

# CAPITOLO VI

## DIPENDENZA A LUNGO TERMINE NEL MERCATO FINANZIARIO ITALIANO

### 1. INTRODUZIONE

L'approccio classico relativo all'analisi dei vari aspetti inerenti al prezzo  $P(t)$  delle attività finanziarie (aspetti quali la natura dei processi generatori, la struttura delle leggi dinamiche di evoluzione, l'indagine delle serie temporali, la verifica delle implicazioni economico-finanziarie, ...), come si è venuto determinando in letteratura fino dai primi pionieristici lavori di Bachelier L. ([Bachelier L., 1900]) e di Working H. ([Working H., 1934]), si è sostanziato nell'impiego, nello sviluppo e nella elaborazione di ipotesi, di teorie, di metodi e di strumenti propri dell'ambito stocastico e tradizionalmente sintetizzabili nell'assunzione di indipendente ed identica distribuzione di probabilità delle variabili casuali  $P(t+\Delta t)-P(t)$ , con  $t = 1, 2, \dots, N-\Delta t$  per ogni prescelto valore di  $\Delta t$  che, congiuntamente, specificano un opportuno processo stocastico (ad esempio si veda [Fama E. F., 1963], [Mandelbrot B. B., 1963b], [Mantegna R. N., 1991], [Peters E. E., 1991b], [Corazza M. *et al.*, 1993a] e [Peters E. E., 1994]). In particolare, nelle moderne teorie economico-finanziarie, quali, ad esempio, quelle sull'impossibilità di effettuare l'arbitraggio e sul derivative pricing, si è venuta a determinare,

quale paradigma, l'assunzione dell'ipotesi di una distribuzione di probabilità indipendente (per maggiori dettagli si veda [Mandelbrot B. B., 1971], [LeRoy S., 1989], [Fama E. F., 1991], [Peters E. E., 1991b], [Rossi F. M. *et al.*, 1992], [Machones M. *et al.*, 1994] e [Peters E. E., 1994]).

Peraltro, in un crescente numero di analisi empiriche si è posta in evidenza la parziale inadeguatezza dell'assunzione di una tale ipotesi, a causa delle costanti presenze di auto-dipendenza sia a breve-medio termine che a lungo termine. Questa ultima peculiarità ha condotto molti autori a testare l'ipotesi sulla presenza di indipendenza a lungo termine nelle serie temporali economico-finanziarie mediante l'applicazione dell'analisi *rescaled range* e, nel caso di suo rigetto, di misurare l'"intensità" di tale dipendenza mediante la determinazione del valore dell'esponente di Hurst  $H$  ([Greene M. T. *et al.*, 1977], [Greene M. T. *et al.*, 1979], [Booth G. G. *et al.*, 1982], [Helms B. P. *et al.*, 1984], [Peters E. E., 1989], [Peters E. E., 1991b], [Allevi E. *et al.*, 1993], [Ambrose B. W. *et al.*, 1993], [Cheung Y.-W. *et al.*, 1993], [Corazza M. *et al.*, 1993a], [Corazza M. *et al.*, 1993c], [Salzano M., 1993], [Jacobsen B., 1994] e [Peters E. E., 1994]). È da porre in evidenza come l'esponente di Hurst  $H$  sia, in generale, di natura frattale. Ciò si ha per le relazioni esistenti tra questo ultimo e alcune quantità proprie dell'ambito frattale (per maggiori dettagli si veda [Falconer K., 1990] e la sezione 2. di questo stesso capitolo) e si ha, essendo soddisfatte date condizioni, per le relazioni esistenti tra lo stesso esponente di Hurst  $H$  e l'esponente caratteristico  $\alpha$  di una distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile, anch'essa, in generale, di natura frattale (per maggiori dettagli si veda la sezione 2. del **CAPITOLO V**, [Mandelbrot B. B. *et al.*, 1968], [Greene M. T. *et al.*, 1977], [Peters E. E., 1991b] e la sezione 2. di questo stesso scapitolo).

Questo capitolo propone l'analisi del mercato finanziario italiano, rappresentato dall'insieme di indici finanziari e di titoli azionari specificati nella sezione 3. del **CAPITOLO V**, al fine di testare statisticamente l'ipotesi sulla presenza di indipendenza a lungo termine e, nel caso di suo rigetto, di stimare l'"intensità" di tale dipendenza, ed al fine di verificarne empiricamente la natura frattale. In particolare, nella sezione 2. si illustrano sinteticamente degli aspetti teorici necessari all'impostazione e allo sviluppo di una tale analisi del mercato finanziario italiano; nella sezione 3. si

presentano gli aspetti applicativi impiegati nella conduzione del test statistico sulla specificata ipotesi, i risultati ottenuti mediante quest'ultimo e, nel caso di suo rigetto, le stime dell'"intensità" di tale dipendenza; nella sezione 4. si presentano gli aspetti applicativi impiegati nella conduzione della verifica empirica della specificata relazione tra l'esponente di Hurst  $H$  e l'esponente caratteristico  $\alpha$  di una distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile; nella sezione 5. si propongono alcune osservazioni e considerazioni finali.

## 2. ASPETTI TEORICI

Gli aspetti teorici necessari all'impostazione e allo sviluppo dell'analisi del mercato finanziario italiano riguardano, oltre a quanto trattato nel **CAPITOLO III** e nel **CAPITOLO IV**, la conoscenza delle relazioni esistenti tra l'esponente di Hurst  $H$  e alcune quantità proprie dell'ambito frattale e tra lo stesso esponente di Hurst  $H$  e l'esponente caratteristico  $\alpha$  di una distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile.

(2.A) Relazioni tra l'esponente di Hurst  $H$  e quantità proprie dell'ambito frattale: l'illustrazione di questa relazione è data nel seguente risultato teorico (per i cui maggiori dettagli si veda [Falconer K., 1990]):

**Teorema 2.A.1.** *Sia dato un moto Browniano frazionario (unidimensionale) di indice  $H$ , con  $0 < H < 1$ ,  $X_H(t)$  e sia dato il suo grafico  $G_{X_H(t)} \stackrel{def}{=} \{(t, X_H(t)), t \in [0, +\infty[ \}$ . Allora, con probabilità uguale a uno, si ha:*

$$\dim_H(G_{X_H(t)}) = \dim_B(G_{X_H(t)}) = 2 - H. \quad (2.A.1)$$

È quasi superfluo porre in evidenza come, poichè  $H \in ]0, 1[$ , si abbia

$$1 < \dim_H(G_{X_H(t)}) = \dim_B(G_{X_H(t)}) < 2. \quad (2.A.2)$$

(2.B) Relazioni tra l'esponente di Hurst  $H$  e l'esponente caratteristico  $\alpha$  di una distribuzione Pareto-Lévy stabile: l'illustrazione di questa relazione è data nel seguente risultato teorico (per i cui maggiori dettagli si veda [Mandelbrot B. B. *et al.*, 1968] e [Greene M. T. *et al.*, 1977]):

**Teorema 2.B.1.** Sia dato un processo stocastico Pareto-Lévy stabile  $X(t)$  con esponente caratteristico  $\alpha$  tale che  $\alpha \in ]1, 2]$ . Allora si ha:

$$\frac{R[X(t); T]}{S[X(t); T]} \sim aT^{1/\alpha} \text{ quando } T \rightarrow +\infty \quad (2.B.1)$$

dove

$R[\cdot; \cdot]/S[\cdot; \cdot]$ : rescaled range

o, equivalentemente,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{E\{R[X(t); T]/S[X(t); T]\}}{aT^{1/\alpha}} = 1. \quad (2.B.2)$$

È da notare come, per la relazione (3.2) del **CAPITOLO III** o, equivalentemente, per la relazione (3.3) dello stesso **CAPITOLO III**, si abbia

$$\frac{1}{\alpha} = H \text{ quando } \alpha \in ]1, 2]. \quad (2.B.3)$$

### 3. ASPETTI APPLICATIVI E RISULTATI RELATIVI ALLA VERIFICA DELLA IPOTESI NULLA SPECIFICATA

In questa sezione si presentano gli aspetti applicativi impiegati nella verifica della ipotesi nulla specificata sulla presenza di indipendenza a lungo termine ed i risultati ottenuti mediante la sua conduzione, realizzata utilizzando le serie temporali dei valori dei tassi di rendimento logaritmico giornaliero ( $\Delta t = 1$ ), settimanale ( $\Delta t = 5$ ) e mensile ( $\Delta t = 22$ ) specificate nella sezione 4. del **CAPITOLO V**. Tali serie temporali si utilizzano al fine di testare l'ipotesi nulla sulla presenza di indipendenza a lungo termine e, nel caso di suo rigetto, al fine di stimare l'“intensità” di tale dipendenza mediante l'applicazione dell'analisi *rescaled range* proposta nel **CAPITOLO III**. In particolare, la ipotesi nulla specificata si testa mediante l'utilizzo del test parametrico di tipo *V* proposto nelle sezioni 3. e 4. del **CAPITOLO III** e,

nel caso di suo rigetto, l'“intensità” di tale dipendenza si stima mediante la determinazione del valore della stima dell'esponente di Hurst

$$\hat{H}_{\Delta t, q} \quad (3.1)$$

dove

$\Delta t$ : incremento temporale,

$q$ : ordine della struttura di auto-dipendenza a breve termine.

Tale determinazione, in sostanza, si basa sulla procedura di stima proposta nella sezione 3. del **CAPITOLO III**. È da porre in evidenza come non risulti necessario congetturare che il processo stocastico specificato dai tassi di rendimento logaritmico sia un moto Browniano frazionario di indice  $H$ , poichè, si ricorda, è possibile verificare che tale procedura di stima è robusta relativamente all'ipotesi di Normalità per i processi che generano le serie temporali. È ancora da notare come si sia puntualizzata tale analisi *rescaled range* fissando i valori delle quantità  $N_0$  (Passo 1 della procedura di stima specificata) e  $S$  (Passo 5 della procedura di stima specificata) come segue nella (3.2), ciò al fine di ottenere un incremento della numerosità campionaria delle sotto-serie temporali  $x_{i,N}$ , con  $i = 1, 2, \dots, K$ , con  $K = \text{Int}(T/N)$  (Passo 2 della procedura di stima specificata), sempre corrispondente a quella del mese borsistico per ogni valore dell'incremento temporale  $\Delta t$ :

$$(N_0, S) = \begin{cases} (22, 22) & \text{se } \Delta t = 1 \\ (4, 4) & \text{se } \Delta t = 5 \\ (2, 1) & \text{se } \Delta t = 22 \end{cases} \quad (3.2)$$

I risultati così ottenuti per la verifica della ipotesi nulla specificata sono riportati graficamente dalla Figura 1 alla Figura 156 e sono presentati in Tabella 3.1 e in Tabella 3.2. In particolare, si ricorda che, sia nelle Figure che nelle Tabelle, l'accettazione della ipotesi nulla specificata si rappresenta mediante il simbolo “+”, il rigetto della specificata ipotesi nulla in corrispondenza di livelli di significatività  $\alpha \geq 0.100$  (debole auto-dipendenza) si rappresenta mediante il simbolo “o” e il rigetto della specificata ipotesi nulla in corrispondenza di livelli di significatività  $0.010 \leq \alpha \leq 0.050$  (forte auto-dipendenza) si rappresenta mediante il simbolo “•”.

Tabella 3.1

INDICE	$\hat{H}_{1,0}$	A/R	$\hat{H}_{1,1}$	A/R	$\hat{H}_{5,0}$	A/R	$\hat{H}_{22,0}$	A/R
COMIT	0.661	•	0.657	•	0.694	•	0.760	•
COMIT Assicurative	0.761	•	0.760	•	0.812	•	0.891	•
COMIT Bancarie	0.732	•	0.730	•	0.792	•	0.892	•
COMIT Comunicaz.	0.738	•	0.732	•	0.766	•	0.732	•
COMIT Diverse	0.726	•	0.734	•	0.794	•	0.882	•
COMIT Finanziarie	0.739	•	0.740	•	0.787	•	0.854	•
COMIT Immobiliari	0.802	•	0.796	•	0.852	•	0.947	•
COMIT Industriali	0.744	•	0.740	•	0.777	•	0.854	•
MIB Storico	0.617	•	0.629	•	0.679	•	0.686	○

Tabella 3.2

TITOLO	$\hat{H}_{1,0}$	A/R	$\hat{H}_{1,1}$	A/R	$\hat{H}_{5,0}$	A/R	$\hat{H}_{22,0}$	A/R
ALITALIA	0.581	○	0.578	○	---	+	---	+
ANSALDO Trasporti	0.589	○	0.622	○	---	+	0.590	•
B.ca COMMER. IT.	0.684	•	0.681	•	0.750	•	0.832	•
B.ca NAZ. del LAV.	---	+	---	+	---	+	0.627	○
B.co AMBROVEN.	0.593	○	0.462	○	0.560	○	0.661	•
BENETTON	---	+	---	+	---	+	0.688	○
CEMENTIR	0.568	○	0.578	○	---	+	---	+
CIGA Hotels	0.573	•	0.581	○	0.643	○	0.722	○
COGEFAR	0.655	•	0.654	•	0.696	•	0.744	○
DALMINE	0.621	○	0.625	○	0.735	○	0.795	○
ENICHEM AUG.	0.712	•	0.705	•	0.753	○	---	+
FERRUZZI Finanz.	0.687	•	0.682	•	0.720	•	0.804	○
FIAT	0.710	•	0.709	•	0.747	•	0.807	•
FIAT Privilegiate	0.700	•	0.704	•	0.747	•	0.822	•
FINMECCANICA	0.772	•	0.763	•	0.811	•	0.900	•
GENERALI	0.722	•	0.724	•	0.773	•	0.867	•
ITALCABLE	0.670	•	0.667	•	0.708	•	0.819	○
L'ESPRESSO	0.621	○	0.640	○	0.671	○	0.689	○
MONDADORI	0.686	•	0.681	•	0.739	○	0.655	•
MONTEDISON	0.647	•	0.639	•	0.680	•	0.762	○
MONTEFIBRE	0.461	○	0.444	○	0.480	•	0.468	•
OLIVETTI	0.644	•	0.641	•	0.686	•	---	+
PIRELLI & C.	0.673	•	0.668	•	0.723	•	0.766	○
RAS	0.747	•	0.747	•	0.793	•	0.854	•
RCS Libri	0.695	•	0.701	•	0.734	•	0.830	•
SME	0.559	○	0.562	○	0.617	○	0.633	○
SNIA BPD	0.733	•	0.728	•	0.769	•	0.877	•
STANDA	---	+	---	+	---	+	0.718	○
STEFANEL	0.496	○	0.482	○	0.608	○	0.697	•
STET	0.734	•	0.725	•	0.759	•	0.820	○

Dai risultati riportati graficamente dalla Figura 1 alla Figura 156 e

presentati in Tabella 3.1 e in Tabella 3.2 si hanno le seguenti osservazioni e considerazioni:

(3.1) in relazione alla indipendenza a lungo termine dei tassi di rendimento logaritmico degli indici, si rigetta la ipotesi nulla specificata in corrispondenza ai livelli di significatività  $0.010 \leq \alpha \leq 0.050$  (forte auto-dipendenza), per ogni valore di  $\Delta t$  e per ogni valore di  $q$  (terza, quinta, settima e nona colonna della Tabella 3.1)<sup>1</sup>;

(3.2) relativamente alla dipendenza dei tassi di rendimento logaritmico degli indici, i valori assunti da  $\hat{H}_{\Delta t, q}$ , con  $\Delta t = 1, 5, 22$  e con  $q = 0, 1$  (seconda, quarta, sesta e ottava colonna della Tabella 3.1), hanno come intervallo di variazione  $[0.617, 0.947]$  e, dunque, tassi che risultano positivamente auto-dipendenti o, equivalentemente, persistenti;

(3.3) in relazione alla dipendenza dei tassi di rendimento logaritmico quotidiano ( $\Delta t = 1$ ), i valori assunti dalla stima dell'esponente di Hurst congetturando, dapprima, l'assenza di una struttura di auto-dipendenza a breve termine ( $q = 0$ ) (seconda colonna della Tabella 3.1) e, successivamente, la presenza di una tale struttura ( $q = 1$ ) (quarta colonna della Tabella 3.1), non differiscono palesemente. Ciò, confermando le considerazioni (4.A.3), (4.B.4) e (4.C.2) presentate nel **CAPITOLO III** e relative ad approcci indipendenti da quello qui utilizzato, evidenziano una scarsa significatività di tale struttura;

(3.4) relativamente alla indipendenza a lungo termine dei tassi di rendimento logaritmico dei titoli, in generale, si rigetta la ipotesi nulla specificata prevalentemente in corrispondenza dei livelli di significatività  $0.010 \leq \alpha \leq 0.050$  (forte auto-dipendenza), per ogni valore di  $\Delta t$  e per ogni valore di  $q$  (terza, quinta, settima e nona colonna della Tabella 3.2). Negli specifici casi di accettazione di tale ipotesi (ALITALIA, ANSALDO Trasporti, Banca NAZIONALE del LAVORO, BENETTON, CEMENTIR, ENICHEM AUGUSTA, OLIVETTI e STANDA), questa si ha

