldots, \bar{x}^i_{T-m}\right),$

$\vdots$

(3.2.5) $\underline{\bar{x}}^m_{to} = \left(\bar{x}^i_{to}, \bar{x}^i_{to-1}, \ldots, \bar{x}^i_{to-m+1}\right),$ con $t_0 = m,$

dove m e' la dimensione di embedding.

Takens [17] ha dimostrato che la sequenza di vettori

(3.2.6) $\left\{\underline{\bar{x}}^m_t\right\}^T_{t=to}$

che descrive un luogo di punti nello spazio delle fasi m-dimensionale, risulta topologicamente equivalente all'attrattore generato dalla dinamica "vera" se:

(3.2.1.a) la variabile x^i_t si trova su di un attrattore;

(3.2.1.b) le funzioni $g_i(\cdot)$ e $h(\cdot)$ sono di classe $\mathscr{C}^1$;

(3.2.1.c) $m \geq 2n + 1$, dove n e' la dimensione topologica dello spazio cui appartiene $\underline{x}_t$.

L'importanza dell'embedding consiste nel fatto che e' sulle m-histories che si calcolano le suelencate quantita' che di seguito si illustrano.

(3.2.A) <u>Dimensione</u> <u>frattale</u>: detta anche dimensione di

Hausdorff - Besikovich, misura quanto un attrattore riempie il suo bacino di attrazione. Per un attrattore strano tale quantita' e' non intera. In particolare essendo una misura geometrica non e' in grado di affermare alcunche' sulla frequenza con la quale l'attrattore strano visita le distinte ipersfere di raggio r che riempiono il suo bacino di attrazione. Formalmente tale quantita' e' ricavabile dalla relazione seguente:

$$(3.2.A.1) \qquad N(r)r^{D_H} = V(U)$$

dove r e' il raggio delle ipersfere, N(r) e' il numero di ipersfere di raggio r di dimensione m necessarie per riempire il bacino U, D_H e' la dimensione frattale e V(U) e' il volume del bacino di attrazione m-dimensionale, da cui

$$(3.2.A.2) \qquad D_H = \lim_{r\to 0} \ln(N(r))/\ln(1/r).$$

Peraltro, per una certa complessita' computazionale le si preferisce la seguente misura alternativa per la quale risulta anche estremo superiore.

(3.2.B) <u>Dimensione di Correlazione</u>: a causa della dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali, due qualsiasi punti sull'attrattore risultano dinamicamente incorrelati. Peraltro, giacendo sullo stesso attrattore, possono anche venire a trovarsi vicini nello spazio delle fasi, ovvero risultare spazialmente correlati, cioe' distare, in senso euclideo, meno di un dato raggio r. A tal fine Grassberger e Procaccia [11] hanno dapprima definito l'integrale, o somma, di correlazione

$$(3.2.B.1) \qquad C_m(r) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} H\left(r - \left\| \bar{x}_t^{mi} - \bar{x}_t^{mj} \right\|\right)$$

con H(·) funzione di Heaviside, dove $H(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \le 0 \\ 1 & \text{se } y > 0 \end{cases}$.

Tale quantita', che equivale alla frequenza relativa con cui i punti risultano spazialmente correlati, e' legata alla funzione di correlazione dalla seguente uguaglianza:

$$(3.2.B.2) \qquad C_m(r) = r^{D_C} + o(r),$$

dove D_C e' la dimensione di correlazione, da cui [17]

$$(3.2.B.3) \qquad D_C = \lim_{r\to 0} \ln\left(C_m(r)\right)/\ln(r).$$

Questa quantita' e' collegata alla dimensione frattale mediante la seguente disuguaglianza:

$$(3.2.B.4) \qquad D_C \le D_H.$$

A queste prime misure di natura geometrica e, quindi, associabili allo spazio delle fasi dell'attrattore, si affiancano altre due misure, associabili alla "qualita' dinamica" del sistema indagato. In particolare verificano la dissipativita' o meno del sistema stesso testandone la dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali.

