UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI VENEZIA

Marco Corazza - Fabio Tegon

LA GESTIONE DEL RISCHIO DI TASSO NELLE COMPAGNIE ASSICURATIVE VITA

n. 92/2001

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA APPLICATA

LA GESTIONE DEL RISCHIO DI TASSO NELLE COMPAGNIE ASSICURATIVE VITA

Marco Corazza
Dipartimento di Matematica Applicata - Università "Ca' Foscari" di Venezia

Fabio Tegon

Indice

1. Considerazioni introduttive

Gli interventi teorici in tema di copertura dal rischio di tasso d'interesse, o *interest rate risk*, sono assai numerosi nella letteratura economica della seconda metà del Novecento. Come noto, in generale il controllo dell'*interest rate risk* si traduce, per il gestore di un portafoglio, in una serie di attività volte a preservare il valore del portafoglio stesso, in risposta alle oscillazioni aleatorie della struttura per scadenza dei tassi d'interesse. Va rilevato, tuttavia, che l'impianto teorico proposto sul tema ha spesso manifestato una ridotta utilità operativa, dovuta principalmente alle ipotesi particolarmente stringenti (e, sfortunatamente, poco realistiche) che ne caratterizzavano gli scenari di applicazione.

Nelle pagine che seguono ci proponiamo pertanto di fornire una rappresentazione, quanto più vicina possibile alla realtà economica, dei problemi connessi alla gestione dell'*interest rate risk* nell'ambito delle tematiche attuariali. Nel perseguire tale obiettivo, l'ambito di studio in cui si concentrerà l'attenzione sarà quello delle compagnie d'assicurazione del ramo vita, in cui il problema della gestione del rischio d'interesse assume una connotazione particolare, date le peculiarità delle imprese assicurative in rapporto ad altre categorie di intermediari.

Sotto tali premesse, il presente lavoro è strutturato in modo da fornire innanzitutto una rappresentazione chiara del problema in esame, sulla base della quale sia possibile ricavare alcuni principi di comportamento per la gestione del rischio di tasso in ambito stocastico. A tale scopo, si farà esplicito riferimento ai dettami della cosiddetta teoria dell'immunizzazione stocastica, ed in particolar modo si utilizzeranno alcuni strumenti tipici del suddetto filone di studi; ciò in quanto siamo del parere che la gestione del rischio connesso a contratti finanziari aleatori possa essere condotta in modo appropriato soltanto qualora ci si affidi ad un complesso di strumenti che siano in grado di catturare la dinamica aleatoria delle grandezze economiche fondamentali.

Chiaramente, si tratterà di valutare l'effettiva compatibilità fra un complesso di principi e strumenti generali (quali sono, per l'appunto, quelli che fanno capo alla teoria dell'immunizzazione stocastica) ed un ambito particolare di applicazione, quale è il contesto tipico di una compagnia assicurativa vita. In tal senso, per la comprensione di quanto segue rivestono grande importanza le considerazioni di carattere "qualitativo" che andremo a proporre nella sezione **2.** (Analisi delle fonti d'incertezza nella dinamica finanziaria di una compagnia vita): infatti, in quella sede verrà effettuata una precisa distinzione fra i vari tipi di rischio sopportati dal portafoglio polizze di una compagnia, sulla base della quale si converrà di trattare separatamente i rischi tipicamente dovuti all'aleatorietà insita in un qualsiasi contratto assicurativo vita (i cosiddetti rischi demografici) ed il rischio connesso alle oscillazioni della *term structure* (il cosiddetto rischio di tasso d'interesse). Il lavoro sarà incentrato sulla ricerca di tecniche che siano in grado di offrire garanzie nella gestione del rischio di tasso, mentre la presenza del rischio demografico (la cui riduzione è ottenibile solo attraverso l'affinamento delle tecniche attuariali e statistiche) sarà considerata al più come un vincolo aggiuntivo ed ineliminabile. Pertanto, mentre con riferimento al rischio d'interesse verrà proposta una strategia attiva di gestione, per quanto riguarda il rischio demografico si preferirà ragionare in termini di valori attesi, in modo coerente con quanto suggerito dalle tavole di mortalità in possesso delle compagnie.

La sezione **3.** (Strumenti per l'*asset liability management* in campo stocastico) è dedicata alla presentazione degli strumenti di cui ci si servirà per la predisposizione di una strategia di *asset liability management* in ambito stocastico. Come premesso, si farà riferimento ad alcuni noti concetti che costituiscono il nocciolo della teoria dell'immunizzazione stocastica: fra questi, lo strumento principe è sicuramente la cosiddetta *duration* stocastica di un flusso di importi aleatori. Si tratta di una reinterpretazione in chiave stocastica , operata da Cox, Ingersoll e Ross [COX *et al.*, 1979], della tradizionale *duration* alla Macaulay [MACAULAY, 1938]: come noto, infatti, l'utilità di quest'ultima viene meno non appena si abbia a che fare con una struttura non piatta dei rendimenti per scadenza. L'utilizzo della *duration* stocastica ci permetterà di applicare il cosiddetto teorema fondamentale di immunizzazione stocastica al portafoglio polizze di una compagnia vita, ipotizzando che il mercato sia rappresentato da un semplice e significativo modello stocastico per la *term structure*, cioè il modello univariato di Hull e White [HULL *et al.*, 1990].

La sezione **4.** (Uno schema per l'*asset liability management* in una compagnia vita) costituisce il fulcro del presente scritto: infatti, l'applicazione del teorema generale di immunizzazione stocastica ad una compagnia assicurativa vita richiederà una preventiva definizione della dinamica finanziaria riscontrabile in tale categoria di imprese; pertanto, sulla base del modello di *term structure* assunto a riferimento, in quella sede si proporrà una rappresentazione del valore e della dinamica delle attività (*assets*), delle passività (*liabilities*) e dei mezzi propri della compagnia, in modo tale da esplicitare il legame esistente fra questi aggregati finanziari e la variabile guida del mercato, identificata da Hull e White nel tasso istantaneo d'interesse (*spot rate*). In particolare, sarà interessante notare come il processo di valutazione delle attività e, soprattutto, delle passività di una compagnia vita possa essere condotto attraverso un approccio che ne metta in evidenza la natura di *contingent claims*, ciò in accordo con i dettami della teoria delle assicurazioni.

Nella quinta ed ultima sezione dell'articolo (Considerazioni finali), caratterizzando opportunamente il teorema di immunizzazione stocastica, si giungerà a ricavare la condizione di equilibrio delle *durations* stocastiche di *assets* e di *liabilities* della compagnia considerata; inoltre, verranno proposte alcune osservazioni concernenti l'effettiva utilità operativa dello schema tracciato, ciò in accordo con la linea seguita durante la trattazione, in cui ci è parso utile mettere in evidenza sia i pregi sia i limiti dell'impianto teorico proposto.

2. Analisi delle fonti d'incertezza nella dinamica finanziaria di una compagnia vita

La scelta di focalizzare l'attenzione sul contesto delle compagnie d'assicurazione del ramo vita si giustifica sotto almeno tre punti di vista:

1. innanzitutto, si tratta di enti che fronteggiano il problema della gestione di portafogli complessi (ovvero, composti da attività e da passività), per i quali si pone la necessità di predisporre adeguate tecniche di *asset liability management* (ovvero, di gestione congiunta dei lati attivo e passivo del portafoglio);
2. in secondo luogo, nelle compagnie vita le problematiche di natura finanziaria appaiono inscindibilmente legate a problematiche di natura demografica, cosicché la validità delle soluzioni ai problemi di natura finanziaria deve sempre essere valutata alla luce dell'aleatorietà tipica dei contratti assicurativi;
3. infine, l'importanza di queste istituzioni, dopo un periodo di stasi, appare in continua crescita nell'ambito dell'intermediazione non solo assicurativa, ma anche e soprattutto finanziaria; ciò è dovuto al fatto che i prodotti collocati costituiscono oggi non tanto degli strumenti previdenziali, quanto piuttosto degli strumenti finanziari per mezzo dei quali è possibile creare il cosiddetto "risparmio assicurativo" in capo agli assicurati.

Di conseguenza (soprattutto in riferimento a quanto accennato al precedente punto 2.) non è possibile prescindere dalla considerazione delle peculiarità che rendono le imprese assicurative vita profondamente diverse da qualsiasi altro intermediario. Sotto questo profilo, meritano attenzione alcuni fenomeni tipici del settore quali:

a) la stretta interconnessione esistente tra la funzione assicurativa e quella di intermediazione svolte dalle compagnie, e
b) l'inversione, rispetto a qualsiasi impresa industriale e commerciale, del ciclo finanziario tipico delle compagnie.