---

<sup>1</sup> È da porre in evidenza come, sia il test parametrico di tipo  $V$  (3.5) che la procedura di stima proposti nelle sezioni 3. e 4. del **CAPITOLO III**, risultino entrambi asintotici relativamente a  $T$  (numerosità campionaria). Ciò comporta che la loro "attendibilità" cresca al crescere dei valori di  $T$ .

in corrispondenza solo di alcuni valori di  $\Delta t$  e di alcuni valori di  $q$ ;

(3.5) in relazione alla dipendenza dei tassi di rendimento logaritmico dei titoli, i valori assunti da  $\hat{H}_{\Delta t, q}$ , con  $\Delta t = 1, 5, 22$  e con  $q = 0, 1$  (seconda, quarta, sesta e ottava colonna della Tabella 3.2), hanno come intervallo di variazione  $[0.559, 0.900]$  e, dunque, tassi che risultano positivamente auto-dipendenti o, equivalentemente, persistenti. È da notare come negli specifici casi di tassi negativamente auto-dipendenti o, equivalentemente, anti-persistenti (Banco AMBROVENETO, MONTEFIBRE e STEFANEL), aventi come intervallo di variazione  $[0.444, 0.496]$ , in sostanza, tale “comportamento” si abbia in corrispondenza solo di alcuni valori di  $\Delta t$  e di alcuni valori di  $q$ ;

(3.6) relativamente alla dipendenza dei tassi di rendimento logaritmico quotidiano, i valori assunti dalla stima dell'esponente di Hurst congetturando, rispettivamente, l'assenza di una struttura di auto-dipendenza a breve termine ( $q = 0$ ) (seconda colonna della Tabella 3.2) e la presenza di una tale struttura ( $q = 1$ ) (quarta colonna della Tabella 3.2), non differiscono palesemente. Ciò, confermando le osservazioni (4.A.3), (4.B.4) e (4.C.2) presentate nel **CAPITOLO III** e relative ad approcci indipendenti da quello qui utilizzato, confermando la precedente osservazione (3.3), evidenziano una scarsa significatività di tale struttura;

(3.7) in relazione alla dipendenza dei tassi di rendimento logaritmico, i valori assunti da  $\hat{H}_{\Delta t, q}$  in relazione agli indici (Tabella 3.1) sono, in generale, maggiori di quelli assunti in relazione ai titoli (Tabella 4.2), i quali ultimi così evidenziano una minore “distanza” dalla indipendenza ( $H = 0.5$ ) rispetto ai primi;

(3.8) ancora relativamente alla stessa dipendenza, i valori assunti da  $\hat{H}_{5,0}$  sono, in generale, maggiori di quelli assunti da  $\hat{H}_{1,q}$ , con  $q = 0, 1$  (sesta, quarta e seconda colonna delle Tabelle 3.1 e 3.2), e i valori assunti da  $\hat{H}_{22,0}$  sono, in generale, maggiori di quelli assunti da  $\hat{H}_{5,0}$  (ottava e sesta colonna delle Tabelle 3.1 e 3.2), anche se il livello di significatività in corrispondenza del quale si rigetta la ipotesi nulla specificata passa, in generale, da quello associato alla forte auto-dipendenza (“•”) a quello associato alla debole auto-dipendenza (“o”) (terza, quinta, settima e nona colonna delle Tabelle 3.1 e 3.2 e dalla Figura 1 alla Figura 156);



(3.9) infine, in relazione alle dimensioni frattali dei grafici della traiettoria dei processi stocastici generatori dei tassi di rendimento logaritmico giornaliero, settimanale e mensile (dimensioni introdotte nel **Teorema 2.A.1.**), queste, avendo come intervallo di variazione [1.053, 1.383] in corrispondenza degli indici e [1.100, 1.556] in corrispondenza dei titoli e, dunque, risultando, in generale, non intere ne evidenziano la natura frattale.

#### 4. ASPETTI APPLICATIVI E RISULTATI RELATIVI ALLA VERIFICA EMPIRICA DELLA (2.B.3)

In questa sezione si presentano gli aspetti applicativi impiegati nella verifica empirica della relazione (2.B.3) e i risultati ottenuti mediante la sua realizzazione condotta utilizzando le stime degli esponenti caratteristici relativi alle distribuzioni Pareto-Lévy stabili associate ai tassi di rendimento logaritmico sia degli indici finanziari che dei titoli azionari (si ricorda che tali stime sono determinate nella sezione 4. del **CAPITOLO III**) e utilizzando le stime degli esponenti di Hurst associate agli stessi tassi e determinate nella precedente sezione. È da notare come tale analisi permetta di verificare la “convergenza”, o meno, dei risultati ottenuti mediante la applicazione dei due citati approcci, distinti e indipendenti, alle stesse serie temporali e, dunque, permetta di confermare ulteriormente, o meno, l’“attendibilità” delle verifiche fino ad ora realizzate nel **CAPITOLO V** e in questo stesso capitolo.

Tale verifica, quando risulti soddisfatta la richiesta condizione sulla appartenenza all’intervallo di variazione  $[1, 2[$  dell’esponente caratteristico  $\alpha_{\Delta t, q}$ , con  $\Delta t = 1, 5, 22$  e  $q = 0, 1$ , associato ad un dato tasso di rendimento logaritmico, si basa sul confronto tra il valore del reciproco di tale esponente caratteristico e il valore dell’esponente di Hurst  $H_{\Delta t, q}$ , con  $\Delta t = 1, 5, 22$  e  $q = 0, 1$ , associato allo stesso tasso, valori teoricamente uguali. In particolare, si realizza nella determinazione dei valori del prodotto campionario  $\hat{\alpha}_{\Delta t, q} \hat{H}_{\Delta t, q}$ , con  $\Delta t = 1, 5, 22$  e  $q = 0, 1$ , teoricamente uguale a 1. È quasi superfluo porre in evidenza come, poichè  $\alpha_{\Delta t, q} \in [1, 2[$  e  $H_{\Delta t, q} \in ]0, 1[$ , con  $\Delta t = 1, 5, 22$  e

$q = 0, 1$ , in generale, si abbia

$$0 < \alpha_{\Delta t, q} H_{\Delta t, q} < 2, \Delta t = 1, 5, 22, q = 0, 1. \quad (4.1)$$

I risultati così ottenuti sono presentati in Tabella 4.1 e in Tabella 4.2.

Tabella 4.1

INDICE	$\alpha_{1,0} H_{1,0}$	$\alpha_{1,1} H_{1,1}$	$\alpha_{5,0} H_{5,0}$	$\alpha_{22,0} H_{22,0}$
COMIT	1.142	1.137	1.263	1.448
COMIT Assicurative	1.284	1.284	1.478	1.716
COMIT Bancarie	1.278	1.272	1.468	1.784
COMIT Comunicaz.	1.204	1.209	1.468	1.456
COMIT Diverse	1.206	1.207	1.416	1.581
COMIT Finanziarie	1.271	1.242	1.484	1.637
COMIT Immobiliari	1.357	1.339	1.575	1.894
COMIT Industriali	1.264	1.236	1.383	1.616
MIB Storico	0.945	0.972	1.132	1.319

Tabella 4.2

TITOLO	$\alpha_{1,0} H_{1,0}$	$\alpha_{1,1} H_{1,1}$	$\alpha_{5,0} H_{5,0}$	$\alpha_{22,0} H_{22,0}$
ALITALIA	0.833	0.827	0.837	0.852
ANSALDO Trasporti	0.875	0.921	0.861	1.106
B.ca COMMERC. IT.	1.187	1.180	1.362	1.664
B.ca NAZ. del LAV.	0.775	0.778	0.895	1.181
B.co AMBROVEN.	0.950	0.738	1.074	1.322
BENETTON	0.801	0.802	0.847	1.275
CEMENTIR	0.932	0.952	0.829	0.900
CIGA Hotels	0.908	1.039	1.078	1.267
COGEFAR	1.013	1.024	1.270	1.375
DALMINE	0.804	0.809	1.212	1.325
ENICHEM AUG.	1.091	1.084	1.179	0.784
FERRUZZI Finanz.	0.905	0.899	1.027	0.949
FIAT	1.225	1.224	1.310	1.505
FIAT Privilegiate	1.211	1.217	1.342	1.537
FINMECCANICA	1.155	1.153	1.412	1.690
GENERALI	1.242	1.247	1.366	1.555
ITALCABLE	1.058	1.052	1.325	1.638
L'ESPRESSO	0.698	0.723	1.069	—
MONDADORI	0.862	0.854	1.139	1.170
MONTEDISON	1.040	1.029	1.151	1.464
MONTEFIBRE	0.730	0.702	0.839	0.804
OLIVETTI	1.119	1.115	1.220	0.960
PIRELLI & C.	1.103	1.106	1.243	1.465
RAS	1.267	1.262	1.414	1.635
RCS Libri	1.066	1.068	1.318	1.423
SME	0.894	0.896	1.110	1.071

SNIA BPD	1.327	1.321	1.443	1.575
STANDA	0.511	0.542	0.512	0.836
STEFANEL	0.754	0.739	1.041	1.212
STET	1.229	1.211	1.454	1.640

Dai risultati presentati in Tabella 4.1 e in Tabella 4.2 si hanno le seguenti osservazioni e considerazioni:

(4.1) relativamente alla verifica della relazione (2.B.3) associata ai tassi di rendimento logaritmico degli indici, poichè i valori assunti dai prodotti campionari  $\hat{\alpha}_{1,q} \hat{H}_{1,q}$ ,  $q = 0, 1$ , e  $\hat{\alpha}_{\Delta t,0} \hat{H}_{\Delta t,0}$ ,  $\Delta t = 5, 22$ , appartengono, rispettivamente, all'intervallo  $[0.945, 1.357]$  (seconda e terza colonna della Tabella 4.1) e all'intervallo  $[1.132, 1.894]$  (quarta e quinta colonna della Tabella 4.1), questa risulta verificata in corrispondenza di  $\Delta t = 1$  e, in sostanza, non verificata in corrispondenza di  $\Delta t = 5, 22$ . È da porre in evidenza come quest'ultimo risultato sia anche dovuto e alla scelta del giorno, rappresentativo del mese, in cui rilevare il valore rettificato dei prezzi di chiusura da utilizzare per determinare gli specificati tassi (in particolare l'ultimo venerdì del mese o, se non calcolato/quotato, il primo giorno antecedente a tale venerdì in cui lo risulti) e alla "decescente" attendibilità della procedura di stima proposta nella sezione 3. del **CAPITOLO III** al decrescere della numerosità campionaria;

(4.2) relativamente alla verifica della relazione (2.B.3) associata ai tassi di rendimento logaritmico dei titoli, poichè i valori assunti dai prodotti campionari  $\hat{\alpha}_{1,q} \hat{H}_{1,q}$ , con  $q = 0, 1$ , e  $\hat{\alpha}_{\Delta t,0} \hat{H}_{\Delta t,0}$ ,  $\Delta t = 5, 22$ , appartengono, rispettivamente e ad eccezione del titolo STANDA, all'intervallo  $[0.702, 1.327]$  (seconda e terza colonna della Tabella 4.2) e all'intervallo  $[0.784, 1.690]$  (quarta e quinta colonna della Tabella 4.2), questa risulta verificata in corrispondenza di  $\Delta t = 1$  e parzialmente verificata in corrispondenza di  $\Delta t = 5, 22$ . È ancora da porre in evidenza come quest'ultimo risultato sia anche dovuto e alla scelta del giorno, rappresentativo del mese, in cui rilevare il valore rettificato dei prezzi di chiusura da utilizzare per determinare i tassi specificati e alla "decescente" attendibilità della procedura di stima proposta nella sezione 3. del **CAPITOLO III** al decrescere della numerosità campionaria;

(4.3) ancora in relazione alla stessa verifica, i valori assunti dai prodotti

campionari  $\hat{\alpha}_{1,q} \hat{H}_{1,q}$ , con  $q = 0, 1$ , congetturando, rispettivamente, l'assenza di una struttura di auto-dipendenza ( $q = 0$ ) (seconda colonna delle Tabelle 4.1 e 4.2) e la presenza di una tale struttura del primo ordine ( $q = 1$ ) (terza colonna delle Tabelle 4.1 e 4.2), non differiscono palesemente. Ciò, confermando le osservazioni (4.A.3), (4.B.4) e (4.C.2) presentate nel **CAPITOLO III** e confermando le osservazioni (3.3) e (3.6) presentate nella precedente sezione, evidenziano una scarsa significatività di tale struttura.

## 5. OSSERVAZIONI E CONSIDERAZIONI FINALI

Dai risultati ottenuti mediante la conduzione delle due distinte e, fra di loro, indipendenti verifiche presentate, rispettivamente, nelle sezioni 3. e 4. si hanno le seguenti convergenti osservazioni e considerazioni finali:

(5.1) la distribuzione di probabilità dei tassi di rendimento logaritmico risulta significativamente auto-dipendente sia per gli indici che per i titoli. In generale, poichè il valore assunto da  $\hat{H}_{\Delta t, q}$  appartiene all'intervallo  $[0.5, 1[$ , tale distribuzione risulta positivamente auto-dipendente o, equivalentemente, persistente;

(5.2) il rigetto della tradizionale ipotesi di indipendenza per le variabili casuali tassi di rendimento logaritmico, comporta la conseguente necessità di congetturare processi generatori di tali tassi la cui natura sia caratterizzata, oltre che dalla usuale componente stocastica, anche da una "evidente" componente deterministica capace di realizzare la struttura di auto-dipendenza;

(5.3) i risultati relativi alla stabilità Pareto-Lévy congetturata dei tassi di rendimento logaritmico e quelli relativi alla auto-dipendenza della distribuzione di probabilità degli stessi tassi, risultati ottenuti mediante la applicazione di due analisi distinte e, fra di loro, indipendenti, risultano convergenti per  $\Delta t = 1$  e parzialmente convergenti per  $\Delta t = 5$  e per  $\Delta t = 22$ , così ancora confermando la evidente necessità del rigetto dell'*Efficient Market Hypothesis (EMH)* a favore di una sua versione più generale (ad esempio si veda [Peters E. E., 1991b] e [Peters E. E., 1994]);

(5.4) infine, è da notare come, poichè dall'impiego congiunto del **Teorema 2.B.1.** e della relazione (2.B.3) si ha che

$$H \in ]0.5, 1[, \quad (5.1)$$

nel **Criterio di Dominanza  $\delta$ - $S_\delta$ - $\beta$**  proposto nella sezione 6. del **CAPITOLO V**, si possano sostituire le condizioni  $\alpha_X, \alpha_Y \in ]1, 2]$  e  $\alpha_X = \alpha_Y$  con quelle equivalenti e relative all'auto-dipendenza  $H_X, H_Y \in ]0.5, 1]$  e  $H_X = H_Y$ .