(3.2.C) Esponenti di Liapunov: ad ogni dimensione dello spazio delle fasi relativo al sistema risulta associato uno di questi esponenti che e' una generalizzazione della nozione di autovalore. In particolare l'insieme dei valori degli esponenti specifica le caratteristiche attrattive del luogo d'equilibrio. Piu' formalmente si considerino due distinti punti iniziali del bacino attrattore $\underline{x}_{0,1}$, $\underline{x}_{0,2}$ e si consideri la seguente linearizzazione della differenza delle applicazioni N-esime

$$(3.2.C.1) \quad \underline{x}_{N,1} - \underline{x}_{N,2} = F^N\left(\underline{x}_{0,1}\right) - F^N\left(\underline{x}_{0,2}\right) \cong$$

$$\cong \frac{\partial F^N\left(\underline{x}_{0,1}\right)}{\partial \underline{x}} d\underline{x}_0 + o\left(\underline{x}_{0,1} - \underline{x}_{0,2}\right)^2.$$

In particolare la quantita'

$$(3.2.C.2) \quad \frac{\partial F^N\left(\underline{x}_{0,1}\right)}{\partial \underline{x}}$$

e' la matrice Jacobiana (n x n) che possiede i seguenti n autovalori $\Lambda_1^N \geq \Lambda_2^N \geq \ldots \geq \Lambda_n^N$, a cui corrispondono n esponenti di Liapunov che sono definiti da:

$$(3.2.C.3) \quad \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log_2\left(\Lambda_i^N\right), \; i = 1, \ldots, n.$$

Si puo' verificare che, per ogni componente del sistema, vale la seguente approssimazione

$$(3.2.C.4) \quad \left| x_{N,1,i} - x_{N,2,i} \right| \cong \left| x_{0,1,i} - x_{0,2,i} \right| e^{\lambda_i N}$$

con i = 1, ..., n, che informa con quale tasso percentuale (misurato appunto dall'i-esimo esponente di Liapunov) convergono o divergono, lungo la rispettiva direzione le traiettorie di due punti scelti vicini ad arbitrio. In particolare un valore positivo dell'esponente di Liapunov lungo la direzione considerata ne conferma l'andamento caotico.

(3.2.D) Entropia di Kolmogorov: e' un indicatore della "caoticita' complessiva" del sistema, ovvero misura l'informazione[4] prodotta dal sistema allo scorrere del tempo, per il quale vale [17]

$$(3.2.D.1) \qquad K \le \sum_{i=1}^{n} \max\left\{\lambda_i,\ 0\right\},$$

dove K e' l' entropia di Kolmogorov con $0 \le K < +\infty$, che e' approssimata dalla somma degli esponenti di Liapunov associati alle direzioni lungo le quali il sistema si evolve caoticamente. Un'altra approssimazione di tale misura si puo' ricavare utilizzando ancora l'integrale di correlazione gia' definito, da cui:

$$(3.2.D.2) \qquad K_1 = \lim_{m\to+\infty} \lim_{N\to+\infty} \lim_{r\to 0} \frac{1}{\tau} \log \left[C_m(r)/C_{m+1}(r)\right],$$

dove m e' la dimensione di embedding, τ e' il passo temporale per la ricostruzione della serie storica.

In particolare K_1 costituisce un estremo inferiore per K, cioe' $K_1 \le K$.