Per quanto riguarda la prima questione, basti ricordare che oggi le polizze vita, accanto alla componente assicurativa in senso stretto, incorporano una sempre più rilevante componente di risparmio, e vengono giustamente considerate come vere e proprie attività finanziarie, ciascuna caratterizzata da uno specifico profilo di rischio e di rendimento. Quest'ultima osservazione conduce ad assimilare l'atto di stipula di un contratto assicurativo ad un atto di risparmio; tuttavia, va tenuto presente che la determinazione dei premi avviene in via anticipata ed è pur sempre basata su calcoli attuariali, oltre che finanziari: ne segue che, a livello di singola polizza, nella realtà possono verificarsi spesso significativi scostamenti fra i premi corrisposti dagli assicurati e gli impegni finanziari effettivamente sostenuti dalle compagnie.

Invece, per quanto riguarda la seconda questione, con il termine "inversione del ciclo finanziario" si fa riferimento al fatto che l'aspetto caratteristico e strutturale della gestione assicurativa è tale per cui ogni singolo negozio produttivo (ossia ogni contratto d'assicurazione) si apre sistematicamente con l'acquisizione di un ricavo e solo eventualmente (almeno nel breve periodo) si conclude con il sostenimento di un costo[1]. Ciò dà notoriamente luogo ad un duplice effetto, comportando da un lato una posizione di liquidità normalmente eccedentaria, e dall'altro delle grosse difficoltà nella determinazione dell'entità dei premi, dal momento che è necessario procedervi prima di conoscere l'andamento dei costi aziendali e l'esatta dinamica delle uscite monetarie.

Per effetto dei fattori suddetti, la gestione tecnico-assicurativa è caratterizzata da una forte variabilità dei flussi finanziari netti attesi: questa situazione di indeterminatezza, del resto, è strettamente connessa col processo di determinazione dei premi, basato come noto su elementi frutto di stime e congetture, che variano sensibilmente in funzione del ramo considerato.

Nel ramo vita l'aleatorietà dei flussi è principalmente dovuta a fattori di natura tecnica, che possono essere ricondotti al processo di determinazione dei premi puri (nonché dei caricamenti tecnici), calcolati sulla base di precise ipotesi demografiche e finanziarie. Come noto, tali ipotesi risultano dalle cosiddette tavole di mortalità in possesso delle compagnie, in cui le probabilità di sopravvivenza e di morte sono spesso frutto di manipolazioni artificiose dei dati grezzi, raccolti sulla base di osservazioni statistiche condotte su ristretti campioni di assicurati: come si può intuire, è assai improbabile che tavole così ottenute possano proteggere l'impresa assicurativa di fronte alla forte aleatorietà delle variabili demografiche gestite.

In ogni caso, è utile a questo punto sottolineare che, pur se rilevanti, i fenomeni sui quali si è finora posto l'accento assumono la caratteristica fondamentale di avere origine endogena. Cioè, essi sono strettamente connessi alla normale gestione delle imprese assicurative (e di quelle del ramo vita, in particolare) e come tali sono da considerarsi quasi inevitabili, fisiologici. Pertanto, i conseguenti effetti negativi, sia di ordine finanziario che economico, possono al massimo essere limitati, ma con scarsissima probabilità eliminati completamente.

Quest'ultima considerazione, invece, perde la propria validità qualora si considerino i riflessi, nelle compagnie vita, di fenomeni aventi natura non endogena, bensì esogena, quali la variabilità dei tassi d'interesse: infatti, se da un lato le possibili conseguenze indesiderate sui delicati equilibri della compagnia sono le medesime, dall'altro nel caso dei rischi esogeni è in teoria possibile attuare un'azione correttiva, mediante l'adozione di opportune tecniche di controllo di tale categoria di rischi.

---

[1] Sull'argomento, si veda anche [PETIX, 1984] a pagina 38.

Nel seguito dello sviluppo del presente lavoro verrà nettamente privilegiata la componente finanziaria rispetto a quella previdenziale incorporata nelle polizze: di conseguenza, ci occuperemo di contratti caratterizzati da un elevato contenuto di *leverage* assicurativo, intendendo con quest'ultimo sia l'entità, sia l'arco temporale per il quale le risorse, costituite dai premi corrisposti dagli assicurati, restano a disposizione della compagnia sotto forma di riserve matematiche[2]. Infatti, se da un lato le riserve matematiche rappresentano il debito della compagnia nei confronti degli assicurati, dall'altro la costituzione delle stesse fornisce alla compagnia i mezzi finanziari strumentali all'effettivo svolgersi della funzione di intermediazione. Pertanto, quanto più cospicua è la riserva matematica iscritta nel bilancio di una compagnia vita, tanto più quest'ultima sarà orientata all'offerta di strumenti di risparmio (funzione di intermediazione finanziaria), rispetto alla copertura dei rischi attinenti la vita dell'individuo (funzione assicurativa in senso stretto).

La scelta di concentrare la nostra attenzione sul contenuto finanziario assunto dalle polizze, a scapito di quello previdenziale, rappresenta sicuramente una forzatura teorica, dal momento che così facendo si tende a rendere effettiva una distinzione (quella fra disturbi endogeni ed esogeni) la cui valenza sussiste solamente in termini logici: in fin dei conti, il *management* aziendale sarà interessato alla capacità della compagnia di mantenere una situazione di solvibilità tecnica, senza alcuna distinzione in merito alla natura od origine dei fattori che possono minare tale capacità. Ciononostante, in questa sede si tratta di valutare la bontà di uno schema di *asset liability management*, non di proporre un nuovo metodo per la costruzione delle tavole di mortalità. Naturalmente, nelle situazioni reali l'efficacia del modello andrà giudicata alla luce degli effetti causati dai vari "disturbi endogeni" con cui la compagnia deve misurarsi; ma se è vero che la qualità degli schemi di gestione dei fattori endogeni esercita un notevole impatto sulla qualità degli schemi *asset liability management* adottati, non si può affermare che tale corrispondenza abbia natura biunivoca. In altre parole, uno schema di gestione del rischio di tasso, per quanto sofisticato esso sia, non potrà mai influire sulla maggiore o minore attendibilità di stime riguardanti la mortalità degli individui. Tale circostanza, a nostro avviso, risulta sufficiente per giustificare l'approccio adottato nella presente trattazione.

3. Strumenti per l'*asset liability management* in ambito stocastico

L'applicazione di un modello stocastico di *asset liability management* ad una compagnia vita necessita della preventiva specificazione di un modello evolutivo per la *term structure*.

Si tratta di un passaggio critico fondamentale, che in generale dovrà essere supportato da precise valutazioni sull'evoluzione prevista dei tassi d'interesse, operate dal *management* della compagnia. Ciò dovrebbe chiarire lo spirito con il quale, in questa sede, si propone l'adozione del modello univariato di Hull e White: infatti, essendo il nostro obiettivo quello di proporre uno schema gestionale dotato di un certo grado di generalità, si è reputato utile fare

[2] Per maggiori dettagli sulla definizione di *leverage* qui utilizzata, si veda [MOSCHETTA, 1998] a pagina 84.

riferimento ad un modello significativo, ma relativamente semplice e facilmente trattabile in termini analitici.

Va da sé che la nostra proposta non avanza alcuna pretesa di essere "la migliore in assoluto, in qualsiasi caso": se così fosse, si rischierebbe di fossilizzarsi attorno ad uno strumento, considerandolo (alla stregua degli studi classici) come mezzo indispensabile ed unico in grado di catturare perfettamente l'evoluzione futura del mercato.

Il modello di Hull e White

Il modello di Hull e White rappresenta un'estensione dell'originario modello univariato di Vasicek [VASICEK, 1977], e da quest'ultimo trae le principali caratteristiche:

- si tratta di un modello definito in riferimento ad un mercato idealizzato e basato sull'argomento di impossibilità di arbitraggi;
- si tratta di un modello univariato, ovvero di un modello che considera un'unica variabile quale guida del mercato, identificandola nel tasso istantaneo d'interesse (*spot rate*) r(t).