Figura 1

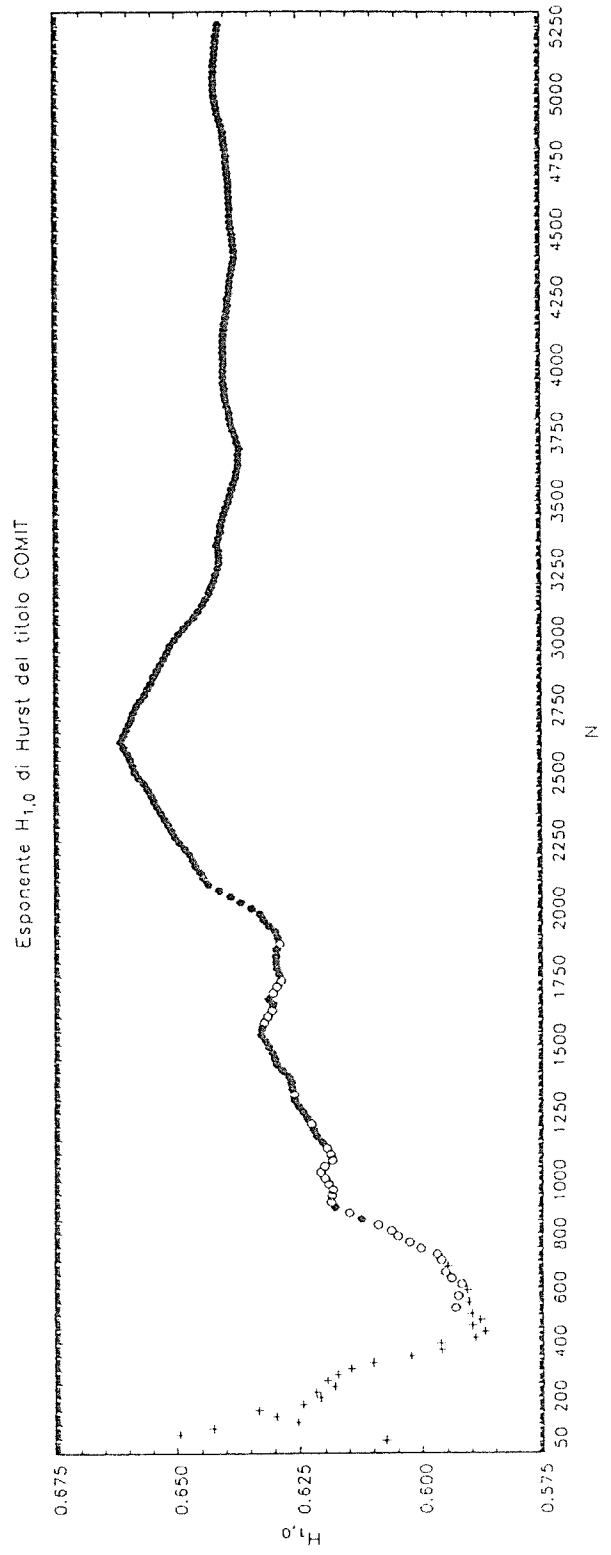
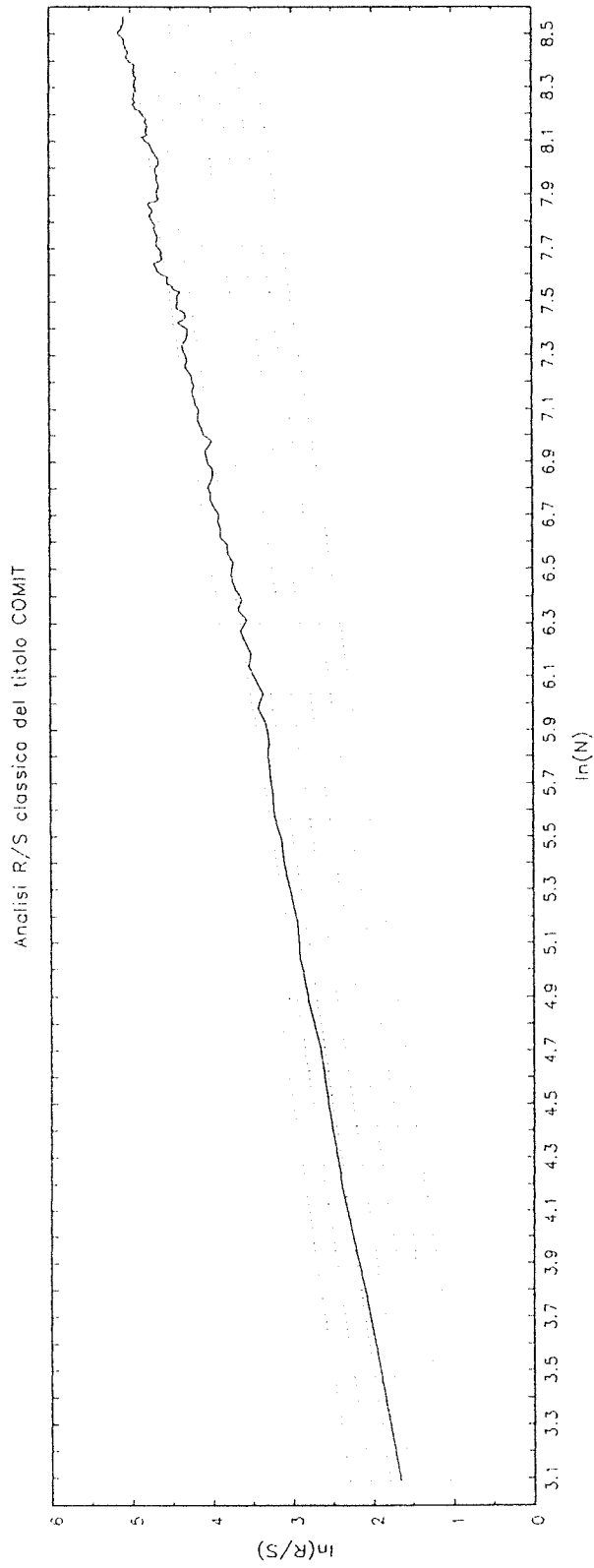


Figura 2

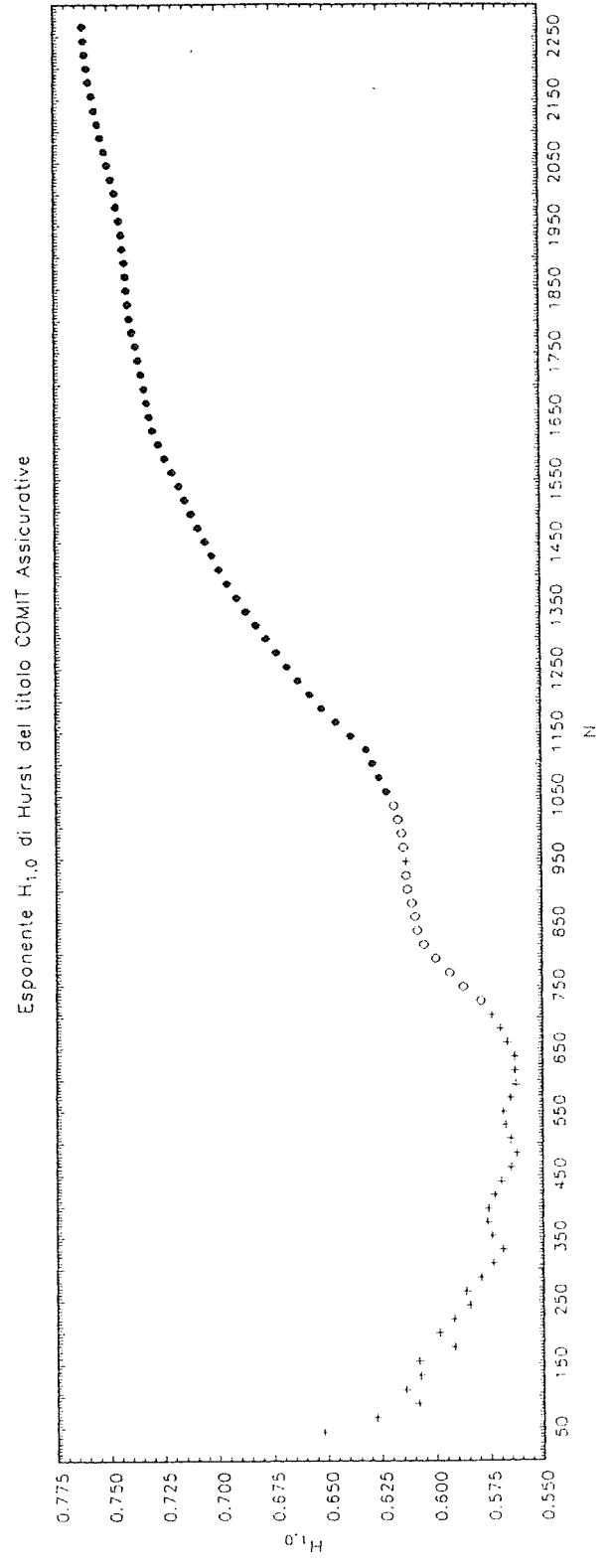
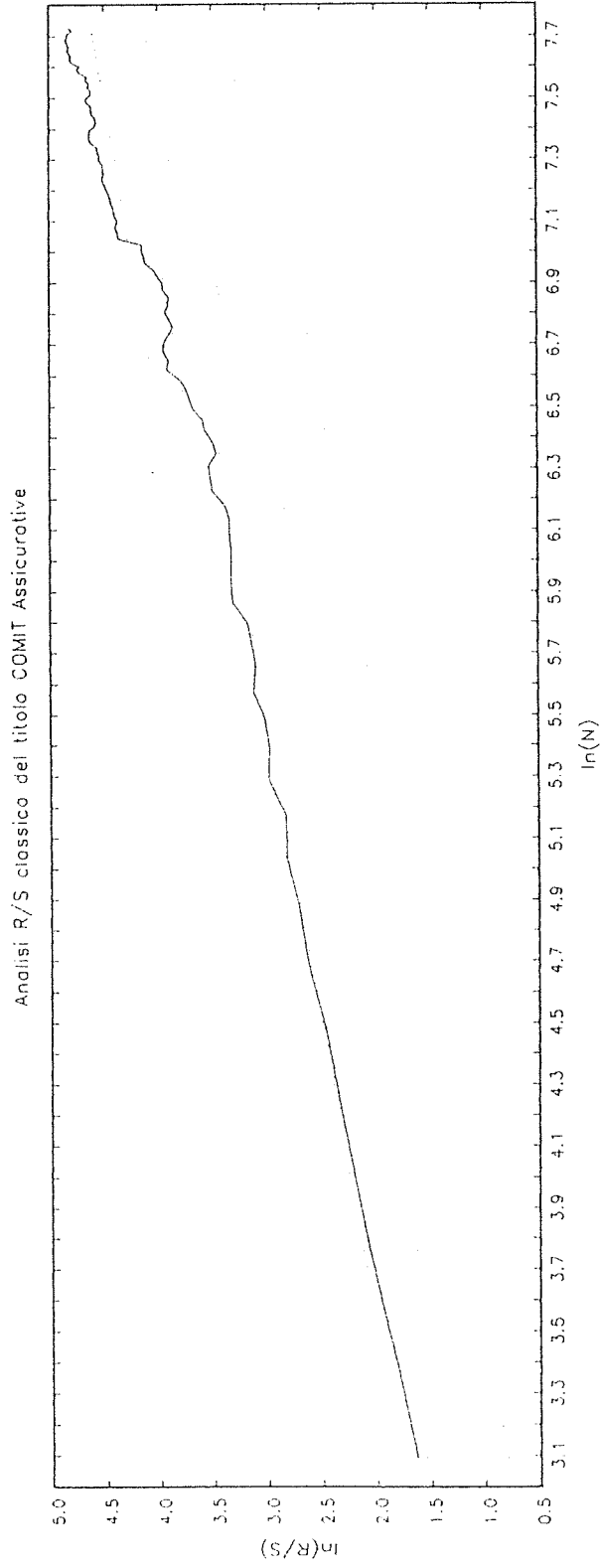




