

RENDICONTI

del Comitato per gli studi economici

VOL. XXXII

a cura di
Elio Canestrelli

Cafoscarina

Titolo della rivista e ISSN

RENDICONTI DEL COMITATO PER GLI STUDI ECONOMICI

1591-9781

Comitato Scientifico

Paolo BORTOT
Elio CANESTRELLI
Giovanni CASTELLANI
Francesco MASON

Recapito

Dipartimento di Matematica Applicata ed Informatica
Università di Venezia
Dorsoduro 3825/E
30123 Venezia
Tel 041 5221345-2578266
Fax 041 5221756

Il presente volume è stato composto con \TeX

Edizione Libreria Editrice Cafoscarina
Società Cooperativa a r.l.
Ca' Foscari, Dorsoduro, 3246, 30123 Venezia

Proprietà letteraria riservata

Stampato in Italia presso Stamperia Cetid s.r.l., via Ca' Rossa, 129, 30174 Mestre.

Gennaio 1995

UN APPROCCIO DETERMINISTICO NON LINEARE COMPLESSO ALLA VALUTAZIONE DELLE OPZIONI FINANZIARIE*

MARCO CORAZZA

Dipartimento di Matematica Applicata ed Informatica, Università "Ca' Foscari" di Venezia

CARLA NARDELLI

Dipartimento di Matematica Applicata ed Informatica, Università "Ca' Foscari" di Venezia

ABSTRACT In this paper a formula for valuating the equilibrium price of an European call option is determined by assuming that the process underlying the returns is a complex nonlinear deterministic dynamics. In particular, this formula is obtained by solving a first order partial differential equation; it is possible to show that this ordinary differential equation and its solution can be obtained as a limit of the classic Black and Scholes stochastic approach.

KEYWORDS Complex nonlinear deterministic dynamics, Li-Yorke theorem, European call option, option pricing, Black-Scholes formula.

1. INTRODUZIONE

Più o meno recentemente, in letteratura è apparso un crescente numero di risultati empirici relativi all'indagine delle ipotesi classicamente soggiacenti alle leggi di evoluzione dei prezzi, tradizionalmente date da

* Ricerca svolta nell'ambito del progetto C.N.R. numero 92.01788.CT10.

Si ringrazia per le utili osservazioni e considerazioni il Professor Marco Li Calzi del Dipartimento di Matematica Applicata ed Informatica dell'Università di Venezia.

$$r_1(t, \Delta t) = P(t + \Delta t) - P(t) \sim N(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t) \quad (1.1)$$

e

$$r_2(t, \Delta t) = \ln[P(t + \Delta t)] - \ln[P(t)] \sim N(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t). \quad (1.2)$$

L'evidenza empirica sulla parziale inadeguatezza di queste ipotesi, unitamente agli specifici risultati empirici conseguiti, ha condotto molti autori a congetturare ed a proporre ipotesi alternative.

Ad esempio, le costanti presenze di leptocurtosi, di asimmetria e di instabilità della varianza nelle distribuzioni di frequenza delle variazioni sia dei prezzi sia delle loro trasformazioni logaritmiche, hanno condotto molti autori a congetturare per queste ultime una distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile ([1], [5], [6], [8], [10], [14], [16], [17], [21], [24], [31], [33] e [34]) o una distribuzione data da una mistura di distribuzioni di probabilità Gaussiane e/o Pareto-Lévy stabili ([17] e [20]). Altri autori, rigettando l'ipotesi di efficienza in forma debole dei mercati finanziari mediante la conduzione di tests sull'ipotesi di dipendenza (non solo lineare) delle variazioni sia dei prezzi sia delle loro trasformazioni logaritmiche ([4], [9], [11], [18], [19], [29] e [30]), hanno assunto la non-markovianità per i processi stocastici che generano tali variazioni.

A tali ipotesi ottenute dall'assunzione delle congetture proposte in ambito stocastico si sono recentemente affiancate delle ipotesi alternative proposte in ambito deterministico. Queste ipotesi assumono leggi delle variazioni sia dei prezzi sia delle loro trasformazioni logaritmiche descrivibili da dinamiche deterministiche non-lineari complesse o caotiche ([27], [29] e [30]). È da notare come anche le congetture soggiacenti a queste ultime ipotesi alternative siano indotte da un crescente numero di risultati empirici relativi alla determinazione del valore di alcuni opportuni indicatori di non-linearità complessa o caoticità ([5], [10] e [11]).

Questo lavoro si propone di determinare una formula per la valutazione del valore di equilibrio (parziale) di una opzione call di tipo europeo nell'ipotesi in cui la legge delle variazioni delle trasformazioni logaritmiche dei prezzi sia descrivibile da una dinamica deterministica non-lineare complessa o caotica. In particolare, nelle sezioni 2. e 3., rispettivamente, si illustrano sinteticamente gli aspetti teorici e gli assunti economico-finanziari necessari per la determinazione

di tale formula; nella sezione 4. si ricava un'equazione differenziale alle derivate parziali che descrive la dinamica del valore di equilibrio della opzione call di tipo europeo; nella sezione 5. si determina la soluzione della equazione differenziale alle derivate parziali precedentemente ricavata; nella sezione 6. si presentano delle osservazioni e considerazioni finali.

2. ASPETTI TEORICI

Gli aspetti teorici necessari per determinare quanto prospettato nella sezione 1. riguardano, dapprima, la definizione di dinamica caotica, poi un risultato che permette di identificare una classe di sistemi dinamici caratterizzati da una tale dinamica ed, infine, la definizione di un indicatore che permette di quantificare una delle proprietà dei sistemi dinamici in generale. In particolare, poiché in letteratura non esiste uniformità di pareri sugli aspetti definatori degli "oggetti" inerenti alle dinamiche caotiche, in questo lavoro ci si rifà alle definizioni verso le quali c'è più diffuso consenso¹.

(2.A) *Dinamica caotica*: un sistema dinamico $f : I \rightarrow I$, con $I \subset \mathbf{R}$, si definisce caotico se soddisfa le tre seguenti condizioni:

(2.A.1) $f(\cdot)$ è topologicamente transitivo, cioè per ogni coppia di insiemi aperti $U, V \subset I$ esiste un numero intero $k > 0$ tale che

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset \quad (2.1)$$

dove

$f^k(\cdot)$: iterata k -esima del sistema dinamico;

(2.A.2) $f(\cdot)$ mostra dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali, cioè, dati $\delta > 0$ arbitrariamente piccolo e $\varepsilon > 0$ opportunamente grande, per ogni coppia di punti $x, y \in I$ tali che $|x - y| < \delta$, esiste un numero intero $k > 0$ tale che

$$|f^k(x) - f^k(y)| > \varepsilon; \quad (2.2)$$

(2.A.3) l'insieme P dei punti periodici di $f(\cdot)$ è denso in I , cioè

¹ È da porre in evidenza come, per le esigenze specifiche, tali definizioni siano relative all'ambito unidimensionale.

$$\overline{P} = I \quad (2.3)$$

dove

\overline{P} : chiusura di P .