Rifacendoci alla notazione utilizzata dagli Autori, in uno schema di mercato definito nel continuo, non frizionale e competitivo, d'ora in poi indicheremo con v(t, s) il prezzo, all'istante t, di un titolo obbligazionario avente *maturity* al tempo s, $t \leq s$, con valore finale unitario,

$$v(s,s) = 1. \tag{1}$$

In riferimento alla legge di sconto v(t, s), il rendimento a scadenza, all'istante t, di un titolo obbligazionario avente *maturity* al tempo $s = t + T$, può essere definito come segue

$$h(t,s) = -\frac{1}{s-t}\log v(t,s), \qquad s > t. \tag{2}$$

È da osservare che tale quantità ha le dimensioni di un'intensità (ovvero del reciproco di un tempo)[3].

In questi termini, i rendimenti a scadenza h(t, s), definiti all'istante t e considerati come funzione di s, verranno indicati come struttura a termine dei tassi d'interesse (*term structure*).

Dunque, date le ipotesi accolte nel modello di Vasicek (e quindi anche in quello di Hull e White), è espressivo definire lo *spot rate* r(t) come intensità interna di rendimento, caratteristica in t, di uno *zero coupon bond* unitario con scadenza t + dt (avente, cioè, vita a scadenza infinitesima).

Si ha

$$r(t) = h(t, t+dt) = \lim_{s\to t}\frac{1}{s-t}\int_t^s \delta(t,u)du, \tag{3}$$

[3]In altre parole, la quantità h(t,s) coincide con l'intensità (costante) della legge esponenziale equivalente, che è cioè caratterizzata, sull'intervallo di tempo assegnato, di estremi t ed s, da un fattore di sconto uguale a v(t,s).

in cui $\delta(t,s)$ rappresenta l'intensità istantanea d'interesse, vista come funzione di s, associata alla legge di sconto v(t, s)

$$\delta(t,s) = -\frac{\partial}{\partial s}\log[v(t,s)]. \tag{4}$$

Per quanto riguarda il processo stocastico $\{r(t), t \geq t_0\}$ descritto dallo *spot rate*, Vasicek nella versione originaria del modello formula alcune assunzioni:

- *Assunzione 1*: $\{r(t), t \geq t_0\}$ è un processo che si può assumere definito per ogni valore di t, ed è funzione continua di t;
- *Assunzione 2*: $\{r(t), t \geq t_0\}$ segue un processo di Markov, ossia un particolare tipo di processo stocastico in cui il solo valore corrente della variabile r(t) è rilevante ai fini delle previsioni sulla futura dinamica di quest'ultima.

I processi dotati di tali caratteristiche sono comunemente detti processi diffusivi, e possono essere descritti per mezzo di un'equazione differenziale stocastica del tipo

$$dr(t) = f[r(t),t]dt + \rho[r(t),t]dz(t), \tag{5}$$

in cui $f[r(t),t]$ e $\rho[r(t),t]$ rappresentano, rispettivamente, il *drift* istantaneo e la deviazione standard istantanea del processo descritto da r(t), mentre dz(t) è un processo di Wiener, che "guida" la componente stocastica del processo diffusivo.

L'equazione (5) consente una ulteriore considerazione: infatti, ai processi diffusivi è possibile applicare il cosiddetto lemma di Itô [ITÔ, 1951], per mezzo del quale è possibile ricavare la dinamica stocastica seguita dalla funzione di una opportuna variabile, in base al processo stocastico (diffusivo) seguito dalla variabile stessa. Per effetto di ciò, la terza importante assunzione dell'autore può essere sintetizzata come segue:

- *Assunzione 3*: il prezzo v(t, s) di un titolo obbligazionario, che a scadenza paga un'unità montante, è completamente individuato, all'istante generico t, sulla base della determinazione assunta in t dallo *spot rate*. In termini analitici, si ha

$$v(t,s) = v[r(t),t,s], \tag{6}$$

il che conferma che lo *spot rate* è l'unica variabile di stato per l'intera *term structure*.

Dalle equazioni (5) e (6), per mezzo del calcolo stocastico di Itô, segue che la dinamica del prezzo di uno *zero coupon bond* unitario, con scadenza in s, soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica

$$dv[r(t),t,s] = v[r(t),t,s]\mu[r(t),t,s]dt - v[r(t),t,s]\sigma[r(t),t,s]dz(t), \tag{7}$$

in cui i parametri $\mu[r(t),t,s]$ e $\sigma[r(t),t,s]$ sono dati, rispettivamente, da

(8) $$\mu[r(t),t,s]=\frac{1}{v[r(t),t,s]}\left\{\frac{\partial}{\partial t}+f[r(t),t]\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{2}\rho^{2}[r(t),t]\frac{\partial^{2}}{\partial r^{2}}\right\}v[r(t),t,s],\text{ e}$$

(9) $$\sigma[r(t),t,s]=-\frac{1}{v[r(t),t,s]}\rho[r(t),t]\frac{\partial}{\partial r}v[r(t),t,s].$$

Le equazioni (8) e (9) rappresentano, rispettivamente, la media e la deviazione standard del tasso istantaneo di rendimento di uno *zero coupon bond* unitario con scadenza in s.

Il processo diffusivo per r(t) considerato da Vasicek nel proprio modello è il seguente

(10) $$dr(t)=a[b-r(t)]dt+\rho\, dz(t),$$

in cui a, b e ρ sono costanti positive, mentre dz(t) è un processo di Wiener.

L'equazione (10) incorpora il cosiddetto processo Ornstein-Uhlenbeck e risulta apprezzabile poiché cattura il fenomeno della *mean reversion* (ovvero, del ritorno verso il valor medio); l'ipotesi di ritorno verso il valor medio, che formalizza l'assunto keynesiano di "*normal backwardation*"[4], presuppone che la dinamica del tasso *spot* sia, in una certa misura, prevedibile con sufficiente ragionevolezza. Secondo tale teoria, allorché r(t) si trova in corrispondenza di un valore superiore a quello del proprio livello tendenziale di lungo periodo, il fenomeno della *mean reversion* tende a causare un *drift* negativo; al contrario, quando r(t) assume valori inferiori alla media di lungo periodo, la *mean reversion* tende a causare un *drift* positivo.

L'effettiva significatività di tale ipotesi, nella realtà, sembra essere supportata da convincenti argomentazioni economiche. In estrema sintesi, è noto che nei periodi caratterizzati da livelli generalmente alti dei tassi d'interesse, l'economia di un paese nel suo complesso tende a rallentare; ad un rallentamento del tasso di crescita dell'economia di un paese, del resto, corrisponde parallelamente una diminuzione della richiesta di fondi a prestito, per la carenza di investimenti programmati; come logica conseguenza, i tassi d'interesse dovranno scendere, esplicando la propria funzione di impulso alla ripresa. Contrariamente, allorché i tassi di mercato sono bassi, tende ad esserci una forte richiesta di fondi da prendere a prestito, dato il loro basso costo; naturalmente, come accade ogniqualvolta la domanda supera l'offerta, i tassi saranno destinati ad aumentare.

Vasicek dimostra che, sotto le ipotesi assunte, il prezzo all'istante t di uno *zero coupon bond* unitario, con scadenza in s, assume la seguente forma

(11) $$v[r(t),t,s]=A(t,s)e^{-B(t,s)r(t)},$$

dove

[4] Sull'argomento si veda [COPELAND *et al.*, 1988] a pagina 448.

(12) $$A(t,s) = \exp.\frac{[B(t,s)-s+t](a^2 b-\rho^2/2)}{a^2} - \frac{\rho^2 B(t,s)^2}{4a},$$

(13) $$B(t,s) = \frac{1-e^{-a(s-t)}}{a}.$$

Ora, ricordando l'equazione (2), e sostituendovi v(t, s) con la corrispondente espressione che compare nell'equazione (11), si ottiene l'espressione esplicita per la *term structure*, e cioè

(14) $$h[r(t),t,s] = -\frac{1}{s-t}\log[A(t,s)] + \frac{1}{s-t}B(t,s)r(t).$$

Tuttavia, osservando attentamente l'equazione (14):

- da un lato, si ha conferma del fatto che, al generico istante t, l'intera *term structure* può essere ottenuta in funzione dell'unica variabile r(t), una volta determinati i parametri del processo diffusivo;
- dall'altro, non vi sono dubbi sul fatto che, una volta individuati il processo per lo *spot rate* e la determinazione r(0), corrispondente all'istante iniziale t = 0, ne risulta automaticamente determinata l'intera *term structure* iniziale[5], nonché il modo in cui essa potrà evolvere in tutti i futuri istanti di tempo.