Figura 3

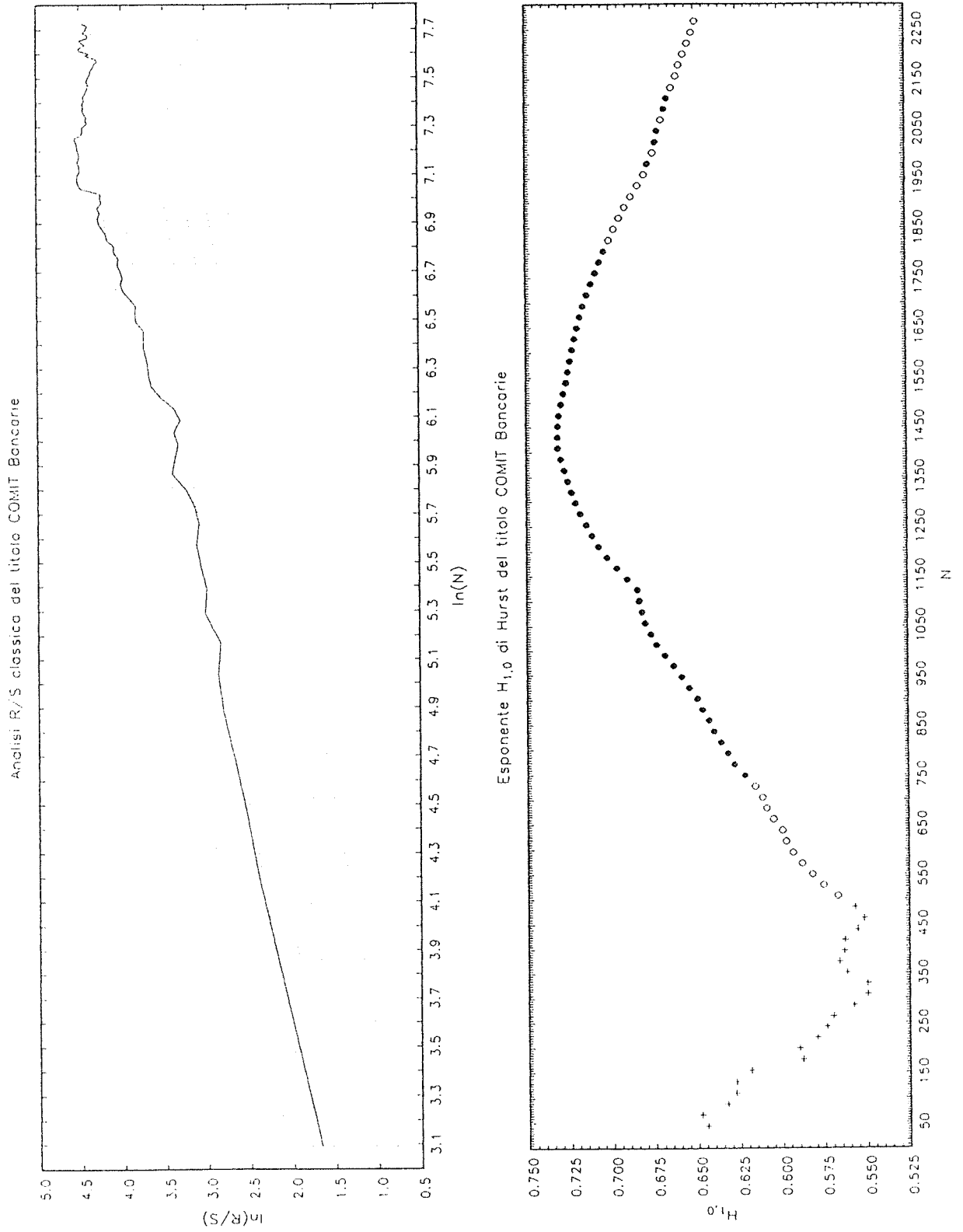


Figura 4

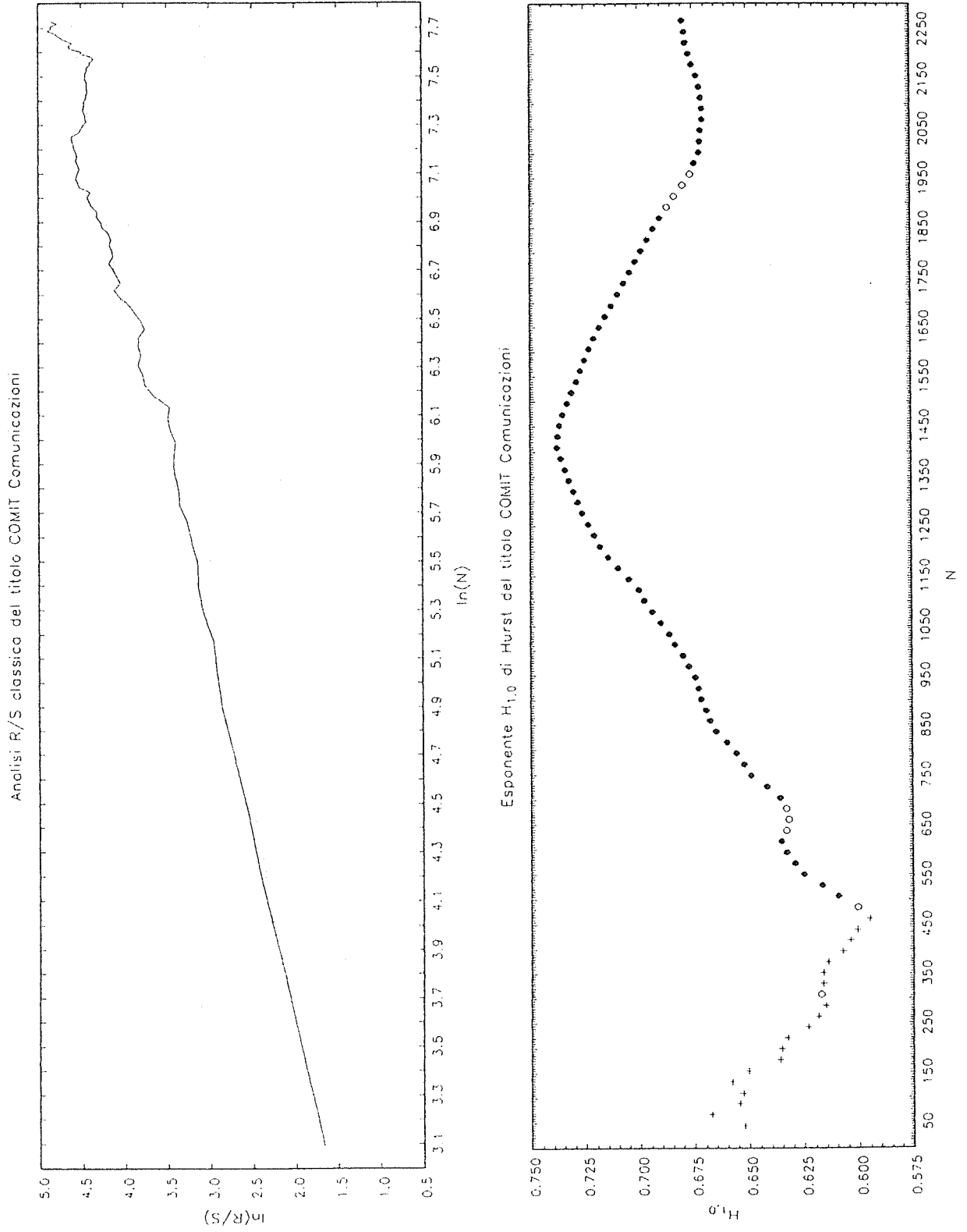


Figura 5

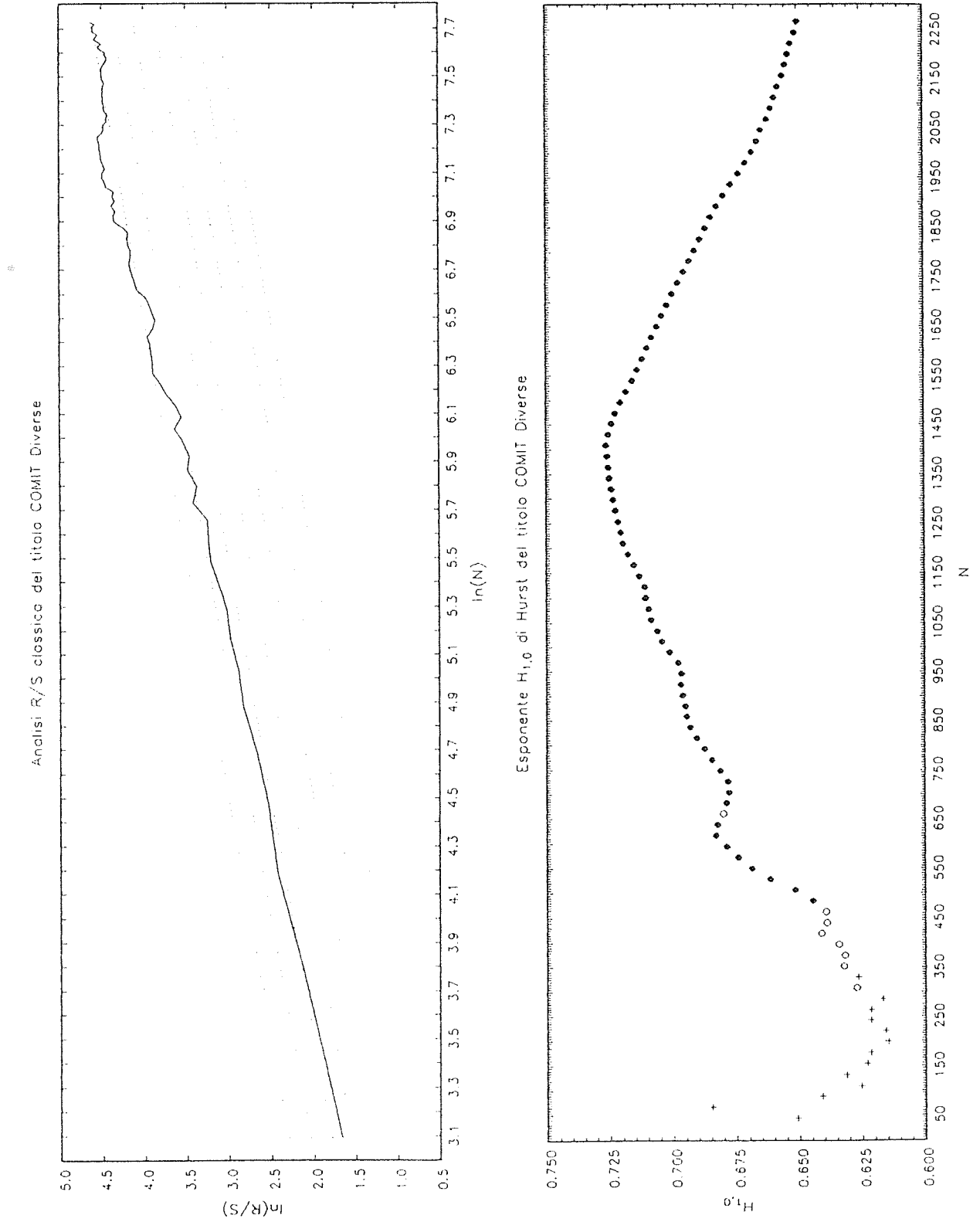


Figura 6

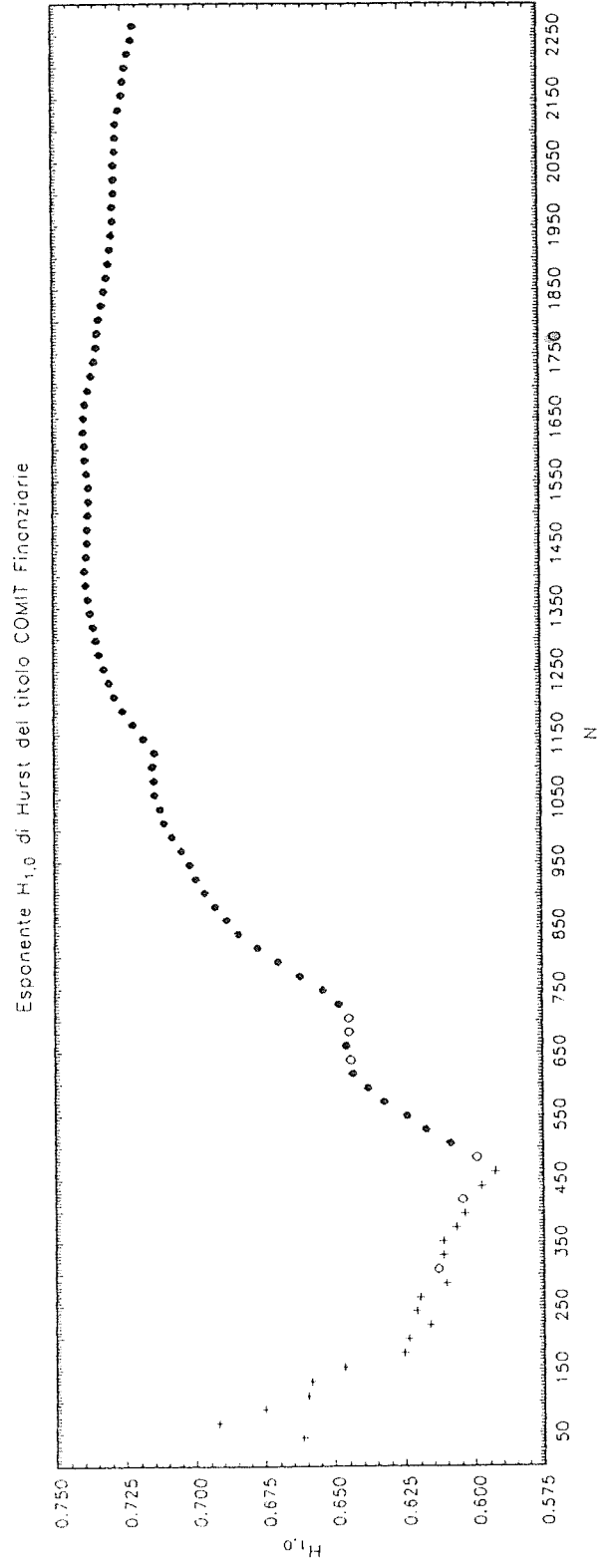
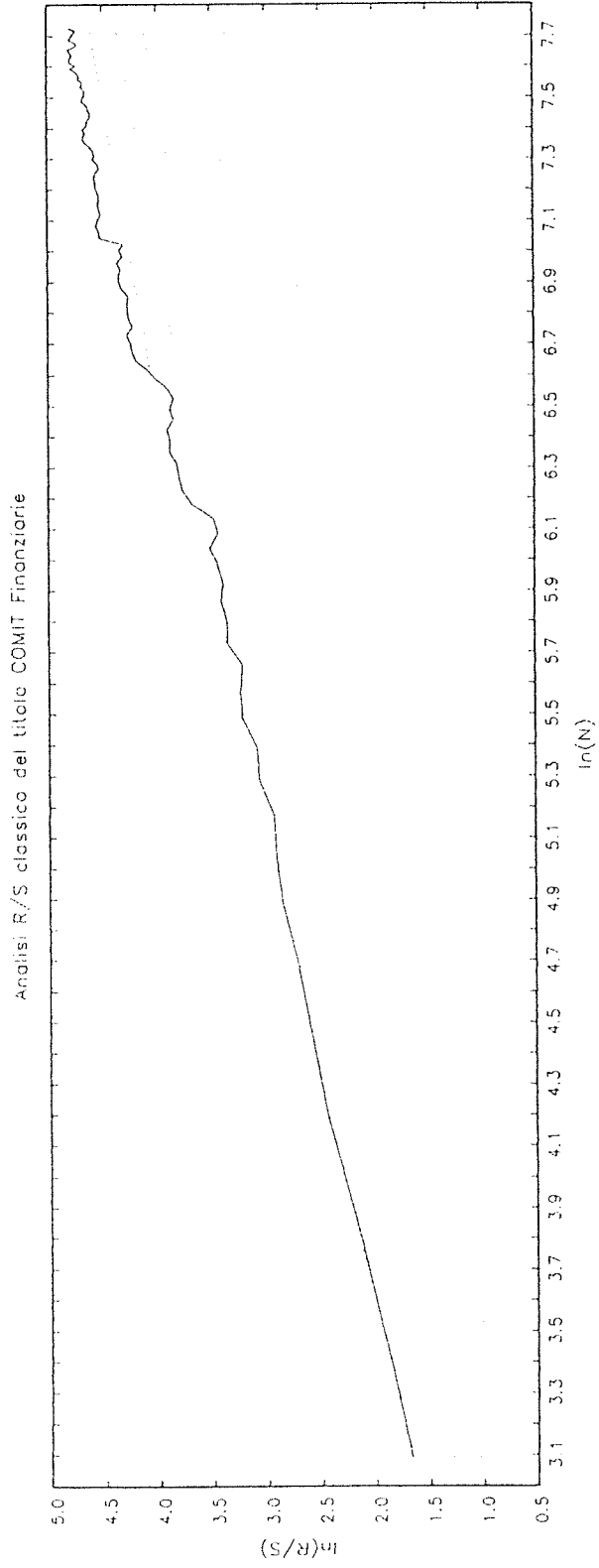


Figura 7

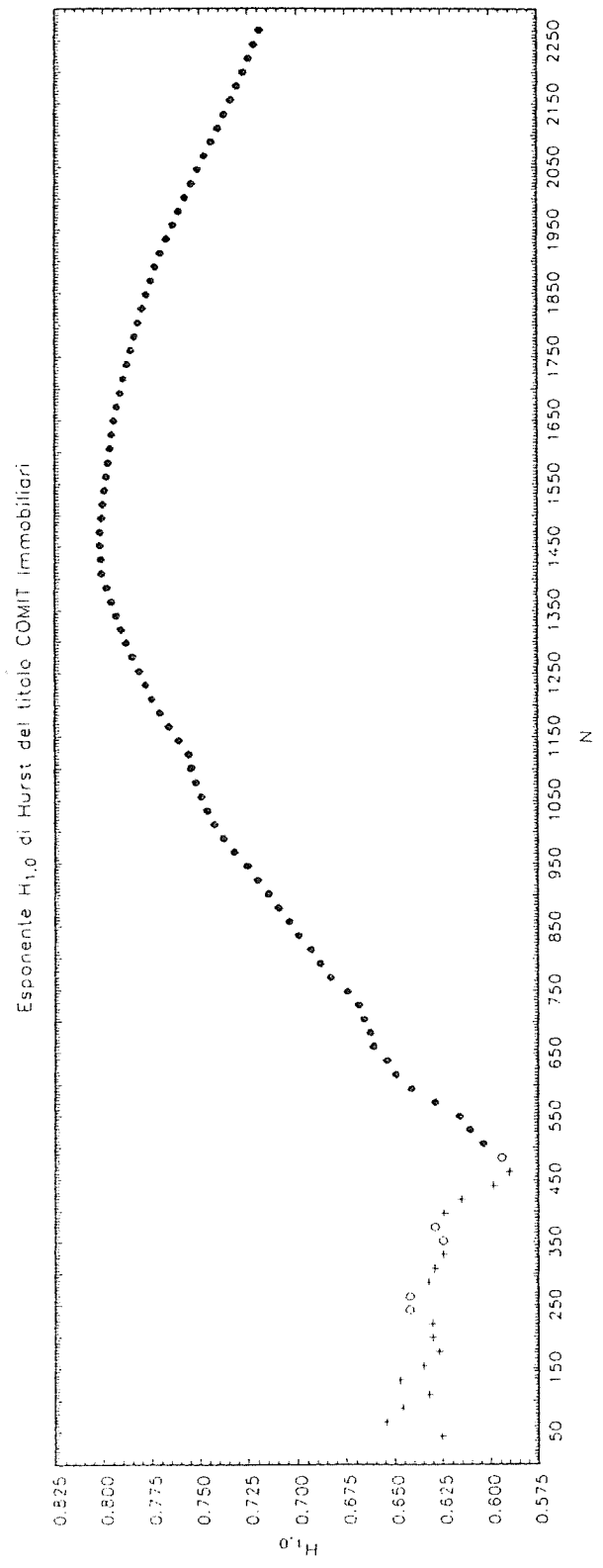
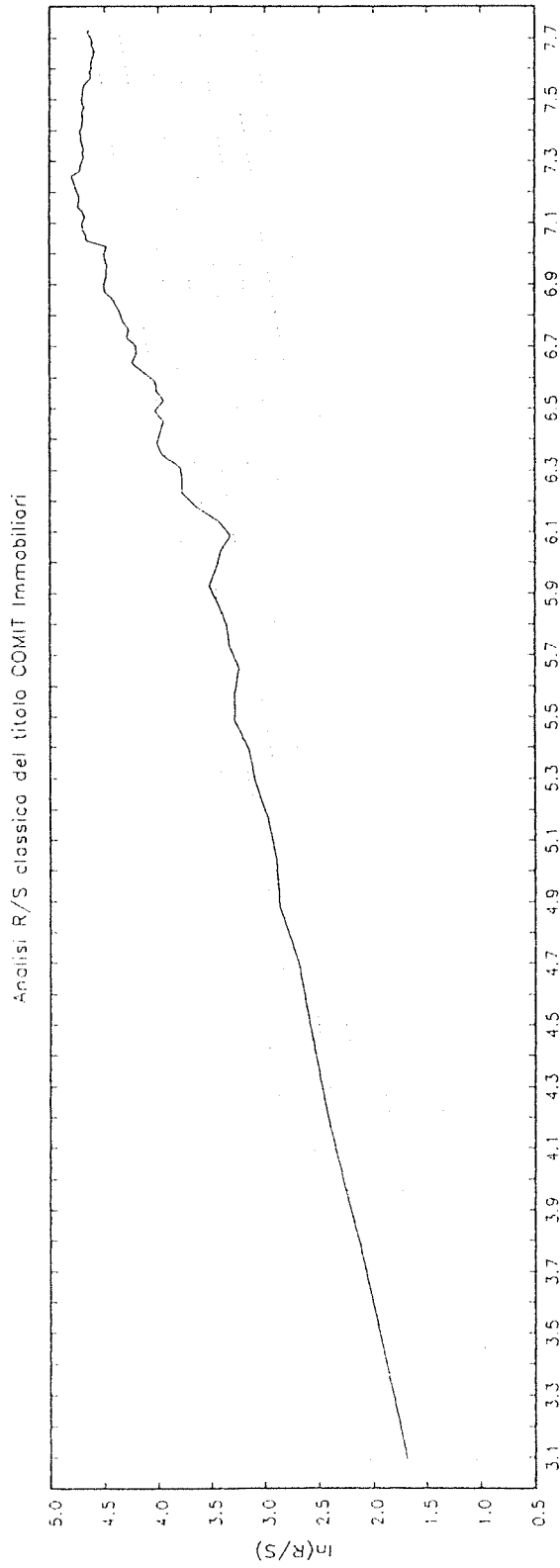