(3.2.E) <u>Entropia informativa</u>: fornisce informazioni sulle frequenze con cui l'attrattore visita le distinte ipersfere di raggio r che riempiono il proprio bacino d'attrazione. Infatti, similmente alla entropia della meccanica statistica, ci da' il guadagno di informazione (con una approssimazione r) relativo alla stato attuale del sistema, senza pero' dire nulla sullo stato d'origine. Formalmente e' data da [11]

$$(3.2.E.1) \qquad S(r) = -\sum_{i=1}^{N(r)} p_i \ln\left(p_i\right)$$

dove S(r) e' l'entropia informativa e p_i e' la probabilita' che ha l'attrattore strano di trovarsi nella i-esima ipersfera. Peraltro, data l'inconoscibilita' di p_i, si utilizza la seguente approssimazione

$$(3.2.E.2) \qquad S(r) \cong S(0) - D_S \ln(r)$$

dove D_S: dimensione informativa, per la quale vale la seguente disuguaglianza: $D_H \le D_S \le D_C$.

3.3. Un'applicazione su un indice azionario italiano.

Al fine di ricercare la presenza di comportamenti caotici nella serie storica considerata, tra gli strumenti

---

[4] Informazione intesa come generazione di due evoluzioni temporali significativamente distinte a partire da due punti scelti vicini ad arbitrio, al limite indistinguibili alla misurazione.

sopra presentati abbiamo considerato, per ora, solo la dimensione di correlazione. I motivi di tale scelta sono sia di ordine pratico che di ordine qualitativo. Infatti la dimensione di correlazione:

(3.3.1.a) risulta, rispetto alle altre, piu' agevole da un punto di vista computazionale;
(3.3.1.b) e' utile per il calcolo di un altro indicatore, l'entropia di Kolmogorov, che puo' essere approssimato in funzione dell'integrale di correlazione;
(3.3.1.c) e' legata alla proprieta' di indecomponilita', che risulta piu' significativa di quella della dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali ai fini della individuazione di un comportamento caotico in quanto quest'ultima proprieta' puo' verificarsi anche per processi non caotici.

In particolare la serie storica indagata e' ancora quella relativa all'indice COMIT sulla quale sono state eseguite dapprima le trasformazioni gia' decritte nel paragrafo (2.1), e dalla quale poi e' stata estratta, in analogia con la tecnica di Scheinkman e LeBaron [29] una sotto successione settimanale, ai fini di ridurre la presenza di rumore, alla quale tale misura risulta eccessivamente sensibile. In futuro ci si riserva di eseguire un'analoga indagine sulla serie storica completa. La sotto successione cosi' ottenuta e' stata elaborata con l'algoritmo proposto da Grassberger e Procaccia [11]. Questo algoritmo dapprima ricostruisce lo spazio delle fasi per distinti valori del passo temporale τ e della dimensione di embedding m, dopodiche' conta il numero di punti di tale spazio per i quali la distanza e' inferiore ad un fissato raggio r. Infine calcola l'integrale di correlazione (3.2.B.1) dal quale ricava la corrispondente dimensione come mostrato in (3.2.B.3).

I risultati, presentati nella successiva Tabella 3.3.1., sembrano confermare un andamento caotico della suindicata serie storica. Infatti:

(3.3.2.a) la dimensione calcolata per $r \to 0$ tende ad assumere stabilmente valori non interi compresi tra 1 e 2;
(3.3.2.b) la dimensione calcolata e' superiormente limitata per ogni m mentre, come mostrato da Malliaris e Philippatos [18], nel caso in cui predominasse l'aspetto stocastico tale dimensione tenderebbe a divergere gia' per valori di m maggiori di 3; percio' si puo' ipotizzare che nella serie storica indagata l'aspetto stocastico sia poco rilevante;
(3.3.2.c) la dimensione non si discosta significativamente dai valori calcolati per mappe caotiche "classiche" (logistica, di Henon, ...) per le quali risulta compresa tra 1 e 2 [11], [18];
(3.3.2.d) il comportamento della dimensione di

correlazione al variare di m presenta un andamento analogo a quello rilevato da Scheinkman e LeBaron [29] nella analisi di un indice del mercato azionario americano. Nel loro lavoro, per m=1, ..., 14, essi stimano una dimensione compresa tra 0.6 e 8.7.