Ciò dà luogo ad un inconveniente non trascurabile, dal momento che nello schema originario di Vasicek la *term structure* iniziale risulterà in generale quale *output* del modello, e non si adatterà automaticamente alla *term structure* effettivamente osservabile sul mercato. E' questo il motivo per cui, in questa sede, non si accoglie la versione originaria del modello, bensì la sua estensione, come proposta da Hull e White: i due Autori, infatti, ridisegnano il modello di Vasicek in modo da renderlo consistente con la *term structure* iniziale, la quale viene così ad essere un *input* del modello.

L'approccio seguito consiste nell'includere, nel *drift* del processo per r(t), una funzione del tempo, θ(t), specificata in modo che il modello, all'istante iniziale, sia in grado di approssimare correttamente la *term structure* corrente. Pertanto, la (10) può esser riscritta come segue

(15) $$dr(t) = \{\theta(t) + a[b - r(t)]\}dt + \rho\, dz(t).$$

Il modello risulta facilmente trattabile in termini analitici, e la funzione θ(t) può essere determinata in base alla *term structure* corrente. Infatti, indicando con F(0, t) e $F_t(0, t)$,

[5] Con il termine "*term structure* iniziale" si vuole indicare la struttura dei tassi in vigore nell'istante t = 0, in cui il *management* di una compagnia si appresta ad applicare uno schema di *asset liability management* al portafoglio gestito.

rispettivamente, il tasso *forward* istantaneo[6], al tempo 0, per un contratto con scadenza al tempo t, e la derivata, calcolata rispetto a t, del tasso *forward* stesso, si ha

$$(16) \qquad \theta(t) = F_t(0,t) + aF(0,t) + \frac{\rho^2}{2a}\left(1 - e^{-2at}\right).$$

In generale, l'ultimo termine dell'equazione (16) è abbastanza "contenuto"; se, in accordo con Hull[7], lo ignoriamo, l'equazione (15) può essere riscritta nei termini seguenti

$$(17) \qquad dr(t) = \{F_t(0,t) + a[F(0,t) + b - r(t)]\}dt + \rho\, dz(t).$$

Ciò mostra che, in media, r(t) segue approssimativamente la pendenza della curva iniziale del tasso *forward* istantaneo e, quando si allontana da tale curva, tende a ritornarvi con una velocità pari ad a. Come nel caso del modello di Vasicek, il prezzo all'istante t di uno *zero coupon bond* unitario, con scadenza in s, assume la forma

$$(18) \qquad v[r(t), t, s] = A(t,s)e^{-B(t,s)r(t)},$$

ma nel caso del modello di Hull e White le espressioni di B(t, s) e A(t, s) sono date, rispettivamente, da[8]:

$$(19) \qquad B(t,s) = \frac{1 - e^{-a(s-t)}}{a},$$

$$(20) \qquad \log[A(t,s)] = \log\left[\frac{P(0,s)}{P(0,t)}\right] - B(t,s)\frac{\partial \log[P(0,t)]}{\partial t} - \frac{\rho^2\left(e^{-as} - e^{-at}\right)^2\left(e^{2at} - 1\right)}{4a^3}.$$

Come si può notare (in particolare dall'equazione (20)), nel modello di Hull e White è possibile definire il prezzo di un titolo obbligazionario, ad un futuro istante di tempo t, in funzione non solo del valore assunto dallo *spot rate* in t, ma anche in base ai prezzi attuali dei titoli a sconto (grandezze, queste ultime, osservabili in base alla *term structure* corrente): in ciò sta la consistenza del modello con la *term structure* iniziale.

---

6 Se si indica con f(t,T1,T2) il tasso *forward* al tempo t, relativo al periodo compreso fra il tempo T1 e il tempo T2, la variabile F(t,T) è data dal limite di f(t,T,T+Δt) per Δt che tende a zero.

7 Sull'argomento si veda [HULL, 1997], nella traduzione di Barone E., a pagina 433.

8 Rispetto all'equazione (17), nella (19) il valore v[r(t),t,s] è sostituito con P(t, s); la sostituzione non dovrebbe creare problemi di comprensione, e comunque risulta necessaria in quanto la (17) è stata ricavata per valutare *zero coupon bond* unitari, mentre il ragionamento che stiamo portando avanti mantiene la propria validità per qualsiasi *zero coupon bond*, non necessariamente di valore unitario. A tal proposito, si rimanda alla successiva nota 15.

La definizione di duration stocastica

Al fine di ricavare una definizione di *duration* che possa essere utilizzata per misurare la rischiosità di portafogli *interest rate sensitive*, nell'ipotesi di adozione del modello di Hull e White, risulta utile considerare un generico flusso di cassa $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, di importi non negativi esigibili agli istanti $t_1, t_2, \ldots, t_m (t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_m)$. Data l'ipotesi di markovianità sul processo per r(t), e quindi sul fattore di sconto v(t, s), anche il valore attuale W(t, **x**), calcolato al tempo t, del generico flusso $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, sarà funzione del livello dello *spot rate* osservato in t, e cioè

$$W(t, \mathbf{x}) = W[r(t), t, \mathbf{x}] = \sum_{k=1}^{m} x_k v[r(t), t, t_k]. \tag{21}$$

Pertanto, la dinamica di W(t, **x**) sarà determinata dalla dinamica di $v(t, t_k)$; dall'equazione (7) risulta immediatamente

$$dW[r(t), t, \mathbf{x}] = W[r(t), t, \mathbf{x}]\mu_W[r(t), t, \mathbf{x}]dt - W[r(t), t, \mathbf{x}]\sigma_W[r(t), t, \mathbf{x}]dz(t), \tag{22}$$

in cui si ha

$$\mu_W[r(t), t, \mathbf{x}] = \frac{1}{W[r(t), t, \mathbf{x}]}\left\{\frac{\partial}{\partial t} + f[r(t), t]\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2}\rho[r(t), t]^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right\}W[r(t), t, \mathbf{x}], \tag{23}$$

$$\sigma_W[r(t), t, \mathbf{x}] = -\frac{1}{W[r(t), t, \mathbf{x}]}\rho[r(t), t]\frac{\partial}{\partial r} W[r(t), t, \mathbf{x}]. \tag{24}$$

Come si può notare dall'equazione (22), in ambito stocastico la variazione relativa istantanea, dW[r(t), t, **x**] / W[r(t), t, **x**], del prezzo del titolo considerato è scomponibile in una componente "anticipabile", $\mu_W dt$, ed una "non anticipabile", $-\sigma_W dz(t)$. In altri termini, il modello di riferimento cattura la componente deterministica del sentiero evolutivo descritto dalla funzione dW[r(t), t, **x**] / W[r(t), t, **x**]; a tale componente, tuttavia, se ne aggiunge una stocastica, dovuta alle perturbazioni di moto browniano accumulatesi nell'intervallo infinitesimo (t, t + dt).

La (24) stabilisce che le variazioni relative istantanee, dW[r(t), t, **x**] / W[r(t), t, **x**], del prezzo del titolo **x**, attribuibili a fluttuazioni "non anticipabili" dello *spot rate*, sono determinate dalla quantità $-\rho[r(t), t]W_r[r(t), t, \mathbf{x}]/W[r(t), t, \mathbf{x}]$, in cui $W_r[r(t), t, \mathbf{x}]$ indica la derivata parziale di W[r(t), t, **x**], calcolata rispetto ad r(t). Ora, dal momento che $\rho[r(t), t]$ è indipendente da **x**, ovvero dai parametri contrattuali del titolo *interest rate sensitive* considerato, ne consegue che le caratteristiche tecniche di quest'ultimo influiscono sulla componente stocastica della dinamica del suo prezzo esclusivamente tramite la quantità

$$(25) \qquad \Omega[r(t), t, \mathbf{x}] = \frac{W_r[r(t), t, \mathbf{x}]}{W[r(t), t, \mathbf{x}]},$$

che può essere assunta come misura del rischio base[9] di $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$.

La misura di rischiosità $\Omega[r(t), t, \mathbf{x}]$ rappresenta una variabile strumentale direttamente utilizzabile per la messa a punto di strategie di *asset liability management*; infatti, il suo valore può essere modificato intervenendo sulla struttura del flusso $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, ossia selezionando uno o più titoli dotati delle caratteristiche desiderate, in termini di rischiosità. Inoltre, dalla (25) sarà possibile ricondurre ad una scala temporale "naturale" la misura di rischiosità $\Omega[r(t), t, \mathbf{x}]$, introducendo una definizione di *duration* stocastica, come proposto da Cox, Ingersoll e Ross: è sufficiente fissare la "scala di *duration*", stabilendo di attribuire agli *zero coupon bond* una *duration* stocastica pari alla *maturity*, in modo conforme alle analisi in campo deterministico.