Figura 8

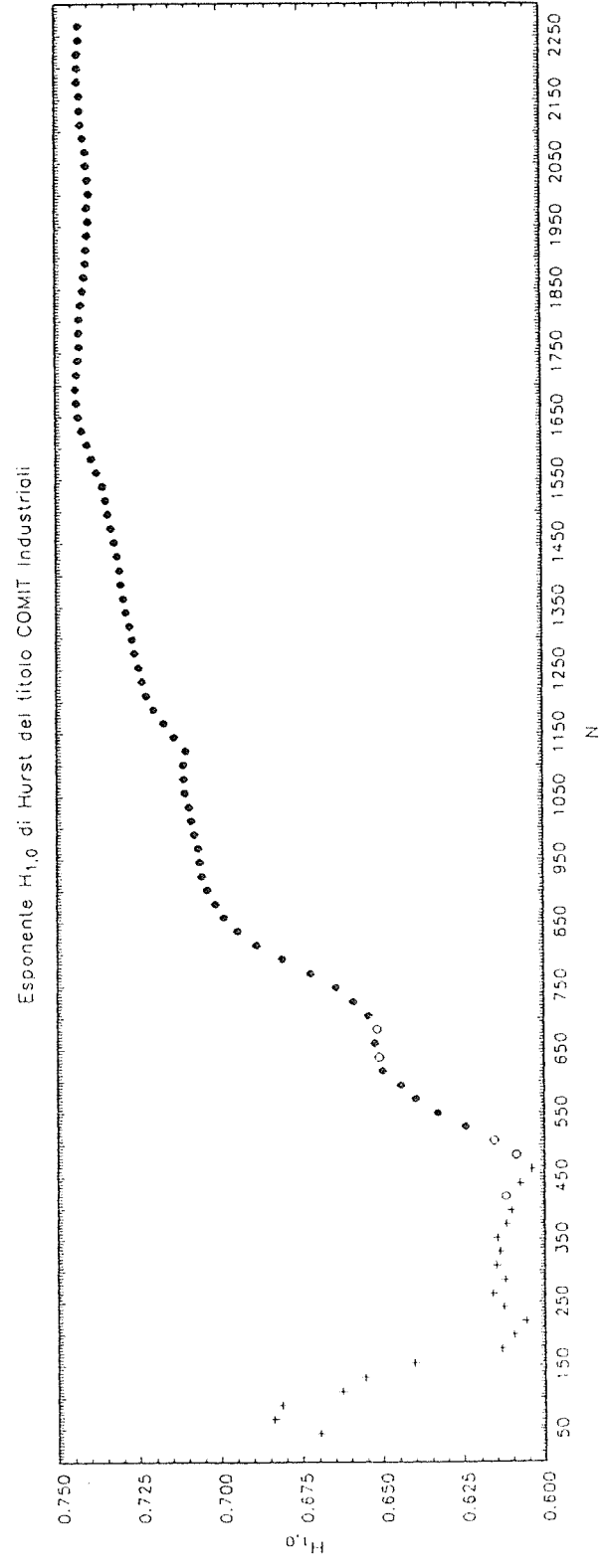
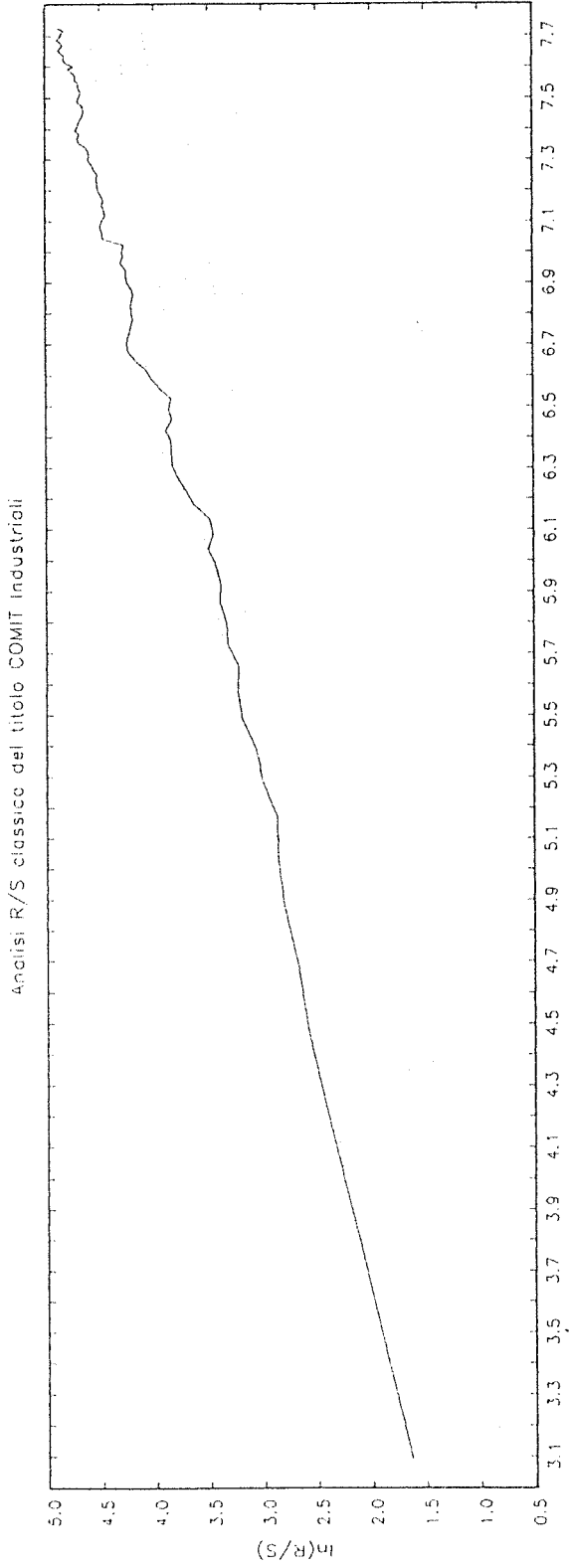


Figura 9

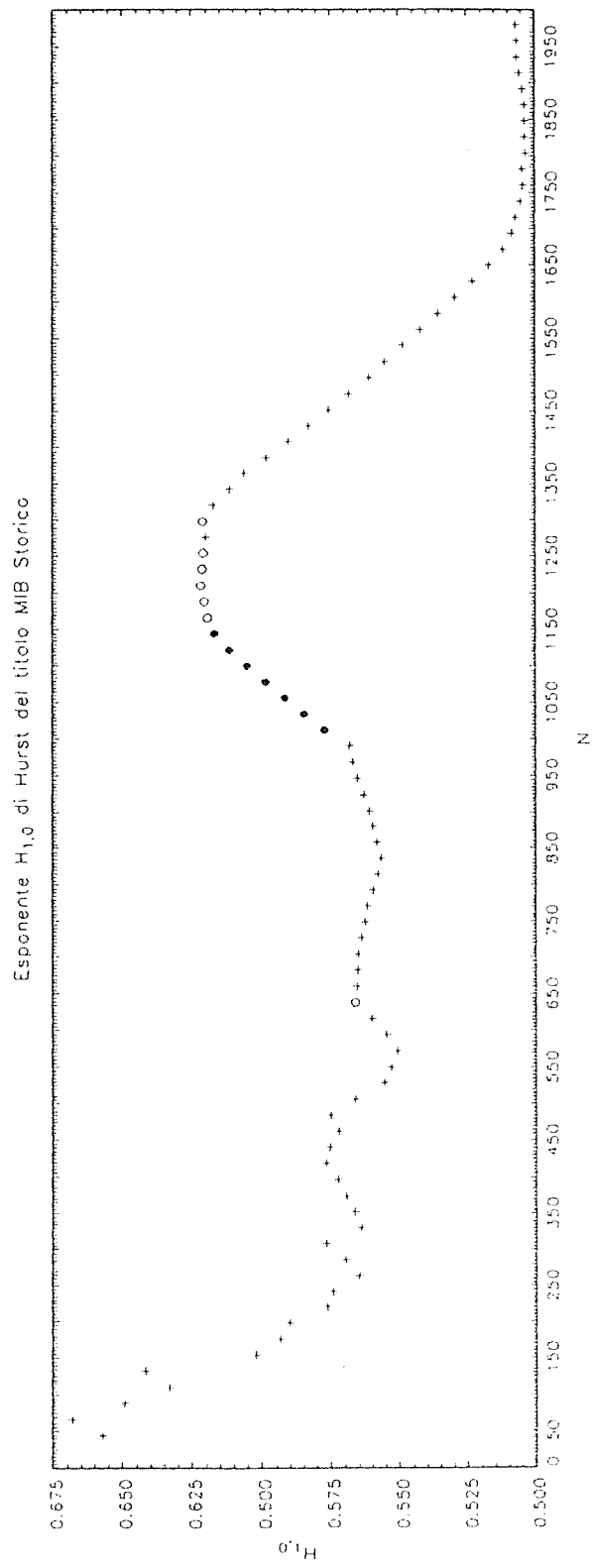
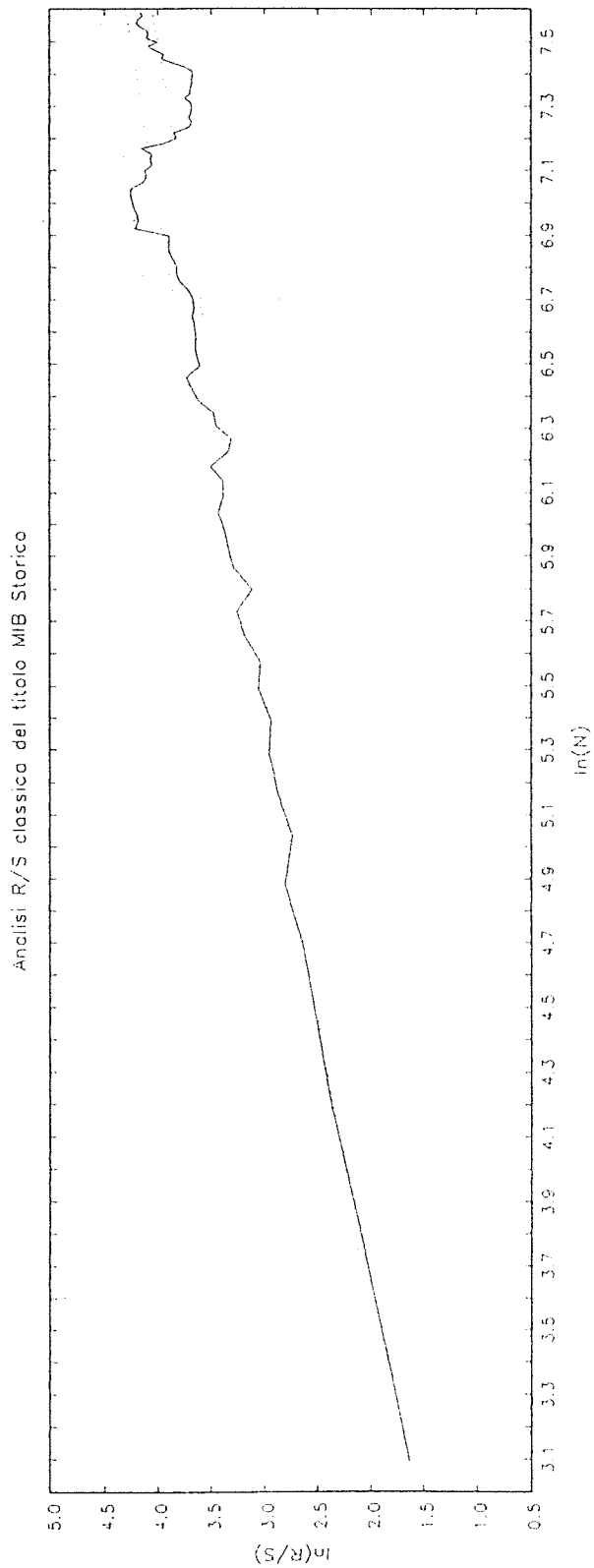






Figura 10

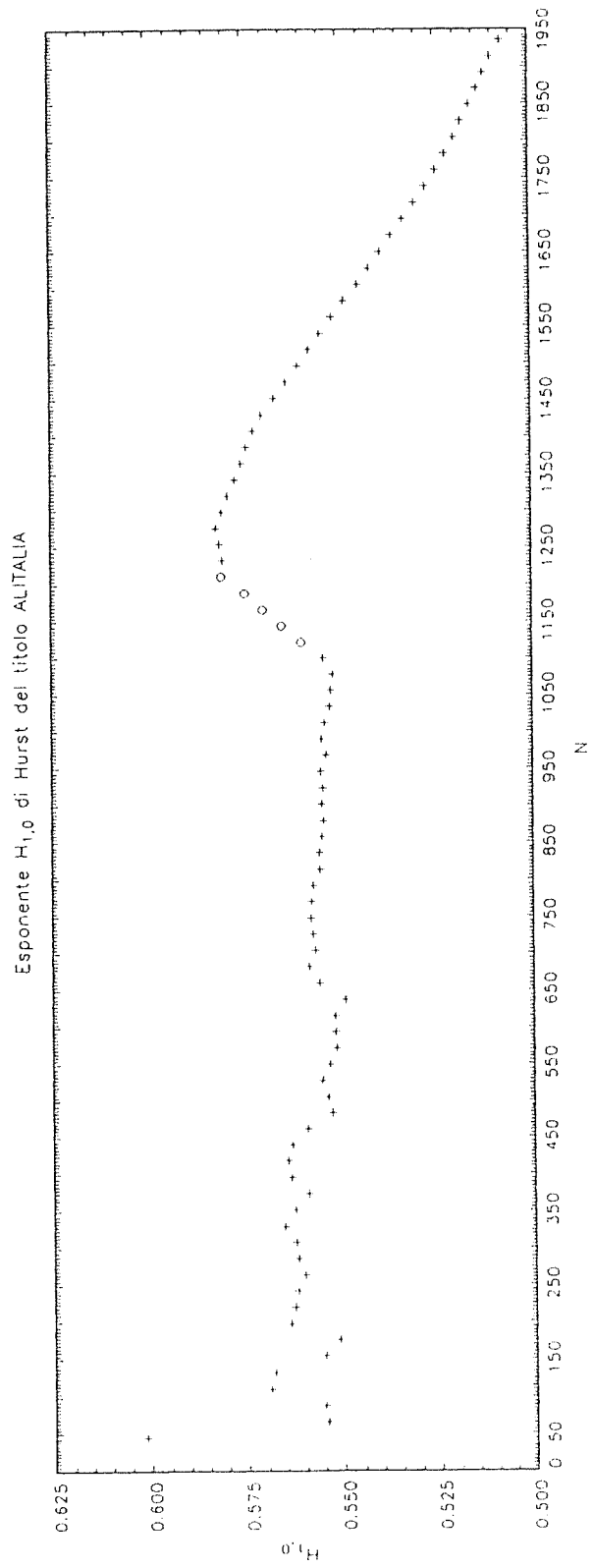
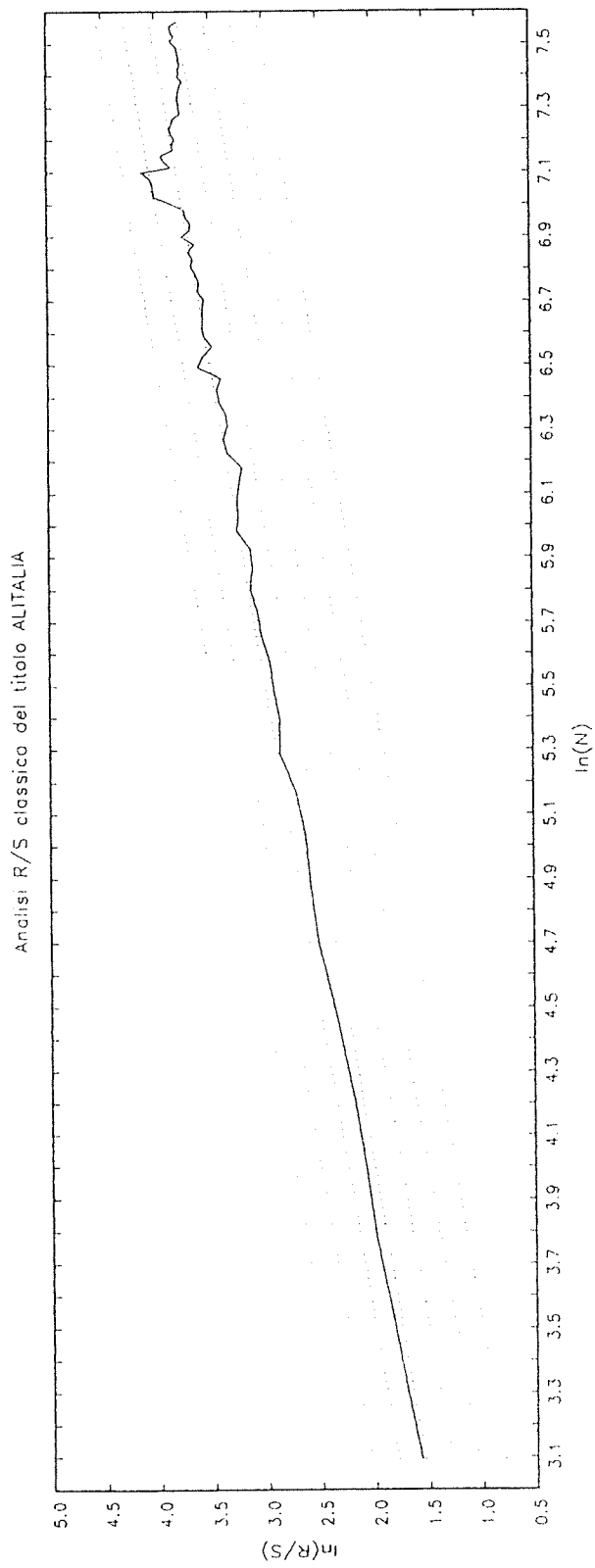