Il soddisfacimento di queste tre condizioni comporta anche una caratterizzazione del luogo di equilibrio dello stesso sistema dinamico in oggetto. In termini qualitativi (per maggiori dettagli si veda [32]), l'insieme dei punti che specifica tale luogo di equilibrio, detto attrattore/repulsore strano, è contenuto in I e, dunque, ivi limitato e non è decomponibile in luoghi d'equilibrio più semplici o elementari (dalla (2.A.1)), tale insieme è non numerabile (dalla (2.A.3)) ed, infine, le traiettorie di avvicinamento/allontanamento a/da tale luogo di equilibrio, a partire da due distinti stati iniziali del sistema arbitrariamente vicini, tendono a divergere, rimanendo comunque in I (dalla (2.A.2)). In particolare, questa ultima caratteristica ha evidenti riflessi applicativi poiché, se la dinamica di un sistema economico-finanziario è descrivibile mediante un sistema dinamico caotico noto, la conoscenza della traiettoria futura di tale sistema è indissolubilmente legata alla precisa conoscenza dello stato iniziale del sistema stesso. Una qualunque differenza, seppur piccola a piacere, del valore "misurato" dello stato iniziale da quello "vero", si rifletterà in una progressiva divergenza (seppur limitata) della traiettoria "calcolata" da quella "vera".

(2.B) *Classe di sistemi dinamici caotici*: sia dato un sistema dinamico continuo $f : I \rightarrow I$, con $I \subset \mathbf{R}$, e siano a, b, c e $d \in I$ quattro punti tali che $b = f(a)$, $c = f^2(a)$ e $d = f^3(a)$, i quali soddisfino

$$d \leq a < b < c \quad (\text{o} \quad d \geq a > b > c). \quad (2.4)$$

Allora

(2.B.1) in corrispondenza di ogni numero intero $k > 0$ esiste un punto periodico di periodo k appartenente a I ;

(2.B.2) esiste un insieme $S \subset I$, non numerabile e non contenente punti periodici, che soddisfa le seguenti condizioni:

(2.B.2.1) per tutti i punti $x, y \in S$, tali che $x \neq y$, si ha

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} |f^k(x) - f^k(y)| > 0 \quad (2.5)$$

e

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} |f^k(x) - f^k(y)| = 0; \quad (2.6)$$

(2.B.2.2) per ogni punto $x \in S$ e per ogni punto periodico $z \in I$ si ha

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} |f^k(x) - f^k(z)| > 0. \quad (2.7)$$

Questo risultato, dovuto a Li e Yorke ([22]), permette di identificare come classe di sistemi dinamici caotici nel senso prima specificato quella i cui componenti solamente siano continui (in I) e abbiano un punto periodico di periodo 3. In particolare, in tale classe è anche contenuta una delle sotto-famiglie di sistemi dinamici caotici più indagate in letteratura, quella delle mappe $f : [0, 1] \times [\mu_{\min}, \mu_{\max}] \rightarrow [0, 1]$ uni-dimensionali, uni-modali, non lineari e ad un parametro, tali che

$$f(0; \mu) = f(1; \mu) = 0 \quad (2.8)$$

dove

 $\mu \in [\mu_{\min}, \mu_{\max}]$: parametro,

e

$$f(x^*; \mu) = \max_{0 < x(t) < 1} \{f[x(t); \mu]\} \in [0, 1]. \quad (2.9)$$

È da porre in evidenza come il “regime dinamico” o, equivalentemente, il luogo d’equilibrio associato alle mappe appartenenti a tale sotto-famiglia, sia univocamente determinato dal valore assunto dal parametro μ , il quale, dunque, ricopre un ruolo cruciale. In particolare, all’aumentare del valore di tale parametro, il corrispondente “regime dinamico” o, equivalentemente, il corrispondente luogo d’equilibrio, diventa progressivamente più “complesso”, partendo dal “regime semplice”, caratterizzato dal punto fisso, passando per il “regime complesso”, caratterizzato dal ciclo limite e giungendo al “regime caotico”, caratterizzato dall’attrattore/repulsore strano (per maggiori dettagli si veda [25], [26] e [28])².

(2.C) *Esponente caratteristico di Lyapunov*: sia dato un sistema dinamico derivabile $f : I \rightarrow I$, con $I \subset \mathbf{R}$, e sia data una coppia di punti x ,

² Per questa ricchezza dei “regimi dinamici” assumibili, tali mappe sono anche denominate sistemi dinamici (deterministici) non lineari complessi.

$y \in I$. Si definisce esponente caratteristico di Lyapunov la seguente quantità (per maggiori dettagli si veda [2] e [28]):

$$\Lambda = \Lambda(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{y \rightarrow x} \frac{1}{k} \ln \frac{|f^k(x; \mu) - f^k(y; \mu)|}{|x - y|}. \quad (2.10)$$

Questo indicatore permette di quantificare, in media, la dipendenza di un generico sistema dinamico $f(\cdot; \cdot)$ dalle condizioni iniziali. In termini approssimati, infatti, si ha

$$|f^k(x; \mu) - f^k(y; \mu)| \cong |x - y| \exp(\Lambda k). \quad (2.11)$$

In particolare, le traiettorie che partono dai due distinti stati iniziali del sistema dinamico x e y arbitrariamente vicini tendono a convergere se $\Lambda < 0$, rimangono equidistanti se $\Lambda = 0$ e tendono a divergere se $\Lambda > 0$. Nel primo e nel secondo caso ($\Lambda < 0$ e $\Lambda = 0$) il sistema dinamico non mostra dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali ed ammette come luogo d'equilibrio, rispettivamente, un punto fisso ed un ciclo limite; nel terzo caso ($\Lambda > 0$) il sistema dinamico mostra dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali ed ammette come luogo d'equilibrio un attrattore/repulsore strano. È da porre in evidenza come, relativamente alle mappe uni-dimensionali, uni-modali, non lineari e ad un parametro introdotte in (2.B), l'esponente caratteristico di Lyapunov e, dunque, il "regime dinamico", sia funzione del parametro μ .