Peraltro tale valore risulta inferiore rispetto a quelli trovati da Peters [27] per gli analoghi S&P 500, MSCI[5] Japan, MSCI Germany, MSCI U.K. che sono compresi tra 2 e 3. Presumibilmente tale differenza puo' essere imputata ad un maggior controllo sul mercato italiano, operato da un ridotto numero di operatori, che ne puo' influenzare sensibilmente la dinamica.

Tabella 3.3.1 - Dimensione di correlazione.

r	r^2 = 0.08160			r^3 = 0.02398			r^4 = 0.00692		
m \ τ	15	30	45	15	30	45	15	30	45
1	0.03	0.03	0.03	0.22	0.22	0.22	0.40	0.40	0.40
2	0.09	0.09	0.09	0.50	0.50	0.51	0.85	0.83	0.84
3	0.17	0.17	0.17	0.81	0.80	0.84	1.20	1.17	1.18
4	0.26	0.28	0.29	1.15	1.13	1.19	1.30	1.28	1.27
5	0.38	0.42	0.44	1.44	1.44	1.47	1.31	1.29	1.26
6	0.52	0.60	0.61	1.63	1.64	1.60	1.31	1.28	1.24
7	0.69	0.81	0.77	1.71	1.68	1.61	1.30	1.27	1.22
8	0.88	1.04	0.94	1.72	1.67	1.59	1.30	1.25	1.20
9	1.09	1.27	1.14	1.72	1.66	1.56	1.29	1.24	1.18
10	1.34	1.47	1.37	1.72	1.64	1.53	1.29	1.23	1.15

3.4. Considerazioni finali.

In conclusione e' da porre anche in evidenza come le misure precedentemente illustrate, presentino il fianco alle seguenti critiche:

(3.4.a) soffrono di un certa complessita' computazionale che, di norma, porta a far loro preferire degli indicatori computazionalmente piu' semplici, ma, per cio' stesso, anche meno precisi;

---

[5] Morgan Stanley Capital International.

(3.4.b) esigono, di norma, per il loro calcolo serie storiche "sufficientemente" lunghe e pulite;

(3.4.c) non riescono a distinguere sistemi dinamici in regime caotico da sistemi dinamici caratterizzati da luoghi attrattori di elevata periodicita';

(3.4.d) prevalentemente riescono a cogliere la sola eventuale presenza di dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali piuttosto che le altre caratteristiche dell'attrattore strano, rivelandosi cosi' misure solo "empiricamente necessarie" ma non "empiricamente sufficienti", poiche' anche processi non caotici possono dimostrare tale dipendenza sensibile e, dunque, essere indistinguibili da quelli caotici "agli occhi" di queste misure;

(3.4.e) non sono accompagnate, di regola, da una misura di probabilita' o da un campo di variazione, la qual cosa non le configura ne' come tests ne' come indici, bensi' solo come indicatori.

Queste ultime considerazioni portano dunque alla riflessione conclusiva seconda la quale, nell'analisi dei dati sperimentali, perde di importanza individuare il preciso valore delle diverse misure presentate ma, al contrario, diviene rilevante riuscire a distinguere, mediante l'analisi comparata, la qualita' del regime (casuale, periodico, quasi-periodico, caotico) in cui il sistema dinamico indagato si trova.

4. BIBLIOGRAFIA.

[1] L. BACHELIER, *Teórie de la spéculation*, Annales de l'Ecole Normale Superieure, XVII, 21-86, 1900.

[2] W. A. BROCK e A.G. MALLIARIS, *Differential equations, stability and chaos in dynamic economics*, Elsevier Science Publishers B. V., 1989.

[3] E. CANESTRELLI e C. NARDELLI, *Distribuzioni stabili di Levy dei rendimenti del mercato azionario italiano*, Atti XI convegno A.M.A.S.E.S., Grado, 145-158, 1991.

[4] M. CORAZZA, *Approccio alle serie storiche con dinamiche non lineari complesse*, Tesi di laurea, A.A. '90/'91, Ca'Foscari, Venezia.