Figura 11

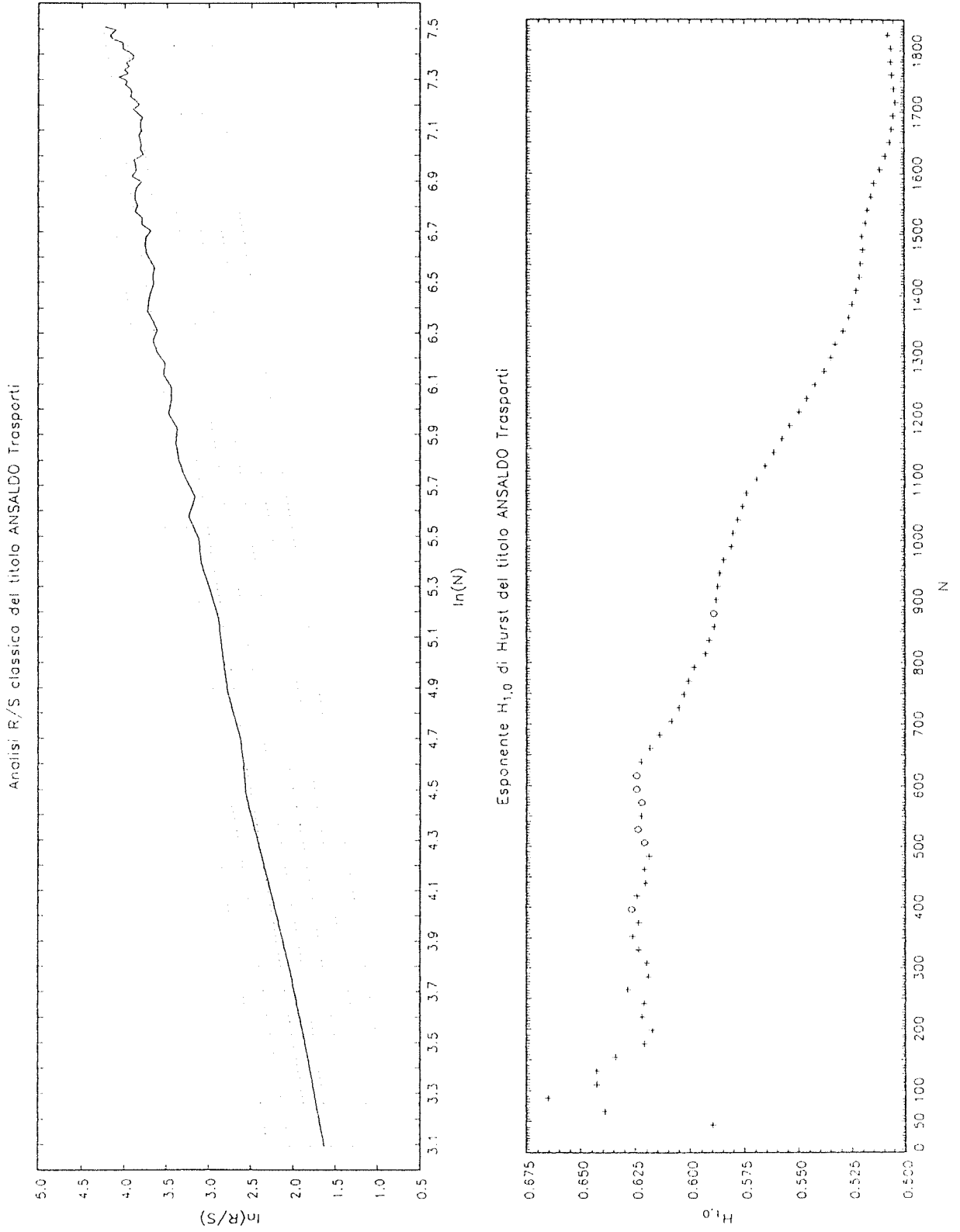


Figura 12

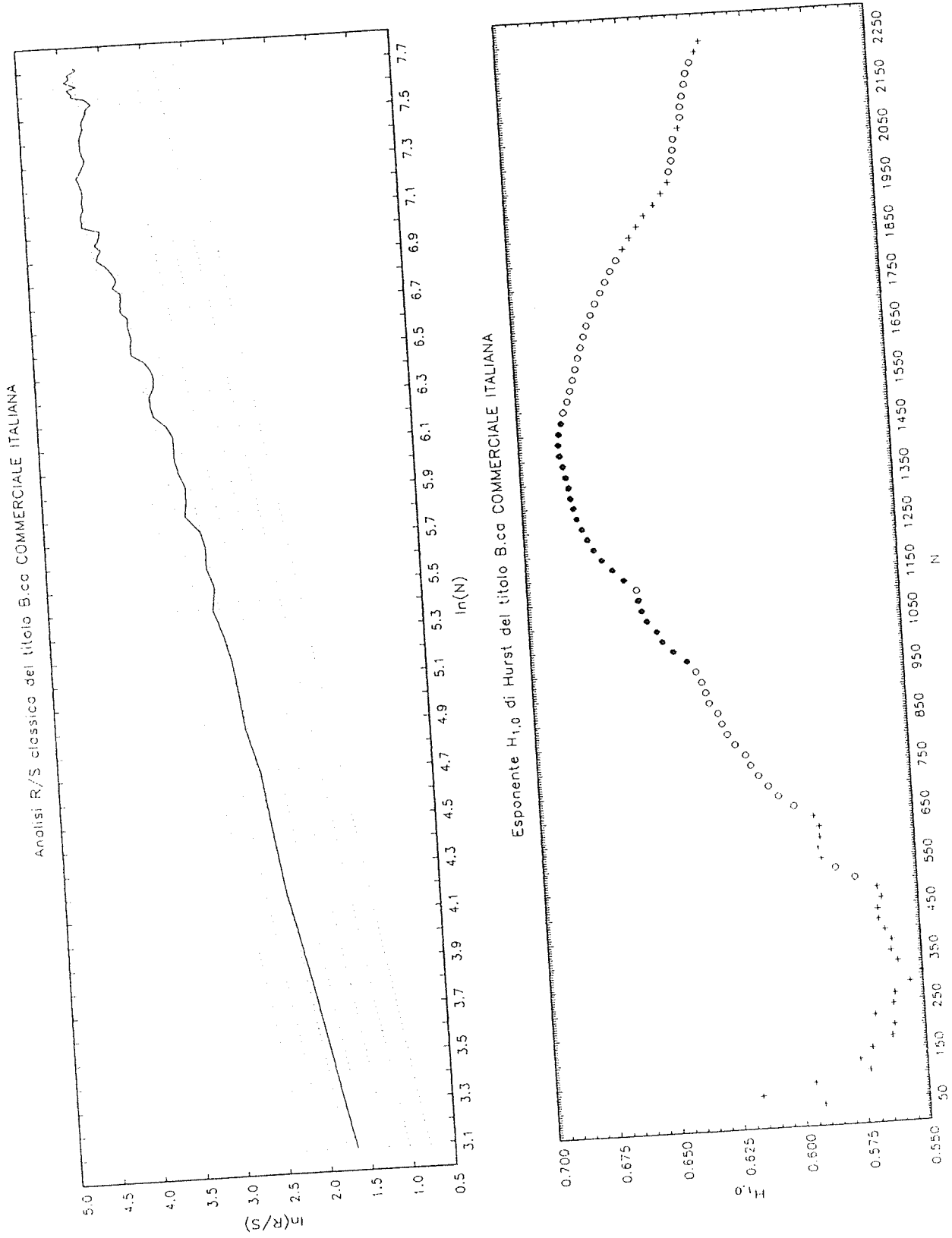


Figura 13

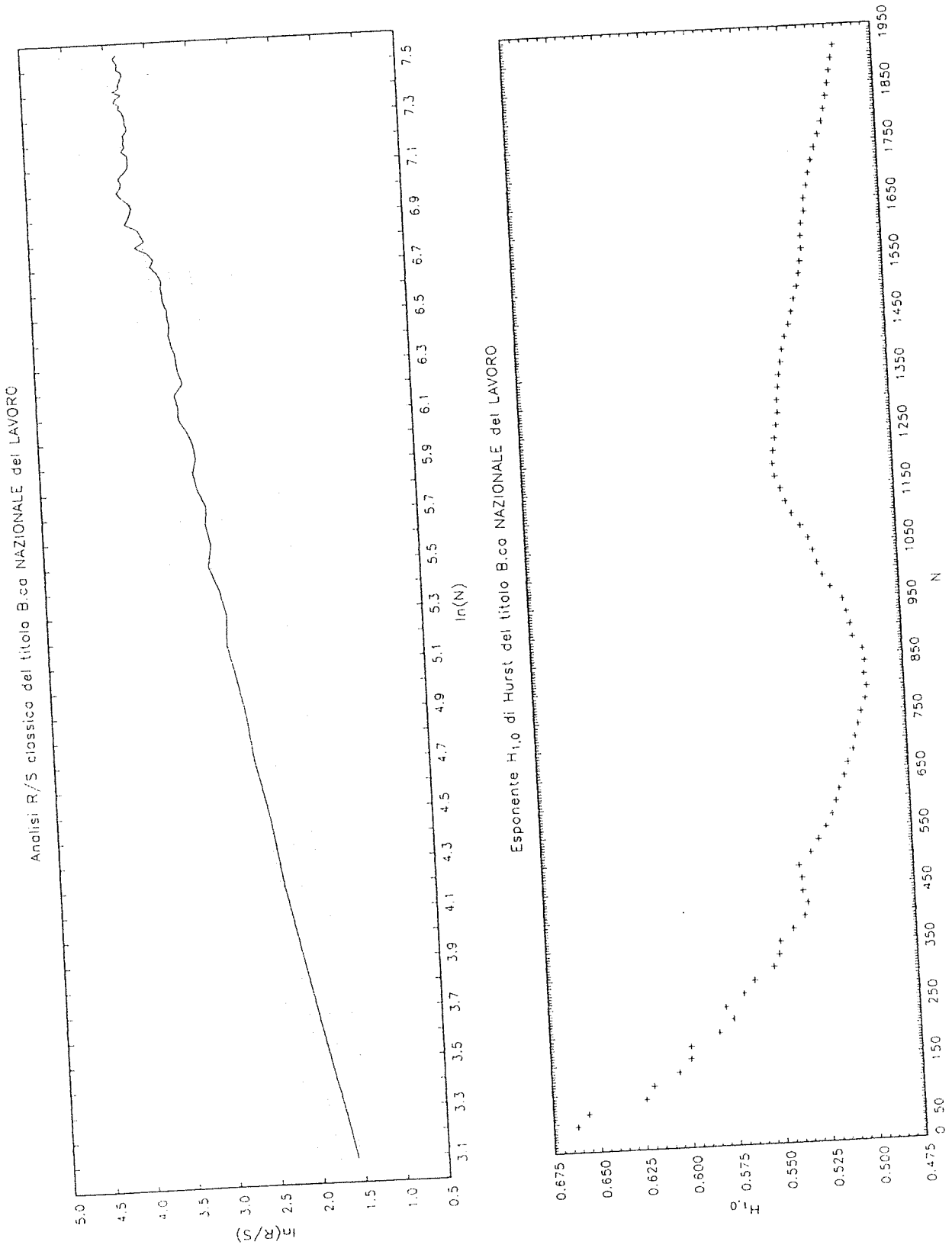


Figura 14

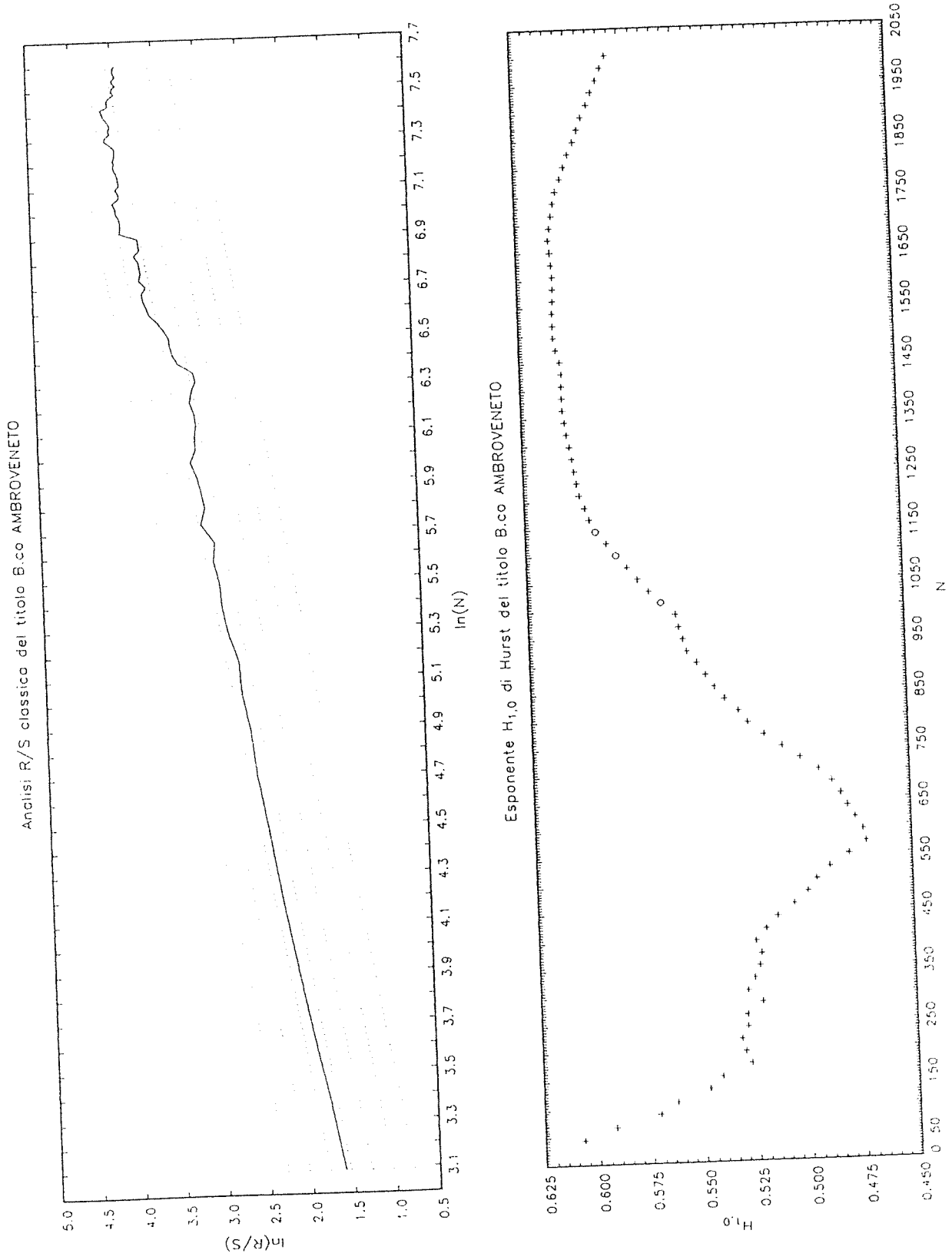


Figura 15

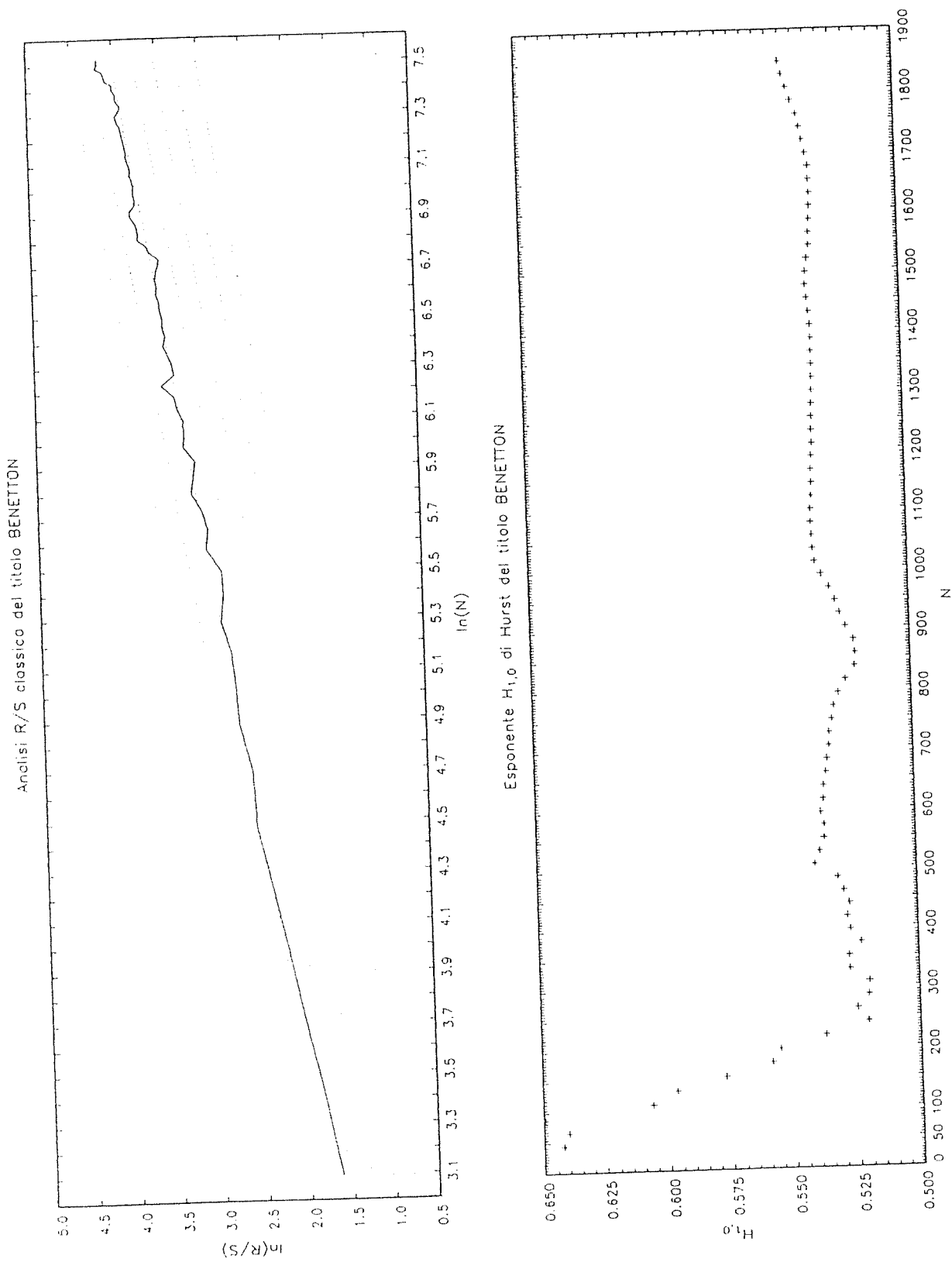