3. ASSUNTI ECONOMICO-FINANZIARI

Gli assunti economico-finanziari necessari per determinare quanto prospettato nella sezione 1. si sostanziano, dapprima, nella legge delle variazioni delle trasformazioni logaritmiche dei prezzi, successivamente, nella definizione di un criterio di formazione del valore dei prezzi ed, infine, nelle loro conseguenti implicazioni sulla ipotesi di efficienza del mercato dei capitali (nelle sue varie forme).

(3.A) *Legge delle variazioni delle trasformazioni logaritmiche dei prezzi*: si assume che tale legge sia descrivibile da una dinamica deterministica non lineare complessa; in particolare, si assume che sia descrivibile da una mappa

uni-dimensionale, uni-modale, non lineare e ad un parametro appartenente alla classe introdotta in (2.B). Poiché la determinazione del "regime dinamico" di una tale mappa è univocamente dovuta al valore assunto dal parametro μ , quest'ultimo si può intendere come una sorta di misura sintetica delle situazioni esogene alla specifica realtà finanziaria considerata, quali, ad esempio, quelle economiche, latamente finanziarie, politiche, sociali, ... e, poiché tali situazioni esogene sono mutabili nel tempo, anche lo stesso parametro μ (che ne è una sorta di misura sintetica) può risultare mutabile nel tempo o, equivalentemente, $\mu = \mu(t)$, con $\mu(\cdot) : [0, +\infty[\rightarrow [\mu_{\min}, \mu_{\max}]$ e con $\mu(\cdot) \in C^1$. Da ciò si ha la seguente legge delle variazioni delle trasformazioni logaritmiche dei prezzi:

$$x(t) = f[x(t-1); \mu(t)]. \quad (3.1)$$

È da notare come, poiché $x(t) \in [0, 1]$ e, ricordando la (1.2), poiché, in generale, $r_2(t, 1) \in [r_{2,\min}, r_{2,\max}]$, con $r_{2,\min} < r_{2,\max}$, risulti evidente la necessità di specificare la seguente biiezione tra la variabile $x(t)$ e la variabile $r_2(t, 1)$:

$$x(t) = \frac{r_2(t, 1) - r_{2,\min}}{r_{2,\max} - r_{2,\min}}. \quad (3.2.1)$$

In particolare, se, con evidente significato finanziario, si pone $r_{2,\min} = -1$ e $r_{2,\max} = 1$ dalla (3.2.1) si ha

$$x(t) = \frac{r_2(t, 1) + 1}{2} \quad (3.2.2)$$

o, equivalentemente,

$$r_2(t, 1) = 2x(t) - 1 \quad (3.2.3)$$

e

$$P(t) = P(t-1) \exp \left\{ 2f \left\{ \frac{\ln[P(t-1)] - \ln[P(t-2)] + 1}{2}; \mu(t) \right\} - 1 \right\} \stackrel{def}{=} (3.3.1)$$

$$\stackrel{def}{=} G[P(t-1), P(t-2); \mu(t)] \stackrel{def}{=} (3.3.2)$$

$$\stackrel{def}{=} F[P(t-1); \mu(t)] \quad (3.3.3)$$

dove

$G[\cdot, \cdot; \cdot], F[\cdot; \cdot]$: funzioni che preservano la non linearità complessa della $f(\cdot; \cdot)$, con $F[\cdot; \cdot] \in C^1$ (per la dimostrazione si veda l'APPENDICE A).

È anche da porre in evidenza come l'assunzione di una legge deterministica, anziché stocastica, per le variazioni delle trasformazioni logaritmiche dei prezzi non si traduca *sic et simpliciter* nell'automatico annullamento dell'incertezza relativa alla conoscenza dei valori delle variazioni stesse. Infatti, in questo approccio si hanno, almeno, le due seguenti fonti di incertezza³:

(3.A.1) quella associabile alla non precisa conoscenza del parametro $\mu(t)$ a causa della sua natura di misura sintetica delle situazioni esogene alla specifica realtà finanziaria considerata;

(3.A.2) quella associabile alla non precisa conoscenza del valore della condizione iniziale $x(t_0) = [r_2(t_0, 1) + 1]/2$ a causa di quanto si specifica in (3.B).

In particolare, la prima fonte di incertezza ha un uguale "impatto" sulla conoscenza dei valori delle variazioni delle trasformazioni logaritmiche dei prezzi quale che sia il "regime dinamico" (semplice o complesso o caotico) dello specifico sistema finanziario considerato, mentre l'analogo "impatto" della seconda fonte di incertezza è minimo per un "regime dinamico" semplice (caratterizzato da un $\Lambda < 0$)⁴, è intermedio per un "regime dinamico" complesso (caratterizzato da un $\Lambda = 0$), è massimo per un "regime dinamico" caotico (caratterizzato da un $\Lambda > 0$), unico regime in corrispondenza del quale il sistema dinamico mostra dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali.

(3.B) *Definizione di un criterio di formazione del valore del prezzo*: si assume che tale criterio sia definibile in funzione di un dato insieme di informazioni e si assume che quest'ultimo insieme possa variare in funzione dell'"ente economico" che lo detiene, a causa del differente grado di accessibilità alle informazioni rilevanti disponibili (sia pubbliche sia private) che ognuno di questi "enti" ha. In particolare, poiché l'insieme completo delle informazioni rilevanti disponibili

$$\Phi^*(t - 1) \tag{3.4}$$

dove

³ Tali fonti di incertezza possono essere formalizzate mediante, ad esempio, i metodi e gli strumenti propri dell'ambito stocastico, della logica sfocata, ...

⁴ Tale impatto è nullo asintoticamente.

$\Phi^*(t-1) \supseteq \bigcup_{i=1}^N \Phi^i(t-1)$, con N numero degli "enti" operatori economici e con $\Phi^i(t-1)$ insieme delle informazioni aggiuntive rilevanti disponibili all' i -esimo operatore al momento $t-1$ (per maggiori dettagli si veda il proseguio), è relativo al momento $t-1$, il prezzo della specificata attività finanziaria al momento t risulta non noto.