[5] R. L. DEVANEY, *An introduction to chaotic dynamical systems*, The Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc., 1986.

[6] K. FALCONER, *Fractal geometry*, J.Wiley & Sons Inc., 1990.

[7] E. F. FAMA, *Portfolio analysis in a stable paretian market*, J. of Business, 36, 420-429, 1963.

[8] E. F. FAMA, *Mandelbrot and the stable paretian hypothesis*, J. of Business, 36, 420-429, 1963.

[9] M. J. FEIGENBAUM, *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*, J. of Stat. Physics, 19, 1, 25-52, 1978.

[10] M. FRANK e T. STENGOS, *Chaotic dynamics in economic time series*, The Journal of Economic Surveys, 2, 2, 103-133, 1988.

[11] P. GRASSBERGER e I. PROCACCIA, *Measuring the strangeness of strange attractors*, Phisica 9D, 189-208, 1983.
[12] D. A. HSIEH, *Chaos and nonlinear dynamics: application to financial markets*, The J. of Fin., XLVI, 5, 1839-1877, 1991.
[13] M. C. JENSEN, *Risk, the pricing of capital assets, and the evaluation of investment portfolios*, The J. of Business, 42, 2, 167-247, 1969.
[14] G. JULIA, *Memoire sur l'iteration des fonctions rationelles*, J. de Mathematiques Pures e Appliquées, 4, 47-245, 1918.,
[15] P. LÉVY, *Calcul des probabilites*, Gauthier-Villars, Paris, 1925.
[16] T. Y. LI e J. A. YORKE, *Period three implies chaos*, American Mathematical Monthly, 82, 10, 985-992, 1975.
[17] H. W. LORENZ, *Nonlinear dynamical economics and chaotic motion*, Preliminary August, 1988.
[18] A. G. MALLIARIS e G. PHILIPPATOS, *Random walk vs. chaotic dynamics in financial economics*, Dispensa, 1992.
[19] B. MANDELBROT, *The Pareto-Levy law and the distribution of income*, Inter. Ec. Rev., 1, 79-106, 1960.
[20] B. MANDELBROT, *Stable Paretian random functions and the multiplivative variation of income*, Econometrica, 29, 517-543, 1961.
[21] B. MANDELBROT, *The fractal geometry of nature*, Freeman, S. Francisco, 1983.
[22] B. MANDELBROT, *The variation of certain speculative prices*, J. of Business, 36, 394-419, 1963.
[23] R. N. MANTEGNA, *Levy walks and enhanced diffusion in Milan stock exchange*, Physica A, 179, 232-242, 1991.
[24] R. MAY, *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature, 261, 459-467, 1976.
[25] E. E. PETERS, *Fractal structure in the capital markets*, Financial Analysts J., July-August, 32-37, 1989.
[26] E. E. PETERS, *A chaotic attractor for the S&P 500*, Financial Analysts J., March-April, 55-81, 1991.
[27] E. E. PETERS, *Chaos and order in the capital markets*, John Wiley & Sons Inc., 1991.
[28] D. RUELLE, *Strange attractors*, Mathematical Intelligencer, 2, 126-137, 1979.
[29] J. SCHEINKMAN e B. LE BARON, *Nonlinear dynamics and stock returns*, J. of Business, 62, 311-337, 1989.
[30] Y. G. SINAI, *Self-similar probability distributions*, Th. of Probab. and its Appl., XXI, 1, 64-80, 1976.
[31] C. WALTER, *Levy-stable distributions and fractal structure on the Paris market*, I[st] AFIR International Colloquium, 3, 242-259, Paris, 1990.
[32] A. WOLF, J. B. SWIFT, H. L. SWINNEY e J. A. VASTANO, *Determining Liapunov exponents from a time series*, Physica 16D, 285-317, 1985.

Riva Artigrafiche spa - Trieste