Figura 16

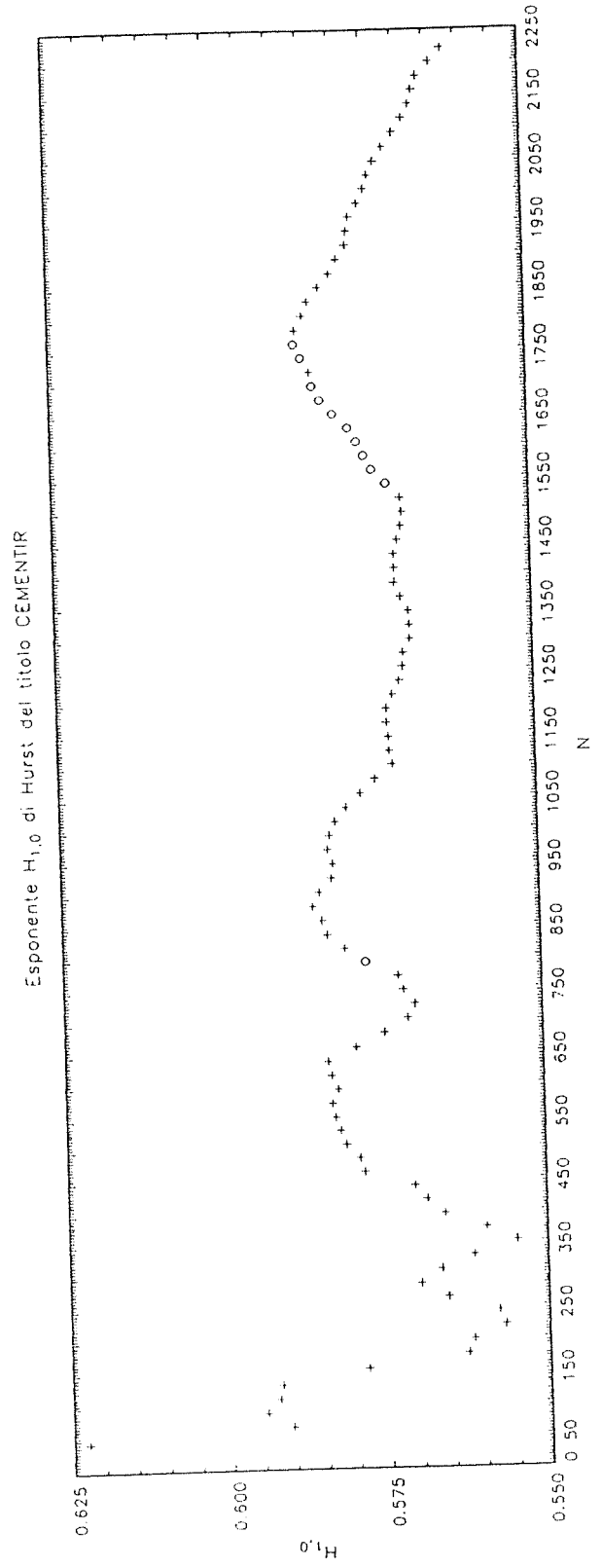
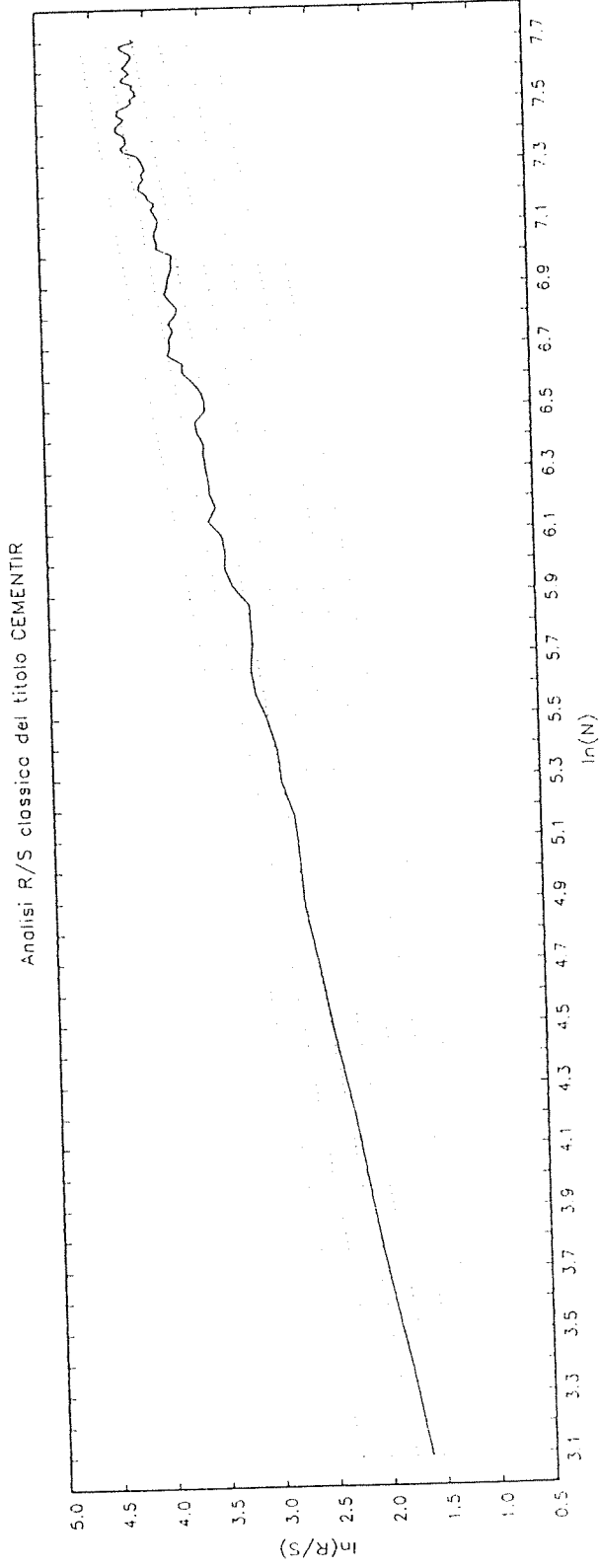


Figura 17

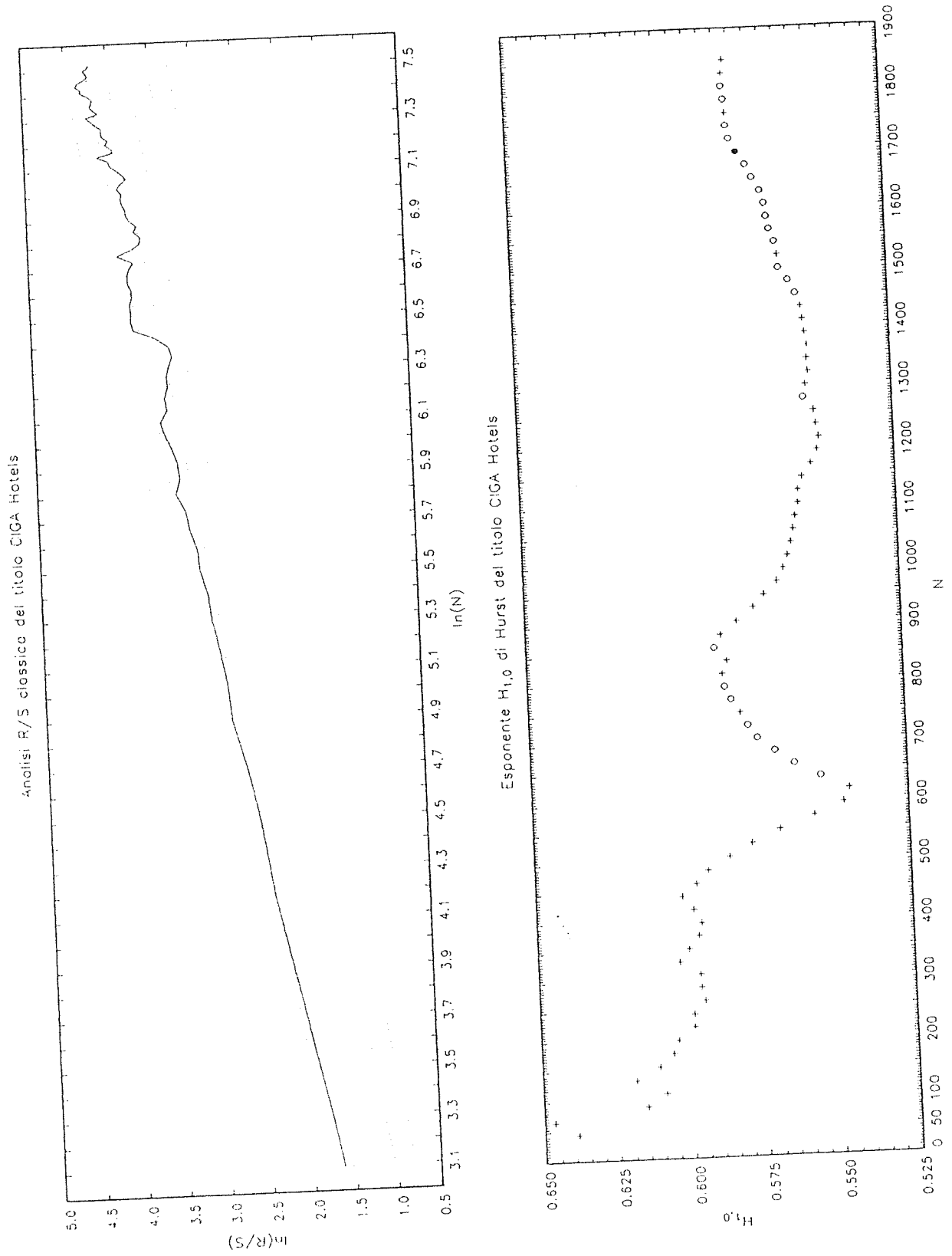




Figura 18

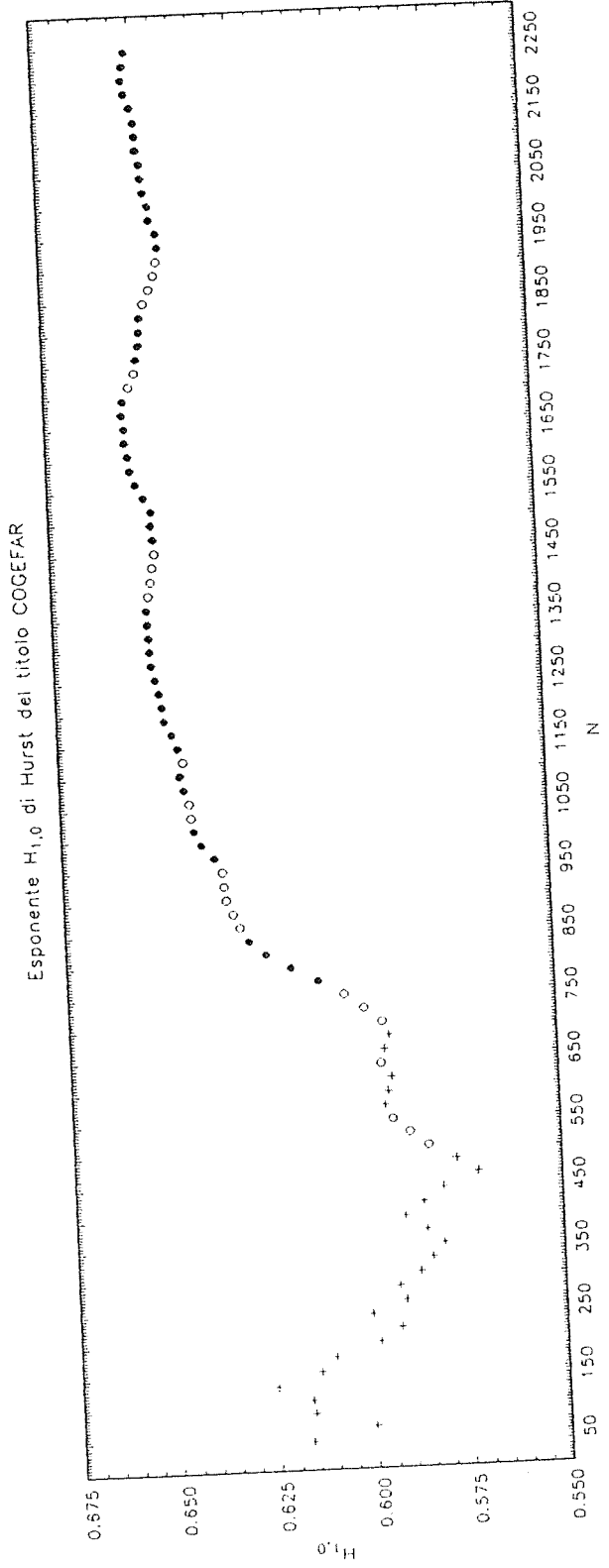
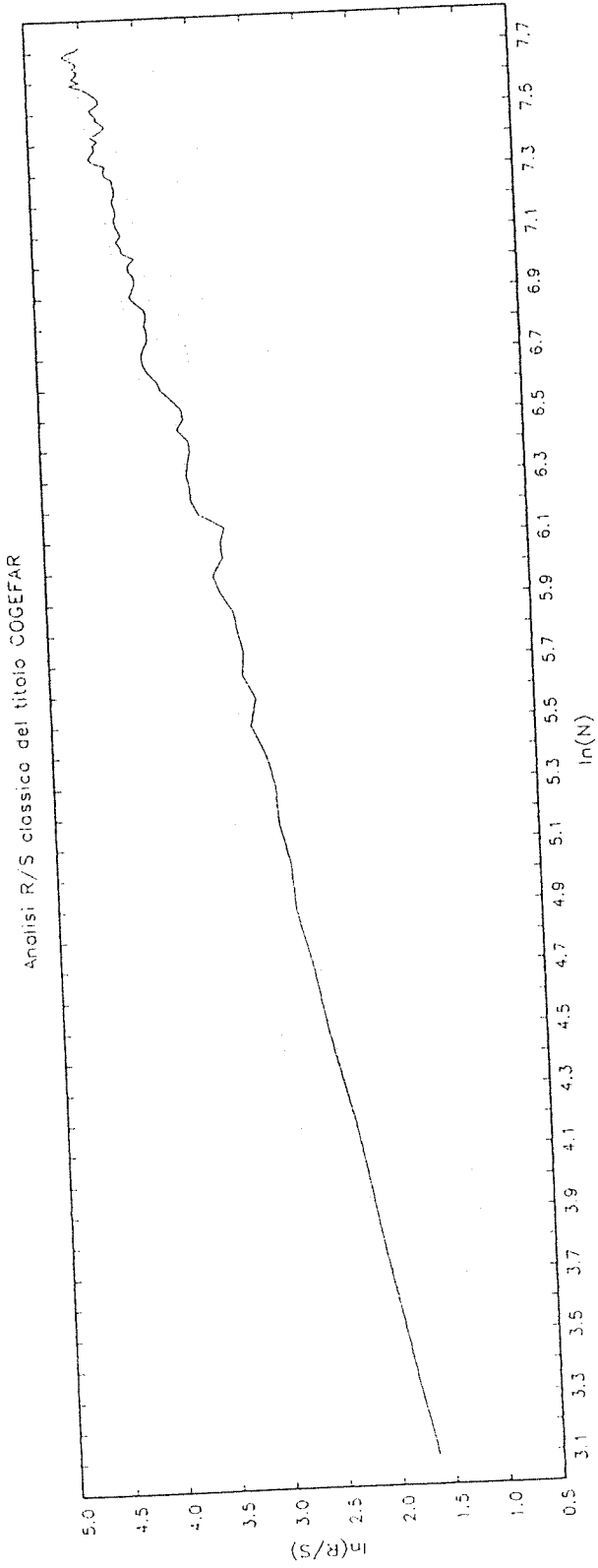