Relativamente all'"ente economico" mercato, ovvero a quell'istituto le cui determinazioni vengono assunte come punti di riferimento dagli operatori economici, si ha il seguente criterio di formazione del valore dei prezzi:

$$P^M(t) = g^M[\Phi^M(t-1)] \quad (3.5)$$

dove

$P^M(t)$: prezzo inferito dal "mercato" della specifica attività finanziaria considerata al momento t ed inferibile da ogni operatore economico in funzione dell'insieme delle informazioni rilevanti disponibili pubbliche $\Phi^M(t-1)$,

$\Phi^M(t-1) \subset \Phi^*(t-1)$: insieme, noto, delle informazioni rilevanti disponibili al mercato, relativo al momento $t-1$,

$g^M[\cdot]$: funzione di formazione del prezzo di mercato.

È da porre in evidenza come, per la specificazione $\Phi^M(t-1) \subset \Phi^*(t-1)$, ovvero per l'impossibilità che ha l'"ente economico" mercato di accedere a tutte le informazioni rilevanti disponibili e, dunque, di conoscere con precisione il valore del parametro $\mu(t)$, si abbia

$$P(t) - P^M(t) = d^M(t), \quad \forall t \quad (3.6)$$

dove

$$d^M(t) \in [d_{\min}^M, 0[\cup]0, d_{\max}^M].$$

A loro volta, gli "enti" operatori economici, assunte come punto di riferimento le determinazioni del mercato ($P^M(t)$, $\Phi^M(t-1)$ e $g^M[\cdot]$), definiscono razionalmente il seguente criterio di formazione del valore dei prezzi:

$$P^i(t) = g^i[\Phi^M(t-1) \cup \Phi^i(t-1)] \quad (3.7)$$

dove

$P^i(t)$: prezzo relativo all' i -esimo operatore della specifica attività finanziaria considerata al momento t ,

$\Phi^i(t-1)$: insieme delle informazioni aggiuntive rilevanti disponibili all' i -esimo operatore, relativo al momento $t-1$, con $\Phi^i(t-1) \not\subseteq \Phi^M(t-1)$,
 $g^i[\cdot] = h\{g^M[\cdot], \Phi^i(t-1)\}$: funzione di formazione del prezzo relativa all' i -esimo operatore.

In particolare, se $\Phi^i(t-1) = \emptyset$, ovvero se l' i -esimo operatore non dispone di informazioni aggiuntive, allora

$$P^i(t) = P^M(t) \quad \forall t \quad (3.8)$$

o, equivalentemente,

$$g^i[\Phi^M(t-1)] = g^M[\Phi^M(t-1)] \quad \forall t, \quad (3.9)$$

se, invece, $\Phi^i(t-1) \neq \emptyset$ e $\Phi^i(t-1) \subset \Phi^*(t-1)$ e $\Phi^i(t-1) \neq \Phi^*(t-1) \setminus \Phi^M(t-1)$, ovvero l' i -esimo operatore dispone di alcune informazioni aggiuntive rilevanti, allora si ha

$$P(t) - P^i(t) = d^i(t) \quad \forall t \quad (3.10)$$

dove

$d^i(t) \in [d_{\min}^i, d_{\max}^i]$, con $d_{\min}^M < d_{\min} \leq 0 \leq d_{\max} < d_{\max}^M$

e, per la razionalità degli operatori economici, ovvero per la loro capacità di inferire dei valori del prezzo non "peggiori" all'aumentare della "quantità" di informazioni aggiuntive rilevanti loro disponibili, si ha

$$\Phi^i(t-1) \subset \Phi^j(t-1) \iff |d^i(t)| \geq |d^j(t)| \quad \forall t \quad (3.11)$$

con $i \neq j$

e se, infine, $\Phi^i(t-1) \neq \emptyset$ e $\Phi^i(t-1) \subset \Phi^*(t-1)$ e $\Phi^*(t-1) = \Phi^*(t-1) \setminus \Phi^M(t-1)$, ovvero l' i -esimo operatore dispone di tutte le informazioni aggiuntive, allora si ha

$$P(t) - P^i(t) = \min_{\Phi^i} [d^i(t)] \geq 0 \quad \forall t. \quad (3.12)$$

È da notare come le varie funzioni di formazione del prezzo precedentemente introdotte ($g^M[\cdot]$ e $g^i[\cdot]$) determinino, seppur implicitamente, anche i valori di tutte le quantità utili per la formazione del prezzo stesso, quali, ad esempio, $\mu(t)$. È anche da porre in evidenza come la definizione di un tale criterio di formazione del prezzo comporti la non precisa conoscenza del valore

della condizione iniziale per la (3.1) da parte dell' i -esimo investitore, cioè come si abbia

$$x^i(t_0) - x(t_0) = c^i(t_0) \quad (3.14)$$

dove

$x^i(t_0)$: valore della condizione iniziale disponibile all' i -esimo investitore,
 $c^i(t_0) = \ln\{[P(t_0) - d^i(t_0)][P(t_0 - 1)]/[P(t_0 - 1) - d^i(t_0 - 1)][P(t_0)]\}/2$ (per la dimostrazione si veda l'APPENDICE B).

La seconda di queste due ultime specificazioni quantifica l'incertezza di cui al punto (3.A.2).

(3.C) *Implicazioni sulla ipotesi di efficienza del mercato dei capitali*: le implicazioni su tale ipotesi conseguenti dagli assunti introdotti in (3.A) ed in (3.B) si possono variamente sostanziare. In particolare, se, banalmente, $\Phi^i(t - 1) = \emptyset$ per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$, dove N è la numerosità degli operatori economici, ovvero se ogni operatore non dispone di informazioni aggiuntive, allora, per le (3.7), (3.9) e (3.5), si ha

$$P^i(t) = g^i[\Phi^M(t - 1) \cup \emptyset] = g^i[\Phi^M(t - 1)] = g^M[\Phi^M(t - 1)] = P^M(t) \quad (3.15)$$

o, equivalentemente, si ha l'accettazione dell'ipotesi di efficienza del mercato dei capitali; se invece, più realisticamente, $\Phi^i(t - 1) \neq \emptyset$ per almeno un $i \in \{1, \dots, N\}$, ovvero se almeno un operatore dispone di alcune o di tutte le informazioni aggiuntive, allora per quell' i -esimo operatore, per le (3.7), (3.10) e (3.5), si ha

$$P^i(t) = g^i[\Phi^M(t - 1) \cup \Phi^i(t - 1)] \neq g^M[\Phi^M(t - 1)] = P^M(t) \quad (3.16)$$

o, equivalentemente, si ha il rifiuto dell'ipotesi di efficienza del mercato dei capitali. È da porre in evidenza come si abbia l'accettazione od il rifiuto dell'ipotesi di efficienza del mercato dei capitali nella forma (o debole o semi-forte o forte) implicata dalla tipologia delle informazioni contenute in $\Phi^M(t - 1)$.