Il concetto di *duration* stocastica, su cui si basa il teorema fondamentale di immunizzazione stocastica, riveste grande importanza nello sviluppo del presente lavoro.

4. Uno schema per l'*asset liability management* in una compagnia vita

Al fine di illustrare i tratti essenziali del problema, verrà considerata una ipotetica compagnia d'assicurazioni il cui *planning period* sia dato dall'intervallo temporale [0, T]. L'istante t = T può essere considerato come la data in cui un gruppo di polizze omogenee (ovvero, dotate delle medesime caratteristiche contrattuali), stipulate all'istante t = 0, andrà a scadenza.

A tal riguardo, giova sottolineare che in questa sede il concetto di "scadenza" di una polizza vita viene inteso in un'accezione particolare: infatti, diversamente da quanto accade per qualsiasi altra attività finanziaria disponibile sul mercato, per la quale sono determinati in anticipo i parametri di riferimento (rendimento, modalità di rimborso, scadenza), nei contratti assicurativi vita bisogna tener conto dell'alea di incertezza dovuta al rischio demografico. Ne segue che la "scadenza" di una polizza vita (dal punto di vista della compagnia) viene notevolmente influenzata dall'operare di tale componente di rischio; tuttavia, trattandosi di un rischio di origine endogena, ci si limiterà a segnalarne la presenza, considerandolo quale "fattore di disturbo" nell'applicazione degli schemi di *asset liability management*. Del resto, qualora si consideri che, oltre alla funzione assicurativa in senso stretto, i moderni contratti d'assicurazione incorporano una rilevante componente di risparmio, risulta chiaro che per il gestore finanziario della compagnia si pone, in ogni caso (cioè, indipendentemente dalla mortalità degli assicurati), la necessità di conseguire un adeguato rendimento sulle attività finanziarie detenute, ciò al fine di rendere appetibili le polizze offerte sul mercato.

In questo senso, la cosiddetta "scadenza" di una polizza va interpretata come l'orizzonte temporale al termine del quale la compagnia si impegna a garantire all'assicurato un determinato rendimento sulla polizza sottoscritta. In altri termini, coerentemente con la linea

[9] Sull'argomento si veda [DE FELICE *et al.*, 1991] a pagina 216.

seguita finora, non verrà considerato il problema della mortalità degli individui. In effetti, la considerazione delle tavole di mortalità avrebbe l'effetto di complicare l'analisi, ma non quello di modificarne i risultati: finché i tassi di mortalità risulteranno indipendenti dai tassi d'interesse (!), le grandezze utilizzate per la gestione del rischio di tasso (ad esempio, la misura della *duration* stocastica di attivo e passivo) non subiranno variazioni.

A tal riguardo si potrebbe obiettare che, a parità di condizioni, l'effetto mortalità incide sulla *duration* del passivo, dal momento che il pagamento delle indennità contribuisce ad abbassarla; tuttavia, ancora una volta si tratta di mantenere separata la sfera dei disturbi endogeni (la considerazione della mortalità) da quella dei disturbi esogeni (la gestione dell'*interest rate risk*): solamente questi ultimi, come sappiamo, possono essere fronteggiati in maniera efficace tramite l'approccio di *asset liability management*.

Per quanto riguarda la natura delle polizze considerate, faremo riferimento allo schema dei contratti indicizzati (rispetto ai rendimenti degli *assets*), in quanto questi ultimi rappresentano una delle forme più diffuse di polizze con elevato contenuto di natura finanziaria, ed inoltre consentono alla compagnia di operare sul mercato in modo competitivo, attraverso la manovrabilità dei meccanismi d'indicizzazione. Tipicamente, in un contratto indicizzato al sottoscrittore viene garantito un rendimento minimo, cui va ad aggiungersi un extrarendimento (necessariamente variabile) legato alle *performance* ottenute dalla compagnia attraverso l'investimento delle riserve matematiche. Di conseguenza, tali contratti sono completamente caratterizzati, una volta che siano stati specificati il tasso d'interesse minimo garantito ed il livello di partecipazione alle *performance* dell'impresa.

Valutazione e dinamica degli assets di una compagnia

Date tali premesse, supponiamo che all'istante iniziale t = 0 la compagnia acquisti un *asset portfolio* A(0), interamente composto da titoli *interest rate sensitive*, finanziandolo in parte con il capitale versato, E(0), ed in parte con i premi incassati dall'emissione del gruppo omogeneo di polizze, L(0). Poniamo che sia pari ad α la quota di attività iniziali finanziata tramite i premi; di conseguenza, si indicherà con $(1 - \alpha)$ la quota finanziata tramite il capitale versato dagli azionisti. Il bilancio iniziale della compagnia è riportato nella Tabella 1.

Tabella 1 - Bilancio iniziale della compagnia vita

Attività	Passività e Capitale Netto
Assets A(0)	C. N. $E(0) = (1 - \alpha)\,A(0)$
	Liabilities $L(0) = \alpha A(0)$
Totale A(0)	Totale A(0)

Il portafoglio degli *assets* descriverà una dinamica governata dal modello di Hull e White per lo *spot rate*; infatti, ricordando l'equazione (7), relativa alla dinamica del prezzo di uno *zero coupon bond* unitario, si può dimostrare[10] che il valore dell'aggregato di titoli *interest*

[10] Sull'argomento si veda [BRIYS *et al.*, 1997] a pagina 677.

rate sensitive, che vanno a comporre il portafoglio degli *assets* della compagnia, varia secondo il seguente processo[11]:

(26) $$\frac{dA(t)}{A(t)} = \mu(t)dt + \sigma_A\left[\xi\, dz(t) + \sqrt{1-\xi^2}\, dW(t)\right],$$

in cui σ_A indica la deviazione standard istantanea del tasso di rendimento medio degli *assets*, e ξ rappresenta il coefficiente di correlazione fra il tasso d'interesse privo di rischio ed il valore globale degli *assets*. Infine, W(t) è un moto browniano standard, indipendente da dz(t), che dà una misura dei rischi gravanti sull'attivo, diversi dall'*interest rate risk.*

Per poter derivare un legame esplicito fra A(t) ed r(t), è necessario esprimere in forma integrale il processo descritto da quest'ultimo. In generale, si può dimostrare che l'equazione (15) può essere espressa in forma integrale come segue

(27) $$r(t) = r(0) + \int_0^t \{\theta(u) + a[b - r(u)]\}du + \int_0^t \rho\, dz(u),$$

ovvero, in forma equivalente

(28) $$r(t) = r(0) + \int_0^t \theta(u)du + abt - a\int_0^t r(u)du + \rho\, z(t).$$

Utilizzando il lemma di Itô, anche la dinamica del prezzo degli *assets* (equazione (26)) può essere espressa in forma integrale[12]

(29) $$A(t) = A(0)\exp\left[\int_0^t r(u)du - \frac{\sigma_A^2 t}{2} + \xi\sigma_A z(t) + \sqrt{1-\xi^2}\sigma_A W(t)\right].$$

Ora, ricavando z(t) dalla (28)

(30) $$z(t) = \frac{r(t) - r(0) - \int_0^t \theta(u)du - abt + a\int_0^t r(u)du}{\rho},$$

e sostituendolo nella (29) con la corrispondente espressione, si ha

(31) $$A(t) = A(0)e^{[S(r,\theta,\sigma_A)]},$$

[11] Per non complicare notazionalmente le equazioni che seguiranno, si omette la dipendenza funzionale da r, dato anche che quest'ultimo dipende da t.