4. DINAMICA DEL VALORE DI EQUILIBRIO DI UNA OPZIONE CALL DI TIPO EUROPEO

In questa sezione si ricava un'equazione differenziale alle derivate parziali che descrive la dinamica del valore d'equilibrio (parziale) di una opzione call di tipo europeo nell'ipotesi in cui la legge delle variazioni delle trasformazioni logaritmiche dei prezzi sia descrivibile da una mappa appartenente alla classe introdotta in (3.A). In particolare, per la determinazione di tale equazione, oltre agli assunti economico-finanziari introdotti in (3.A), (3.B) e (3.C), sono anche necessari i seguenti assunti "classici" relativi agli aspetti topici delle attività finanziarie, delle opzioni e del mercato:

(4.A) le attività finanziarie non producono flussi derivati quali, ad esempio, i dividendi,

(4.B) l'assenza dei costi di transazione e dell'imposizione fiscale sia per le attività finanziarie che per le opzioni,

(4.C) l'impossibilità di effettuare arbitraggi,

(4.D) le contrattazioni avvengono con continuità nel tempo,

(4.E) l'intensità istantanea di rendimento di una attività finanziaria priva di rischio è nota ed è costante nel tempo,

(4.F) è possibile ricevere in prestito ammontari di danaro al tasso di interesse di una attività finanziaria priva di rischio,

(4.G) è possibile vendere allo scoperto le attività finanziarie.

Dato quanto da ultimo premesso, dalla (3.3.3) si ha la seguente dinamica del valore del prezzo⁵:

$$dP(t) = dF = \frac{\partial F}{\partial \mu(t)} d\mu(t) + \frac{\partial F}{\partial P(t-1)} dP(t-1). \quad (4.1)$$

È da porre in evidenza come, nella derivazione della (4.1), il parametro $\mu(t)$ sia stato considerato come una variabile deterministica, questo per la sua natura di misura sintetica delle situazioni esogene alla specifica realtà finanziaria considerata e, dunque, mutabile nel tempo, come specificato in (3.A).

⁵ Da qui in poi, per una maggiore semplicità notazionale, si omettono gli argomenti della $F[\mu(t); P(t-1)]$, peraltro reintroducendoli ogni qual volta tale omissione possa ingenerare ambiguità.

Invece, relativamente alla legge che definisce il valore della opzione call di tipo europeo, si ha

$$C_t = C[t, P(t)] = C\{t, F[\mu(t); P(t-1)]\}, \quad (4.2)$$

dove

$C\{\cdot, \cdot\}$: funzione che preserva la non linearità complessa della $F[\cdot; \cdot]$, con $C\{\cdot, \cdot\} \in \mathcal{C}^1$ e, classicamente, con $\partial C_t / \partial t < 0$ e $\partial C_t / \partial P(t) > 0$,

dalla quale è possibile ottenere il seguente differenziale totale:

$$dC_t = \frac{\partial C_t}{\partial t} dt + \frac{\partial C_t}{\partial P(t)} dP(t) = \frac{\partial C_t}{\partial t} dt + \frac{\partial C_t}{\partial P(t)} dF. \quad (4.3)$$

Sostituendo la (4.1) nella (4.3) si ha

$$dC_t = \frac{\partial C_t}{\partial t} dt + \frac{\partial C_t}{\partial P(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial \mu(t)} d\mu(t) + \frac{\partial F}{\partial P(t-1)} dP(t-1) \right]. \quad (4.4)$$

Ora, si considera un portafoglio composto da N_P lotti minimi di acquisto della specifica attività finanziaria considerata, con N_P non noto, e da N_C lotti minimi di acquisto di opzioni call relative alla stessa attività finanziaria, con N_C noto, portafoglio per il quale si ha il seguente valore:

$$W_t = N_P P(t) + N_C C_t. \quad (4.5)$$

Dalla (4.5) è possibile ottenere la seguente dinamica

$$dW_t = N_P dP(t) + N_C dC_t. \quad (4.6)$$

Sostituendo la (4.1) e la (4.3) nella (4.6) si ha

$$dW_t = N_P \left[\frac{\partial F}{\partial \mu(t)} d\mu(t) + \frac{\partial F}{\partial P(t-1)} dP(t-1) \right] + N_C \left\{ \frac{\partial C_t}{\partial t} dt + \frac{\partial C_t}{\partial P(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial \mu(t)} d\mu(t) + \frac{\partial F}{\partial P(t-1)} dP(t-1) \right] \right\} = \quad (4.7.1)$$

$$= N_C \frac{\partial C_t}{\partial t} dt + \left[N_P \frac{\partial F}{\partial \mu(t)} + N_C \frac{\partial C_t}{\partial P(t)} \frac{\partial F}{\partial \mu(t)} \right] d\mu(t) + \left[N_P \frac{\partial F}{\partial P(t-1)} + N_C \frac{\partial C_t}{\partial P(t)} \frac{\partial F}{\partial P(t-1)} \right] dP(t-1). \quad (4.7.2)$$

Questa dinamica del valore del portafoglio dipende funzionalmente anche dalle due fonti di incertezza introdotte, rispettivamente, in (3.A.1), ovvero dalla non precisa conoscenza del parametro $\mu(t)$, ed in (3.A.2), ovvero dalla non precisa conoscenza del valore della condizione iniziale $x(t_0)$ a causa della non precisa conoscenza del prezzo “vero” $P(t_0)$ da parte dell’ i -esimo investitore. Al fine di annullare l’impatto su tale dinamica di una delle due fonti di incertezza, si determina il numero di lotti minimi di acquisto della specifica attività finanziaria da detenere nel portafoglio stesso per azzerare il coefficiente che pesa la variazione della prescelta fonte di incertezza. In particolare, per azzerare il coefficiente che pesa la variazione del parametro $\mu(t)$, tale determinazione si ottiene ponendo

$$N_P \frac{\partial F}{\partial \mu(t)} + N_C \frac{\partial C_t}{\partial P(t)} \frac{\partial F}{\partial \mu(t)} = 0 \quad (4.8)$$

da cui si ha la seguente soluzione:

$$N_P^{d\mu(t)} = -N_C \frac{\partial C_t}{\partial P(t)}, \quad (4.9)$$

mentre, per azzerare il coefficiente che pesa la variazione del prezzo $P(t-1)$, tale determinazione si ottiene ponendo

$$N_P \frac{\partial F}{\partial P(t-1)} + N_C \frac{\partial C_t}{\partial P(t)} \frac{\partial F}{\partial P(t-1)} = 0 \quad (4.10)$$

da cui si ha la seguente soluzione:

$$N_P^{dP(t-1)} = -N_C \frac{\partial C_t}{\partial P(t)}. \quad (4.11)$$

È da porre in evidenza come le due distinte determinazioni $N_P^{d\mu(t)}$ e $N_P^{dP(t-1)}$ siano identiche, da cui sostituendo la (4.9) o, equivalentemente, la (4.11) nella (4.5), mediante alcuni elementari passaggi algebrici, si ha

$$W_t = N_C \left[-\frac{\partial C_t}{\partial P(t)} P(t) + C_t \right] \quad (4.12)$$

e, sostituendo la (4.9) o, equivalentemente, la (4.11) nella (4.7.2) si ha

$$dW = N_C \frac{\partial C_t}{\partial t} dt. \quad (4.13)$$

Ora, la dinamica del portafoglio così immunizzato, al fine di evitare la possibilità di arbitraggi, deve replicare la dinamica di una attività finanziaria priva di rischio, cioè si deve avere

$$\frac{dW_t}{W_t} = \delta dt \quad (4.14)$$

dove

δ : intensità istantanea di rendimento di una attività finanziaria priva di rischio.

Sostituendo la (4.12) e la (4.13) nella (4.14) si ha

$$\frac{(\partial C_t / \partial t) dt}{-P(t)(\partial C_t / \partial P(t)) + C_t} = \delta dt \quad (4.15)$$

da cui, infine, si ricava la seguente dinamica del valore d'equilibrio (parziale) di una opzione call di tipo europeo:

$$\frac{\partial C_t}{\partial t} = \delta C_t - \delta P(t) \frac{\partial C_t}{\partial P(t)} \quad \left(\circ \quad \frac{\partial C_t}{\partial t} - \delta C_t + \delta P(t) \frac{\partial C_t}{\partial P(t)} = 0 \right). \quad (4.16)$$

È da porre in evidenza come tale equazione differenziale alle derivate parziali differisca da quella proposta per la stessa dinamica da Black e Scholes ([3]) per l'ulteriore "presenza addizionale" in questa ultima di un termine di secondo grado. Inoltre, poiché vale la seguente relazione

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial C_t}{\partial t} - \delta C_t + \delta P(t) \frac{\partial C_t}{\partial P(t)} - \frac{1}{2} \sigma^2 [P(t)]^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial [P(t)]^2} \right\} = \\ = \frac{\partial C_t}{\partial t} - \delta C_t + \delta P(t) \frac{\partial C_t}{\partial P(t)} = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

dove

$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \{ \cdot \}$: limite il cui argomento specifica la dinamica ottenuta da Black e Scholes,

σ : scarto quadratico medio di un processo stocastico del tipo moto Browniano standard che, secondo le ipotesi assunte da Black e Scholes, descrive le variazioni delle trasformazioni logaritmiche dei prezzi,

è possibile verificare come anche la soluzione della (4.16) si possa ottenere come il limite, per σ tendente a 0, della corrispondente soluzione ricavata da Black e Scholes (per maggiori dettagli si veda la sezione 5. e l'APPENDICE C).

5. SOLUZIONE DELLA (4.16)

In questa sezione si determina la soluzione dell'equazione differenziale quasi lineare ([13]) non omogenea alle derivate parziali del primo ordine (4.16) che descrive la dinamica del valore d'equilibrio (parziale) di una opzione di tipo europeo. A tal fine è opportuno riesprimere la (4.16) stessa nella seguente forma:

$$Q[C_t, P(t), t] = R[C_t, P(t), t] \frac{\partial C_t}{\partial P(t)} + S[C_t, P(t), t] \frac{\partial C_t}{\partial t} \quad (5.1)$$

dove

$$\begin{aligned} Q[C_t, P(t), t] &= \delta C_t, \\ R[C_t, P(t), t] &= \delta P(t), \\ S[C_t, P(t), t] &= 1. \end{aligned}$$

Ora, assunta la continuità della $Q[C_t, P(t), t] = \delta C_t$ in $[0, T] \times \mathbf{R}_0^+$, data, per le (3.1) e (3.3.1), la continuità della $R[C_t, P(t), t] = \delta P(t)$ in \mathbf{R}_0^+ , data, banalmente, la continuità della $S[C_t, P(t), t] = 1$ e dato, per la terza specificazione della (5.1), il non simultaneo annullamento delle $Q[\cdot, \cdot, \cdot]$, $R[\cdot, \cdot, \cdot]$ e $Q[\cdot, \cdot, \cdot]$, mediante l'integrazione del sistema ausiliario di Lagrange di equazioni differenziali ordinarie, si ha la seguente soluzione generale della (4.16) espressa in forma esplicita rispetto alla C_t (per maggiori dettagli si veda [13]):

$$C_t = H\{P(t) \exp[\delta(T-t)]\} \exp[-\delta(T-t)] \quad (5.2)$$

dove

$H[\cdot]$: funzione arbitraria.

È da notare come, al momento $t = T$, debba essere rispettata la seguente condizione finale:

$$C_T = H[P(T)] = \max\{0, P(T) - X\} \quad (5.3)$$

dove

X : prezzo di esercizio della opzione call di tipo europeo.

È anche da porre in evidenza come sia possibile determinare una interessante soluzione particolare della (4.16) calcolando, in analogia a quanto posto in evidenza nella (4.17), il limite, per σ che tende a 0, della soluzione particolare

determinata da Black e Scholes per la loro equazione differenziale alle derivate parziali. Dal calcolo di tale limite si ha

$$C_t = \begin{cases} 0 & \text{se } P(t) \leq X \exp[-\delta(T-t)] \\ P(t) - X \exp[-\delta(T-t)] & \text{se } P(t) > X \exp[-\delta(T-t)] \end{cases} \quad (5.4)$$

(per la dimostrazione si veda l'APPENDICE C) che determina la specificazione lineare della arbitraria $H[\cdot]$, specificazione lineare la cui sola apparente semplicità non deve trarre in inganno, date le peculiarità della dinamica che descrive la legge di evoluzione del prezzo $P(t)$.