[12] Sull'argomento si veda [BRIYS *et al.*, 1997] a pagina 678.

in cui $S(r,\theta,\ \sigma_A)$ è dato dall'espressione seguente (equazione (32))

$$S(r,\theta,\ \sigma_A)=\left\{\int_0^t r(u)du-\frac{\sigma_A^{\,2}t}{2}+\xi\sigma_A\left[\frac{r(t)-r(0)-\int_0^t\theta(u)du-abt+a\int_0^t r(u)du}{\rho}\right]+\sqrt{1-\xi^2}\sigma_A W(t)\right\}.$$

Riarrangiando opportunamente qualche termine nell'equazione (32), è possibile riscrivere l'espressione $S(r,\theta,\ \sigma_A)$ come segue

$$(33)\left\{\left(1+\frac{a\xi\sigma_A}{\rho}\right)\int_0^t r(u)du-\left(\frac{\sigma_A^{\,2}}{2}+\frac{ab\xi\sigma_A}{\rho}\right)t+\frac{\xi\sigma_A}{\rho}\left[r(t)-r(0)-\int_0^t\theta(u)du\right]+\sqrt{1-\xi^2}\sigma_A W(t)\right\}.$$

Le equazioni (31) e (33) chiariscono la relazione fra il valore degli *assets* all'istante t, A(t), ed il corrispondente valore dello *spot rate*, r(t). In particolare, si nota che, rispetto a quanto accade nel modello originario di Vasicek, in quello di Hull e White tale legame è definito a meno di un termine correttivo, $-\int_0^t\theta(u)du$, che sappiamo essere necessario per assicurare la coerenza con la *term structure* iniziale.

Valutazione e dinamica delle liabilities di una compagnia

Passando a considerare il lato passivo del bilancio della compagnia, conveniamo di indicare con r* il rendimento minimo garantito sul gruppo omogeneo di polizze considerate; in aggiunta, i sottoscrittori hanno diritto ad una quota δ delle entrate finanziarie nette (ovviamente, se positive) realizzate dalla compagnia[13].

Se ora indichiamo con B_T il bonus spettante ai sottoscrittori delle polizze, all'istante di scadenza t = T, una volta che i pagamenti garantiti sono stati effettuati, il valore di B_T sarà definito come segue

$$(34)\qquad B_T=\max\left\{0,\delta\left[\frac{L_0}{A_0}(A_T-A_0)-(L_T^*-L_0)\right]\right\}=$$
$$=\delta\alpha\ \max\left[0,A_T-\frac{L_T^*}{\alpha}\right],$$

in cui $L_T^*=L_0e^{r^*T}$ rappresenta il pagamento garantito agli assicurati, all'istante t = T. Dalla (34), si nota che solamente una frazione, $L_0/A_0=\alpha$, delle entrate finanziarie totali della

[13] E' proprio l'entità di δ lo strumento con il quale le compagnie possono adottare un atteggiamento aggressivo sul mercato; è logico, infatti, come al crescere di δ aumenti

compagnia, $A_T - A_0$, realizzate fra $t = 0$ e $t = T$, viene presa in considerazione per il calcolo del bonus B_T; pertanto, dopo che i pagamenti garantiti, $L_T - L_0$, sono stati effettuati, gli assicurati ricevono una quota δ di questo aggregato finanziario.

Come si vede, la compagnia può cominciare a distribuire gli utili agli azionisti solo se B_T è positivo, ovvero quando

$$A_T > \frac{L_T^*}{\alpha}. \qquad (35)$$

In altre parole, dal momento che

$$\frac{L_T^*}{\alpha} = A_0 e^{r^* T}, \qquad (36)$$

la compagnia è in grado di offrire il bonus se e solo se il tasso di rendimento sugli *assets* eccede il rendimento r* garantito agli assicurati.

Sotto tali premesse, è possibile distinguere tre scenari alternativi, in corrispondenza dei quali varia il *payoff* L_T spettante agli assicurati all'istante $t = T$ (ovvero, varia l'ammontare delle *liabilities* cui la compagnia dovrà far fronte).

Nel primo scenario, all'istante $t = T$ la compagnia potrebbe risultare totalmente insolvente: in tal caso, il valore degli *assets* A_T è inferiore all'aggregato L_T^*, che rappresenta l'ammontare di risorse garantite agli assicurati. Questi ultimi, poiché la compagnia è dichiarata insolvente, riceveranno quanto rimane

$$L_T = A_T, \quad \text{se } A_T < L_T^*. \qquad (37)$$

Il secondo scenario possibile è quello in cui la compagnia, a scadenza, risulta in grado di far fronte ai pagamenti garantiti L_T^*, ma non concede alcun *bonus* aggiuntivo ($B_T = 0$), cioè

$$L_T = L_T^*, \quad \text{se } L_T^* \le A_T \le \frac{L_T^*}{\alpha}. \qquad (38)$$

Il terzo scenario, infine, è quello in cui la compagnia è in grado di concedere un *bonus* $B_T > 0$, oltre ai pagamenti assicurati a scadenza. Ciò significa che gli *assets* in portafoglio hanno generato risorse sufficienti a garantire un extrarendimento ai sottoscrittori delle polizze. In tal caso, il valore delle passività della compagnia, all'istante $t = T$, sarà pari a

---

l'appetibilità delle polizze, oltre ovviamente alle difficoltà di gestione finanziaria delle compagnie.

(39)
$$L_T = L_T^* + B_T,$$
$$= \delta\alpha \ A + (1-\delta)\ L_T^*, \quad \text{se } \frac{L_T^*}{\alpha} < A_T.$$

Considerando la (37), la (38) e la (39), è possibile riscrivere il valore delle *liabilities* di una compagnia vita, all'istante t = T, nel modo seguente

(40)
$$L_T = \min\{A_T, L_T^*\} + B_T$$
$$= L_T^* - \max\{0, L_T^* - A_T\} + \delta\alpha \ \max\left\{0, A_T - \frac{L_T^*}{\alpha}\right\}.$$

Nell'ambito della struttura delineata, è possibile ricavare anche i *payoff* destinati agli azionisti della compagnia, all'istante t = T, in corrispondenza di ciascuno degli scenari possibili. Naturalmente, il *payoff* destinato agli azionisti sarà determinato come posta residuale, una volta che siano stati effettuati i pagamenti dovuti agli assicurati. Il valore di E_T, per ognuno degli scenari considerati, è riportato qui di seguito

(41)
$$E_T = 0, \quad \text{se } A_T < L_T^*,$$
$$E_T = A_T - L_T^*, \quad \text{se } L_T^* \le A_T \le \frac{L_T^*}{\alpha},$$
$$E_T = (1-\delta\alpha\ )A_T - (1-\delta)L_T^*, \quad \text{se } \frac{L_T^*}{\alpha} < A_T.$$

Analogamente a quanto visto per le *liabilities*, l'equazione (41) può essere riscritta come segue

(42)
$$E_T = \max\{0, A_T - L_T^*\} - \delta\alpha \ \max\left\{0, A_T - \frac{L_T^*}{\alpha}\right\}.$$

Come si può notare (osservando le (40) e (42)), i *payoff* finali suggeriscono che sia il capitale proprio, sia le passività di una compagnia hanno le caratteristiche di titoli derivati (*contingent claims*). Infatti, riprendendo la (42), è agevole constatare che i due termini posti alla destra del segno di uguaglianza non rappresentano altro che i *payoff* finali di due opzioni *call* di tipo europeo, aventi scadenza in T e prezzi d'esercizio L_T^* e L_T^*/α , rispettivamente.

Il valore del patrimonio netto della compagnia, al generico istante t, t < T, può dunque essere riscritto come segue

(43)
$$E_t = C_E(A_t, L_T^*) - \delta\alpha C_E\left(A_t, \frac{L_T^*}{\alpha}\right) ,$$

in cui $C_E(A_t, L_T^*)$ e $C_E(A_t, L_T^*/\alpha)$ rappresentano le suddette opzioni *call.*

Analogamente, per quanto riguarda le passività della compagnia, l'equazione di valutazione (40), all'istante generico t, può essere opportunamente riscritta come segue

$$(44) \qquad L_t = L_T^* P(t,T) - P_E(A_t, L_T^*) + \delta\alpha C_E\left(A_t, \frac{L_T^*}{\alpha}\right),$$

in cui $P_E(A_t, L_T^*)$ indica il prezzo di un'opzione *put* di tipo europeo con prezzo d'esercizio L_T^*.

Per la valutazione di siffatte opzioni europee, in base al modello di Hull e White, è utile rifarsi al metodo proposto da Jamshidian [JAMSHIDIAN, 1989]. È possibile dimostrare che, in base al metodo proposto, il valore delle due opzioni *call* e dell'opzione *put* che compaiono nelle equazioni (43) e (44) può essere determinato come segue

$$(45) \qquad \begin{aligned} C_E(A_t, L_T^*) &= A_t N(d_1) - P[r(t), t, T] L_T^* N(d_2), \\ C_E\left(A_t, \frac{L_T^*}{\alpha}\right) &= A_t N(d_3) - P[r(t), t, T] \frac{L_T^*}{\alpha} N(d_4), \\ P_E(A_t, L_T^*) &= -A_t N(-d_1) + P[r(t), t, T] L_T^* N(-d_2), \end{aligned}$$

espressione quest'ultima che richiama la più celebre *option pricing formula* di Black-Scholes.