6. OSSERVAZIONI E CONSIDERAZIONI FINALI

In questa sezione si presentano le seguenti osservazioni e considerazioni finali relative sia agli assunti economico-finanziari che ai risultati ottenuti:

(6.A) l'assunzione di un criterio di formazione del valore del prezzo definibile in funzione di un dato insieme di informazioni, insieme variabile in funzione dell'"ente economico" che lo detiene e, dunque, l'assunzione dell'ipotesi di non omogeneità informativa degli operatori economici, risulta rappresentare questo specifico aspetto della realtà economico-finanziaria più realisticamente di quanto non lo sia dalla "classica" assunzione dell'ipotesi di omogeneità informativa;

(6.B) le implicazioni sulla ipotesi di efficienza del mercato dei capitali conseguenti dagli assunti economico-finanziari introdotti in (3.A) ed in (3.B) si possono variamente sostanziare ("classica" accettazione o "più realistico" rifiuto della ipotesi stessa), la qual cosa risulta evidenziare la generalità di un tale sistema di assunti, che permette di rappresentare distinte ed incompatibili modalità di uno stesso aspetto della realtà economico-finanziaria;

(6.C) interessanti particolarizzazioni della arbitraria funzione $H[P(t)]$, soluzione generale della (4.16), sono quelle che possono permettere il "controllo" (in forma, ovviamente, non banale) dell'impatto della dinamica che descrive la legge di evoluzione del prezzo $P(t)$ sul valore della opzione C_t .

APPENDICE A

Sostituendo la prima delle due specificazioni della (3.1) nella stessa (3.1) si ha

$$\frac{\ln[P(t)] - \ln[P(t-1)] + 1}{2} = f \left\{ \frac{\ln[P(t-1)] - \ln[P(t-2)] + 1}{2}; \mu(t) \right\}, \quad (A.1)$$

dalla quale, mediante alcuni elementari passaggi, si ha

$$\ln \left[\frac{P(t)}{P(t-1)} \right] = 2f \left\{ \frac{\ln[P(t-1)] - \ln[P(t-2)] + 1}{2}; \mu(t) \right\} - 1, \quad (A.2)$$

dalla quale infine si ottiene

$$P(t) = P(t-1) \exp \left\{ 2f \left\{ \frac{\ln[P(t-1)] - \ln[P(t-2)] + 1}{2}; \mu(t) \right\} - 1 \right\}. \quad (A.3)$$

APPENDICE B

Sostituendo la prima delle due specificazioni della (3.1) nella (3.14) si ha

$$c^i(t_0) = \frac{[r_2^i(t_0, 1) + 1]}{2} - \frac{[r_2(t_0, 1) + 1]}{2} = \frac{1}{2} [r_2^i(t_0, 1) - r_2(t_0, 1)] \quad (B.1)$$

dove

$r_2^i(t_0, 1)$: valore della variazione iniziale delle trasformazioni logaritmiche dei prezzi.

Sostituendo la (1.2) nella (B.1) si ha

$$c^i(t_0) = \frac{1}{2} \{ \ln[P^i(t_0)] - \ln[P^i(t_0 - 1)] - \ln[P(t_0)] + \ln[P(t_0 - 1)] \}. \quad (B.2)$$

Dalla (3.10) è possibile ottenere la seguente relazione

$$P^i(t_0) = P(t_0) - d^i(t_0). \quad (B.3)$$

Ora, sostituendo la (B.3) nella (B.2) si ottiene la seconda specificazione della (3.14), cioè si ha

$$\begin{aligned} c^i(t_0) &= \frac{1}{2} \{ \ln[P(t_0) - d^i(t_0)] - \ln[P(t_0 - 1) - d^i(t_0)] - \ln[P(t_0)] + \ln[P(t_0 - 1)] \} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{[P(t_0) - d^i(t_0)]P(t_0 - 1)}{[P(t_0 - 1) - d^i(t_0 - 1)]P(t_0)} \right\}. \end{aligned} \quad (B.4)$$

APPENDICE C

Data la soluzione particolare determinata da Black e Scholes per la loro equazione differenziale alle derivate parziali

$$C_t = \Phi_N(d_1)P(t) - \Phi_N(d_2)X \exp[-\delta(T-t)] \quad (C.1)$$

dove

$\Phi_N(\cdot)$: funzione di ripartizione di una variabile casuale normale standardizzata,
 $d_1 = \{\ln[P(t)/X] + (\delta + \sigma^2/2)(T-t)\} / \sigma\sqrt{T-t} = \{\ln[P(t)/X] + \delta(T-t)\} / \sigma\sqrt{T-t} + (\sigma/2)\sqrt{T-t}$,

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

si ha, mediante alcuni elementari passaggi,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} C_t = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \Phi_N(d_1)P(t) - \lim_{\sigma \rightarrow 0} \Phi_N(d_1 - \sigma\sqrt{T-t})X \exp[-\delta(T-t)]. \quad (C.2)$$

In particolare, calcolando il limite del primo addendo del secondo membro, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \Phi_N(d_1)P(t) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \Phi_N \left\{ \frac{\ln[P(t)/X] + \delta(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{\sigma}{2}\sqrt{T-t} \right\} P(t) = \\ &= \begin{cases} \Phi_N(-\infty)P(t) & \text{se } \ln[P(t)/X] + \delta(T-t) \leq 0 \\ \Phi_N(+\infty)P(t) & \text{se } \ln[P(t)/X] + \delta(T-t) > 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 0P(t) = 0 & \text{se } \ln[P(t)/X] + \delta(T-t) \leq 0 \\ 1P(t) = P(t) & \text{se } \ln[P(t)/X] + \delta(T-t) > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (C.3)$$

dove

$$\ln[P(t)/X] + \delta(T-t) \leq 0 \Rightarrow P(t) \leq X \exp[-\delta(T-t)],$$

$$\ln[P(t)/X] + \delta(T-t) > 0 \Rightarrow P(t) > X \exp[-\delta(T-t)],$$

mentre, calcolando il limite del secondo addendo del secondo membro, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \Phi_N(d_1 - \sigma\sqrt{T-t})X \exp[-\delta(T-t)] &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \Phi_N(d_1)X \exp[-\delta(T-t)] = \\ &= \begin{cases} \Phi_N(-\infty)X \exp[-\delta(T-t)] & \text{se } \ln[P(t)/X] + \delta(T-t) \leq 0 \\ \Phi_N(+\infty)X \exp[-\delta(T-t)] & \text{se } \ln[P(t)/X] + \delta(T-t) > 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 0X \exp[-\delta(T-t)] = 0 & \text{se } \ln[P(t)/X] + \delta(T-t) \leq 0 \\ 1X \exp[-\delta(T-t)] = X \exp[-\delta(T-t)] & \text{se } \ln[P(t)/X] + \delta(T-t) > 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (C.4)$$

Ora, sostituendo le (C.3) e (C.4) nella (C.2) si ottiene la (5.4).

BIBLIOGRAFIA

- [1] AKGIRAY V., BOOTH G., "The Stable-Law Model of Stock Returns", *Journal of Business & Economic Statistics*, 6, 1988, pp. 51-57.
- [2] BENETTIN G., GALGANI L., STRELCYN J. M., 1976, "Kolmogorov Entropy and Numerical Experiments", *Physical Review A*, in HAO, B.-L. (ed.) 1984 *Chaos*, World Scientific Publishing, Singapore, pp. 411-418.
- [3] BLACK F., SCHOLES M., "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, 1973, pp. 637-659.
- [4] BOOTH G. G., MARTIKAINEN T., SARKAR S. S., VIRTANEN I., YLI-OLLI P., "Nonlinear Dependence in Finnish stock Returns", lecture presentata all'*EURO Working Group on Financial Modelling*, 12th Meeting, Helsinki, 1992.
- [5] BRASOLIN A., CORAZZA M., NARDELLI C., "Autosimilarità e Comportamento Non Lineare di un Indice Azionario nel Mercato Italiano", *Atti del XVI Convegno A.M.A.S.E.S.*, Treviso, 1992, pp. 155-170.
- [6] CANESTRELLI E., NARDELLI C., "Distribuzioni Stabili di Lévy dei Rendimenti nel Mercato Azionario Italiano", *Atti del XV Convegno A.M.A.S.E.S.*, Grado, 1991, pp. 145-158.
- [7] CASTAGNOLI E., *Aspetti introduttivi delle Opzioni Finanziarie*, Cooperativa di Cultura "Lorenzo Milani", Milano, 1988.
- [8] COOTNER P., 1963, "Comments on the Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*, in COOTNER, P. H. (ed.), 1964, *The Random Character of Stock Market Prices*, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, pp. 333-337.
- [9] CORAZZA M., MALLIARIS A. G., NARDELLI C., 1993, "Searching for Fractal Structure in Agricultural Futures Market", lecture presentata all'*EURO Working Group on Financial Modelling*, 14th Meeting, Mantova.
- [10] CORAZZA M., NARDELLI C., "Analisi della Struttura Frattale del Mercato Finanziario Italiano", *Rendiconti del Comitato per gli Studi Economici*, XXX-XXXI, 1993, pp. 171-186.

- [11] CORAZZA M., NARDELLI C., "Fenomeno della Dipendenza a Lungo Termine nel Mercato Finanziario Italiano", *Atti del XVII Convegno A.M.A.S.E.S.*, Ischia, 1993, pp. 359-382.
- [12] DEVANEY R. L., *An Introduction to Chaotic Dynamical System*. The Benjamin/Cummings Publishing, Menlo Park, 1986.
- [13] ELSGOLTS L.E., *Equazioni Differenziali e Calcolo delle Variazioni*. Editori Riuniti, Roma, 1981.
- [14] FAMA E. F., 1963, "Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis", *Journal of Business*, in COOTNER, P. H. (ed.) 1964 *The Random Character of Stock Market Prices*, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, pp. 297-306.
- [15] FAMA E. F., "Efficient Capital Markets: II", *The Journal of Finance*, XLVI, 5, 1991, pp. 1575-1617.
- [16] FIELITZ B. D., SMITH E. W., "Asymmetric Stable Distributions of Stock Price Changes", *Journal of the American Statistical Association*, 67, 1972, pp. 340, 813-814.
- [17] FIELITZ B. D., ROZELLE J. P., "Stable Distributions and the Mixtures of Distributions Hypotheses for Common Stock Returns", *Journal of the American Statistical Association*, 78, 1983, pp. 381, 28-36.
- [18] GREENE M. T., FIELITZ B. D., "Long-term Dependence in Common Stock Returns", *J. of Fin. Econ.*, 4, 1977, pp. 339-349.
- [19] HELMS B. P., KAEN F.R., ROSENMAN R. E., "Memory in Commodity Futures Contracts", *The Journal of Future Market*, 4, 4, 1985, pp. 559-567.
- [20] HELMS B. P., MARTELL T. F., "An Examination of the Distribution of Futures Price Changes", *The Journal of Futures Markets*, 5, 2, 1985, pp. 259-272.
- [21] LEITCH R. A., PAULSON A. S., "Estimation of Stable Law Parameters: Stock Price Behavior Application", *Journal of the American Statistical Association*, 70, 1975, pp. 351, 690-697.
- [22] LI T. Y., YORKE J. A., 1975, "Period Three implies Chaos", *American Mathematical Monthly*, in HAO, B.-L. (ed.) 1984 *Chaos*, World Scientific Publishing, Singapore, pp. 244-251.

- [23] LO A. W., "Long-term Memory in Stock Market Prices", *Econometrica*, 59, 5, 1991, pp. 1279-1313.
- [24] MANDELBROT B. B., 1963, "The Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*, in COOTNER, P. H. (ed.) 1964 *The Random Character of Stock Market Prices*, The M.I.T Press, Cambridge, Massachusetts, pp. 307-332.
- [25] MAY R. M., 1976, "Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics", *Nature*, in HAO, B.-L. (ed.) 1984 *Chaos*, World Scientific Publishing, Singapore, pp. 149-157.
- [26] MAY R. M., OSTER G. F., 1976, "Bifurcations and Dynamic Complexity in Simple Ecological Models", *The American Naturalist*, 110, 974, pp. 573-599.
- [27] MALLIARIS A. G., PHILIPPATOS G., "Random Walk vs. Chaotic Dynamics in Financial Economics", comunicazione personale, 1992.
- [28] MEDIO A., *Chaotic Dynamics. Theory and Applications to Economics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [29] PETERS E. E., *Chaos and Order in the Capital Market*, J. Wiley, New-York, 1991.
- [30] PETERS E. E., *Fractal Market Analysis*, J. Wiley, New-York, 1994.
- [31] ROZELLE J., FIELITZ B., "Skewness in Common Stock Returns", *The Financial Review*, 15, 1, 1980, pp. 1-23.
- [32] RUELE D., "Strange Attractors", *Mathematical Intelligencer*, 2, 1979, pp. 126-137.
- [33] SIMKOWITZ M., BEEDLES W., "Asymmetric Stable Distributed Security Returns", *Journal of the American Statistical Association*, 75, 1980, pp. 306-312.
- [34] WALTER C., "Lévy Stable Distributions and Fractal Structure on the Paris Market", *1st A.F.I.R. International Colloquium*, Paris, 3, 1990, pp. 242-259.