Pertanto, come già visto nel caso degli *assets* societari, anche per le *liabilities* e i mezzi propri è possibile ricavare una formula chiusa di valutazione, in grado di legare il valore di questi aggregati finanziari alla dinamica dello *spot rate* r(t).

Una formula per la duration stocastica della compagnia

Su queste basi, risulta possibile applicare lo schema del teorema fondamentale di immunizzazione stocastica, imponendo le dovute condizioni sulla rischiosità degli aggregati finanziari A_t, E_t ed L_t. Come noto, il suddetto teorema afferma che, in generale, due flussi di cassa $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ ed $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$, definiti sullo stesso scadenzario $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, ..., t_m\}$ ed aventi lo stesso valore nell'istante di valutazione t $(t \le t_1)$, si diranno immunizzati in t se e solo se fra t e t + dt producono con certezza la stessa variazione di valore

$$(46) \qquad dW(t, \mathbf{x}) = dW(t, \mathbf{y}).$$

La condizione richiesta affinché la (46) sia verificata è la seguente

$$(47) \qquad D[r(t), t, \mathbf{x}] = D[r(t), t, \mathbf{y}],$$

ovvero il portafoglio si dirà istantaneamente immunizzato se e solo se la *duration* stocastica di **x** è uguale alla *duration* stocastica di **y**.

Nel nostro caso, ricordando la (25), si può ricavare una misura del rischio base di attivo e passivo[14] che, come noto, è determinato dalle loro caratteristiche tecniche. In termini formali, si avrà rispettivamente

$$\Omega_A(t,T) = -\frac{1}{A_t}\frac{\partial A_t}{\partial r(t)}, \tag{48}$$

e

$$\Omega_L(t,T) = -\frac{1}{L_t}\frac{\partial L_t}{\partial r(t)}. \tag{49}$$

Se ora indichiamo con $\varphi(t,T)$ la rischiosità, all'istante t, di uno *zero coupon bond* con scadenza in T, nel modello di Hull e White essa avrà la seguente forma

$$\begin{aligned} \varphi(t,T) &= -\frac{1}{v(t,T)}\frac{\partial v(t,T)}{\partial r(t)} = \\ &= \frac{1}{A(t,T)e^{-r(t)B(t,T)}} A(t,T)e^{-r(t)B(t,T)}B(t,T) = \\ &= B(t,T), \end{aligned} \tag{50}$$

in cui l'espressione per B(t, T) è quella riportata nell'equazione (19).

Ciò consente di derivare una semplice espressione per la *duration* stocastica delle *liabilities* e degli *assets* della compagnia. Infatti, riprendendo il ragionamento effettuato da Cox, Ingersoll e Ross, la *duration* stocastica del passivo, D_L, sarà pari alla *maturity* di un *default-free zero coupon bond* che presenti la medesima rischiosità (in termini di elasticità rispetto alla dinamica dello *spot rate*) del passivo stesso. Pertanto, all'istante iniziale t = 0, D_L sarà espressa dalla soluzione della seguente equazione:

$$\Omega_L(0,T) = \varphi(0, D_L), \tag{51}$$

in cui il lato sinistro rappresenta l'elasticità delle *liabilities* della compagnia, rispetto alle variazioni di r(t), mentre il lato destro rappresenta l'elasticità, sempre rispetto alle variazioni dello *spot rate*, di un *default-free zero coupon bond* con *maturity* pari a D_L.

Nello schema di Hull e White, con B(t, T) ricavabile dalla (19), la (51) diventa

$$\Omega_L(0,T) = \frac{1-e^{-aD_L}}{a}, \tag{52}$$

da cui, dopo alcuni passaggi, si ottiene

---

[14] Ci occupiamo per ora solo dell'attivo e del passivo di bilancio, tralasciando la componente rappresentata dal capitale proprio. Quest'ultima, data la sua importanza, sarà ripresa in dettaglio nella prossima sezione.

(53) $$D_L = -\frac{\log[1 - a\Omega_L(0,T)]}{a}.$$

In modo del tutto analogo, per quanto riguarda la *duration* stocastica dell'attivo, si avrà

(54) $$D_A = -\frac{\log[1 - a\Omega_A(0,T)]}{a}.$$

Come richiesto dal teorema generale, sarà possibile ottenere condizioni di immunizzazione istantanea del portafoglio d'intermediazione della compagnia, attraverso un'opportuna gestione dei valori di D_L e D_A.

Chiaramente, nell'ottica della gestione dinamica di attivo e passivo, si tratterà di "giocare" sulle grandezze $\Omega_L(0,T)$ e, soprattutto, $\Omega_A(0,T)$, ovvero sul mantenimento di condizioni di rischiosità compatibili con una situazione di immunizzazione del portafoglio di intermediazione. Nel caso particolare[15] in cui sia soddisfatto il vincolo di bilancio iniziale (ovvero, nel caso in cui la compagnia abbia un patrimonio netto nullo), la condizione di immunizzazione coinciderà, ovviamente, con la seguente

(55) $$D_L = D_A.$$

5. Considerazioni finali

A conclusione del presente lavoro, proponiamo alcune considerazioni a nostro avviso rilevanti.

Innanzitutto, si reputa opportuno sottolineare che la logica del teorema fondamentale di immunizzazione stocastica consente di definire quest'ultima come *hedging* istantaneo, rispetto alle oscillazioni "non anticipabili" della *term structure*. In questo senso, un portafoglio si dice immunizzato in termini stocastici se è istantaneamente non rischioso, ovvero se, "caratterizzato solvibile in t, ha una composizione tale da conservare, per periodi infinitesimi, la condizione di solvibilità"[16].

E' utile notare, a questo punto, che non essendo concretamente attuabile la cosiddetta "continua ricalibratura del portafoglio" (la quale, come noto, sarebbe l'unica via per mantenere dinamicamente immunizzato il portafoglio stesso), per l'operatore finanziario della compagnia si porrà il problema di definire l'ampiezza dell'orizzonte (strategico) di ricalibratura τ; la specificazione di τ dipenderà, in generale, sia da fattori gestionali sia da fattori di mercato (costi operativi di ricalibratura, costi di transazione, distribuzione delle scadenze di portafoglio, situazioni di shock delle grandezze guida del mercato, scadenze amministrative, ...). In genere,

[15] Caso particolare che, in generale, risulta poco realistico, come si vedrà nella prossima sezione.

[16] Sull'argomento si veda [DE FELICE *et al.*, 1991].

dunque, la dirigenza della compagnia sarà chiamata ad esprimersi sul *trade-off* instaurantesi fra la maggior precisione delle strategie di copertura, nel caso di frequenti ricalibrature del portafoglio, e il dispendio di risorse che una tale politica necessariamente comporta; infatti, è noto come la componente negativa di bilancio costituita dai costi di transazione (necessari per ritarare frequentemente la *duration* stocastica del portafoglio) possa, in tali casi, divenire talmente eccessiva da rendere non più conveniente l'utilizzo dello schema di *asset liability management* sottostante.

<u>*Problematiche di natura tecnica*</u>

Nell'ambito della compagnia assicurativa considerata, caratterizzando opportunamente il teorema di immunizzazione stocastica è possibile risalire alla condizione di equilibrio delle *duration* stocastiche di *assets* e *liabilities*.

Infatti, se consideriamo che, all'istante iniziale t, il patrimonio netto della compagnia non sarà mai nullo, ma avrà un valore positivo, definito come segue dalla differenza fra il valore attuale delle attività e delle passività

$$W_N[r(t), t] = W_A[r(t), t] - W_L[r(t), t] > 0, \tag{56}$$

e se indichiamo con D(t, A) la *duration* stocastica degli *assets* e con D(t, L) la *duration* stocastica delle *liabilities*, l'unica via per ottenere condizioni di immunizzazione del valore di mercato del patrimonio netto sarà quella di manovrare la struttura attivo/passivo[17], in modo tale che la *duration* stocastica del patrimonio netto risulti pari a zero, ovvero in modo che

$$D(t, E) = \frac{D(t, A)W_A[r(t), t] - D(t, L)W_L[r(t), t]}{W_N[r(t), t]} = 0. \tag{57}$$

Dalla (57) segue immediatamente che il valore economico del patrimonio netto risulterà istantaneamente insensibile alle oscillazioni della *term structure*, qualora si verifichi la seguente condizione

$$D(t, A)W_A[r(t), t] = D(t, L)W_L[r(t), t]. \tag{58}$$

Come si può notare, la condizione di uguaglianza fra *durations*, richiesta dal teorema generale, è qui reinterpretata in termini di uguaglianza fra due grandezze composte, ognuna delle quali è pari al prodotto fra il valore attuale dei flussi finanziari futuri (riferiti, rispettivamente, ai portafogli attivo e passivo) e la *duration* di questi ultimi.

Posto che, nelle condizioni ordinarie, si ha

[17] Ma il grado di libertà si riduce drasticamente non appena si consideri che le passività sono difficilmente manovrabili nel breve periodo e vanno piuttosto intese come vincolo, essendo definite dagli impegni assunti nei confronti degli assicurati.

(59) $$W_A[r(t),t] > W_L[r(t),t],$$

la (58) risulterà soddisfatta per

(60) $$D(t,L) > D(t,A),$$

di modo che la maggior elasticità delle passività alle variazioni "non anticipabili" della *term structure* ne compensi il minor importo rispetto alle attività.

Per approfondire l'analisi in questione, è utile trasformare la relazione (57) nel seguente modo:

(61) $$\begin{aligned} D(t,E) &= \frac{D(t,A)W_A[r(t),t] - D(t,L)W_L[r(r),t]}{W_N[r(t),t]} = \\ &= \frac{D(t,A)\{W_L[r(t),t] + W_N[r(t),t]\} - D(t,L)W_L[r(t),t]}{W_N[r(t),t]} = \\ &= D(t,A) + [D(t,A) - D(t,L)]\frac{W_L[r(t),t]}{W_N[r(t),t]} = 0. \end{aligned}$$

Dalla formulazione (61) emerge con chiarezza che la *duration* del patrimonio netto dipende dalla *duration* degli *assets*, D(t, A), dalla differenza fra le *durations* degli *assets* e delle *liabilities*, D(t, A) – D(t, L), e dal grado di indebitamento (*leverage*) corrente di portafoglio.

La (61) permette altresì di giungere ad una rilevante conclusione: infatti, la condizione di immunizzazione, D(t, E) = 0, è direttamente influenzata dal grado di *leverage* presentato dalla compagnia, poiché al crescere dell'incidenza dei mezzi propri (ovvero, al diminuire del rapporto $W_L[r(t),t]/W_N[r(t),t]$), sarà necessario ampliare il divario positivo fra D(t, L) e D(t, A), pena il mancato rispetto della (61). In altre parole, è la dimensione raggiunta dalla stessa variabile target a dettare la condizione di equilibrio fra gli altri elementi dello stato patrimoniale[18].

Conclusioni

Al di là dei suggerimenti proposti, lo scopo primario del presente lavoro è stato quello di richiamare l'attenzione sulle profonde trasformazioni in atto nel mercato finanziario e assicurativo, le quali impongono alle compagnie del ramo vita un totale ripensamento delle politiche di gestione tradizionalmente adottate. Lo spostamento graduale della domanda verso prodotti a più alto contenuto finanziario, da un lato, e il costante peggioramento delle condizioni di economicità della gestione tecnico/assicurativa, dall'altro, "hanno fatto sì che la fase di ripensamento tuttora in corso, abbia interessato in modo particolare la funzione finanziaria"[19]. Oggi le polizze dotate di un elevato contenuto di *leverage* rappresentano la quasi totalità dei

[18] Sull'argomento, si veda [PACI, 1990] a pagina 318. Inoltre, per ulteriori indicazioni sul ruolo assunto dal *leverage* nell'economia degli intermediari finanziari, si veda [VALLERO, 1995] alle pagine da 29 a 31.
[19] Sull'argomento, si veda [PACI, 1990] a pagina 327.

contratti esistenti, e fra queste spiccano le polizze a tasso variabile. In questo contesto, la necessità di mantenere sotto controllo l'*interest rate risk* si manifesta in maniera assai stringente, e non è sostenibile la posizione di chi afferma che "nei segmenti rappresentati da polizze indicizzate all'attivo si ha automaticamente la copertura dal rischio d'interesse, essendo il rischio di *underperformance* trasferito sull'assicurato"[20]. Infatti, tale posizione risulta sensata solo in prima istanza, questo poiché, qualora i rendimenti dell'attivo non fossero competitivi rispetto ai tassi di mercato, si verificherebbero congiuntamente:

a) l'esercizio delle opzioni di riscatto offerte agli assicurati, e soprattutto
b) un effetto negativo sulla futura domanda di polizze.

La sfida cui sono chiamate le compagnie è dunque affascinante ma non esente da rischi: la nostra trattazione si è focalizzata su un aspetto (a nostro avviso) importante del problema, quello della gestione del rischio di tasso, cercando al contempo di richiamare l'attenzione sulle peculiarità dell'ambito di studio considerato, nonché sull'influenza che queste ultime esercitano su qualsivoglia strategia di *asset liability management* perseguita.

Per concludere, è significativo ricordare che il filo conduttore del nostro lavoro è stato quello di proporre non solo una strumentazione adatta al contesto aleatorio dei mercati attuali, ma anche e soprattutto una proposta di revisione dell'atteggiamento degli operatori di fronte all'incertezza; si è affermata, in altri termini, l'esigenza di un passo in avanti prima di tutto dal punto di vista culturale, affinché l'incertezza non sia più trattata "al più di sfuggita, come [...] un accessorio fastidioso e inafferrabile"[21], ma diventi oggetto di considerazione e di studio.

Riferimenti bibliografici

1. BRIYS, E. e DE VARENNE, F., 1997, On the Risk of Life Insurance Liabilities: Debunking Some Common Pitfalls, *The Journal of Risk and Insurance*, 64(4), 673–694.
2. COPELAND, T.E. e WESTON, J.E., 1988, *Financial Theory and Corporate Policy*, Addison Wesley, Massachussets.
3. COX, J.C., INGERSOLL, J.E. e ROSS S.A., 1979, Duration and the Measurement of the Basis Risk, *Journal of Business*, 52(1), 51–61.
4. DE FELICE, M. e MORICONI, F., 1991, *La Teoria dell'Immunizzazione Finanziaria. Modelli e Strategie*, Il Mulino, Bologna.
5. DE FINETTI, B. e EMANUELLI, F., 1967, *Economia delle Assicurazioni. Trattato Italiano di Economia*, UTET, Torino.
6. HULL, J.C., 1997, *Opzioni, Futures e Altri Derivati*, Il Sole 24 Ore Libri e Prentice–Hall International, Milano.
7. HULL, J.C. e WHITE, A.R., 1990, Pricing Interest Rate Derivative Securities, *Review of Financial Studies*, 3(4), 573–592.
8. ITÔ, K., 1951, On Stochastic Differential Equations. Memoirs, *American Mathematical Society*, 4, 1–51.
9. JAMSHIDIAN, F., 1989, An Exact Bond Option Formula, *The Journal of Finance*, XLIV(1), 205–209.

[20] Sull'argomento si veda [MOSCHETTA, 1998] a pagina 97.
[21] Sull'argomento si veda [DE FINETTI *et al.*, 1967] a pagina 3.

10. MACAULAY, F.R., 1938, Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in U.S. since 1856, *National Bureau of Economic Research*, New York.
11. MOSCHETTA, E., 1998, La Gestione del Rischio d'Interesse nelle Compagnie d'Assicurazione del Ramo Vita, *Finanza, Marketing e Produzione - Rivista di Economia d'Impresa dell'Università L. Bocconi*, XVI(1), 81–115.
12. PACI, S. (curatore), 1990, *Le Imprese di Assicurazione. Profili Gestionali*, EGEA, Milano.
13. PETIX, L., 1984, *L'impresa d'Assicurazioni. Aspetti Tecnici e Finanziari della Gestione*, CEDAM, Padova.
14. VALLERO, S., 1995, *L'Asset and Liability Management nelle Banche. Fondamenti di Metodo e Problematiche Realizzative*, Il Sole 24 Ore Libri, Milano.
15. VASICEK, O.A., 1977, An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics*, 5, 177–188.