Figura 19

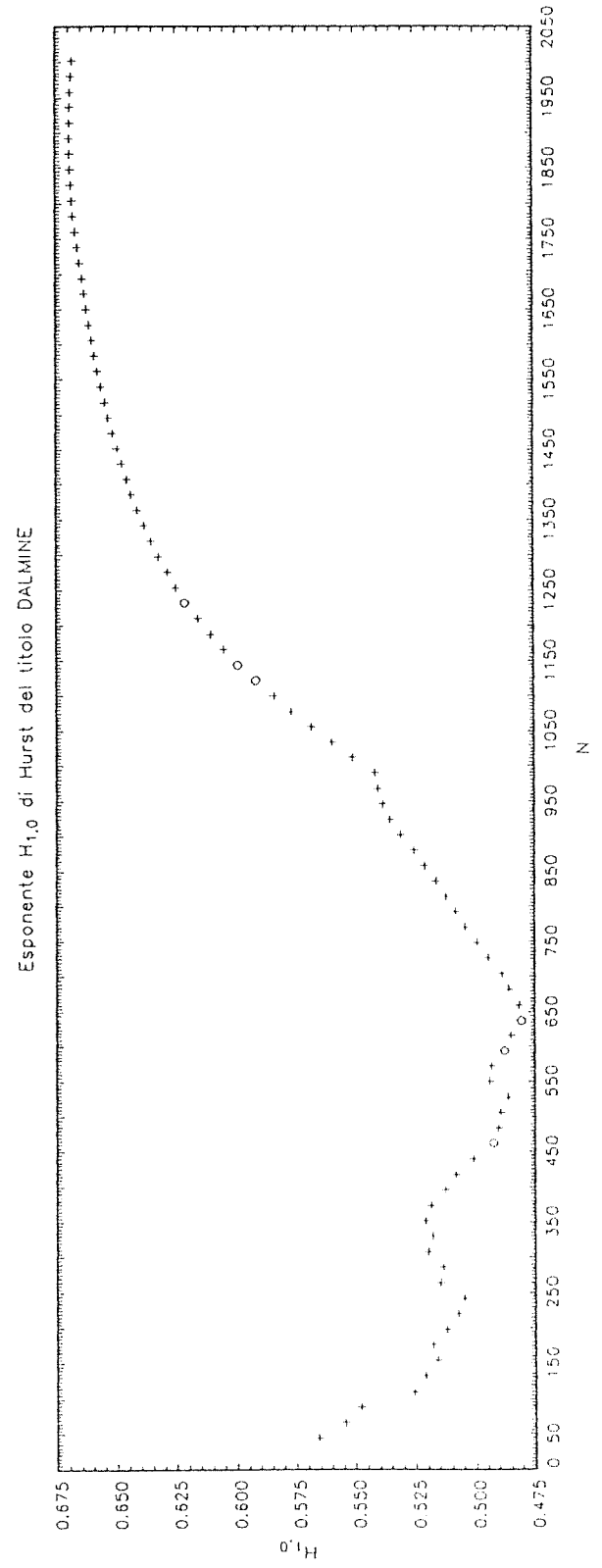
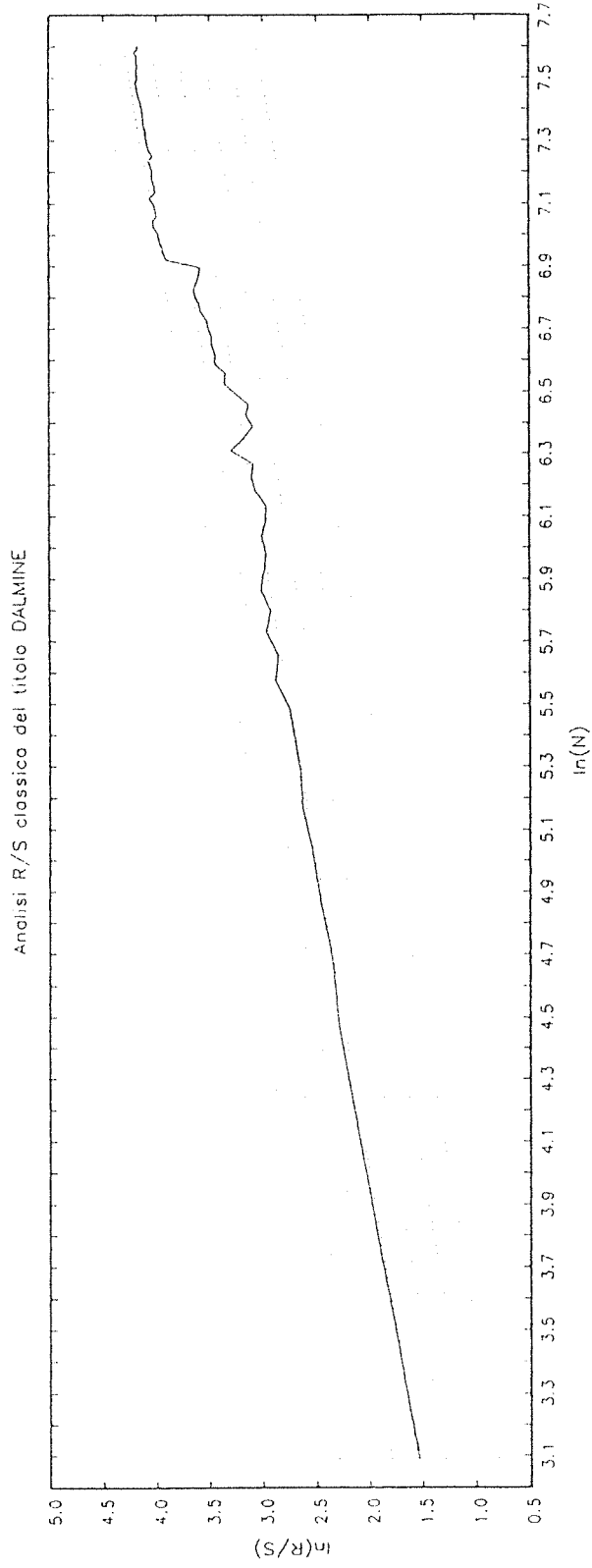


Figura 20

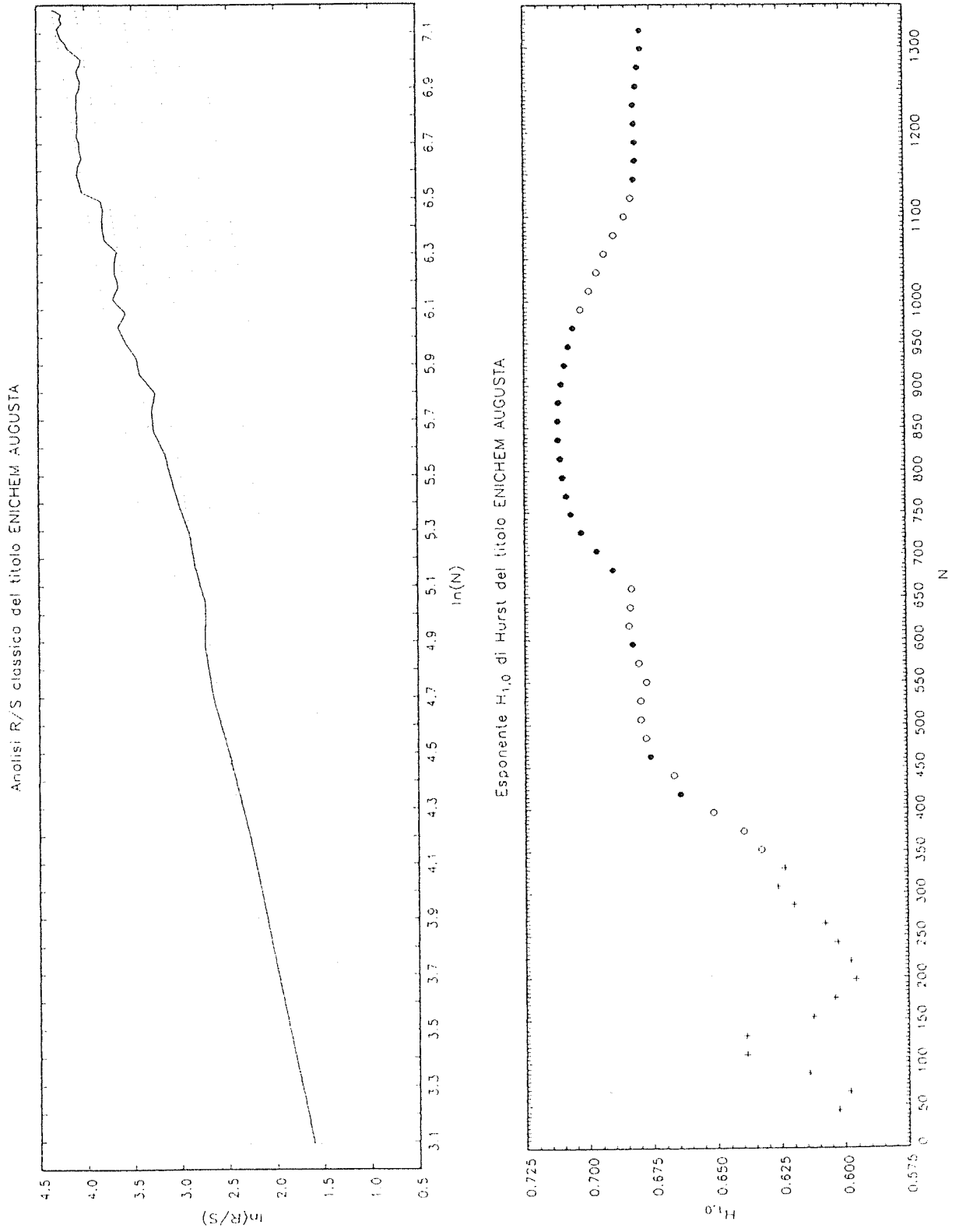


Figura 21

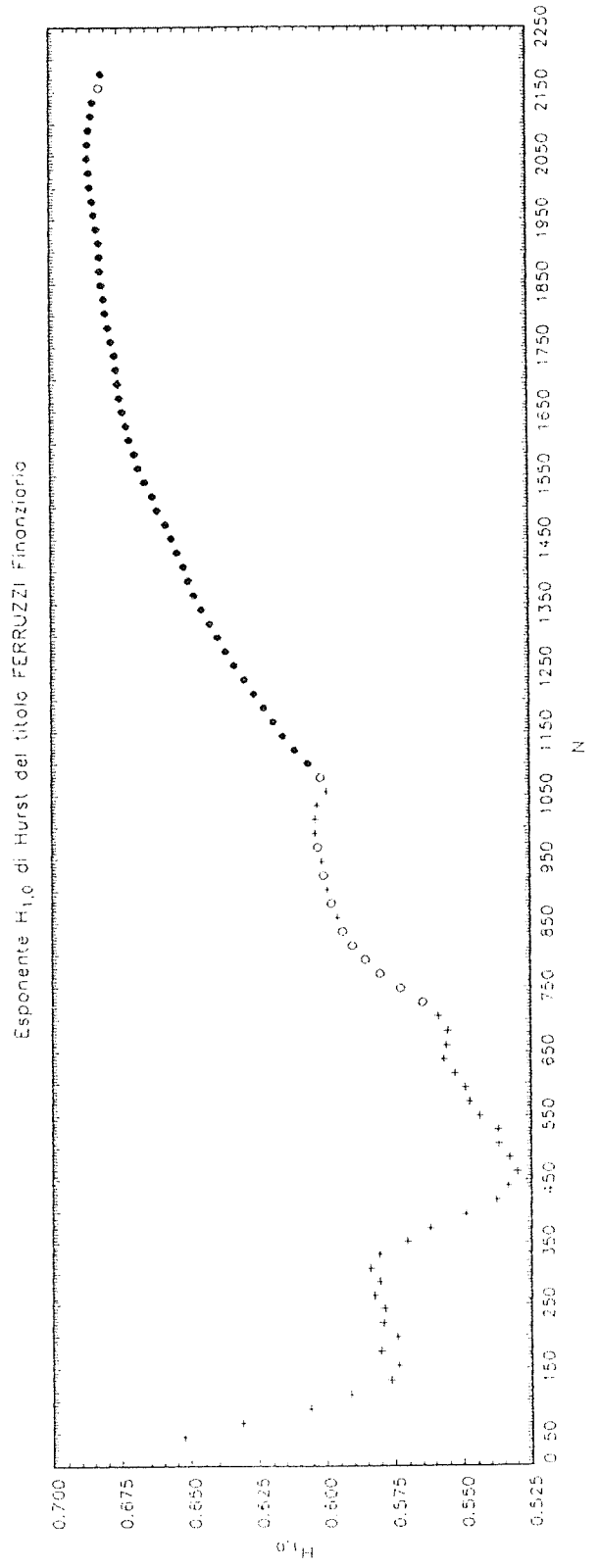
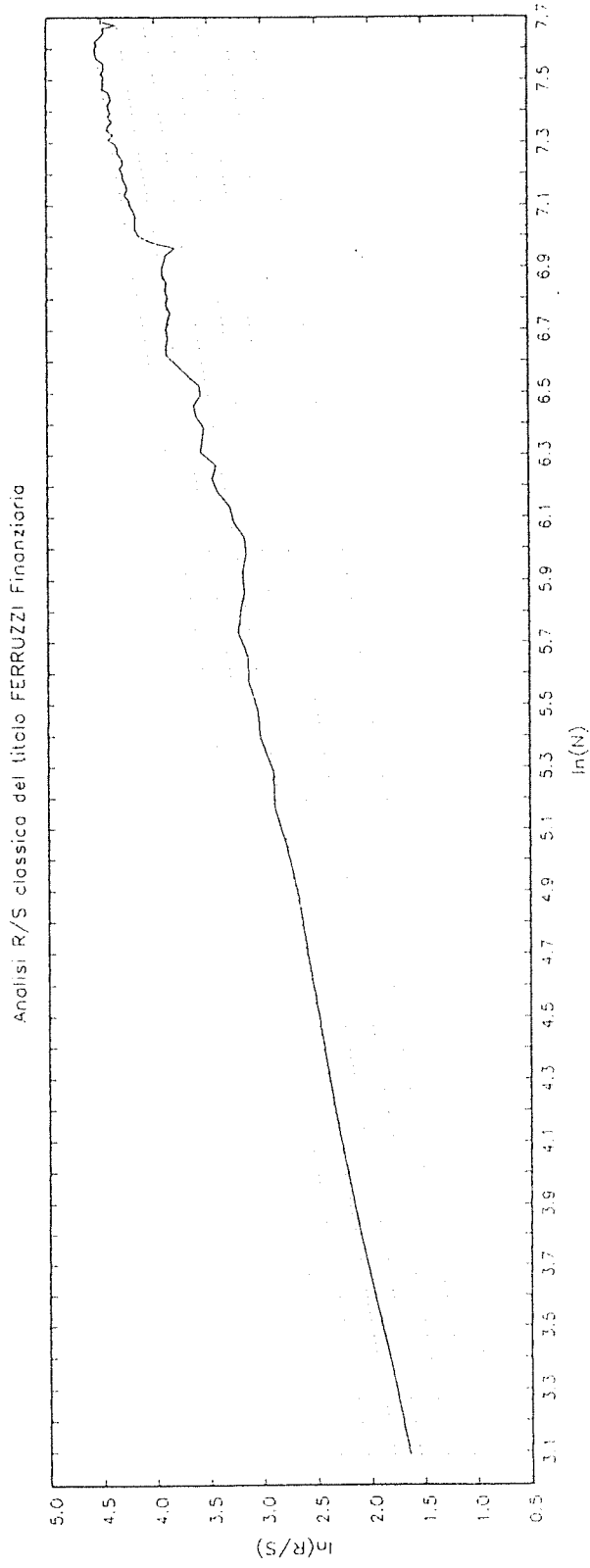


Figura 22

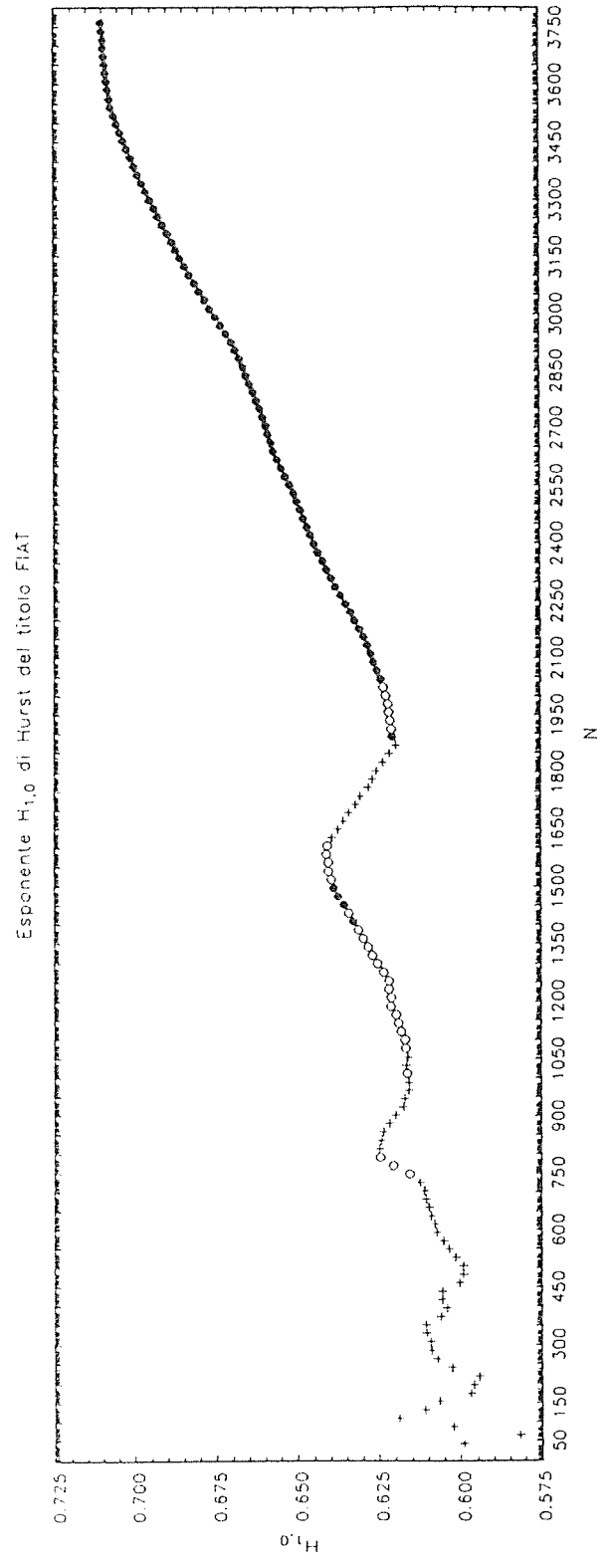
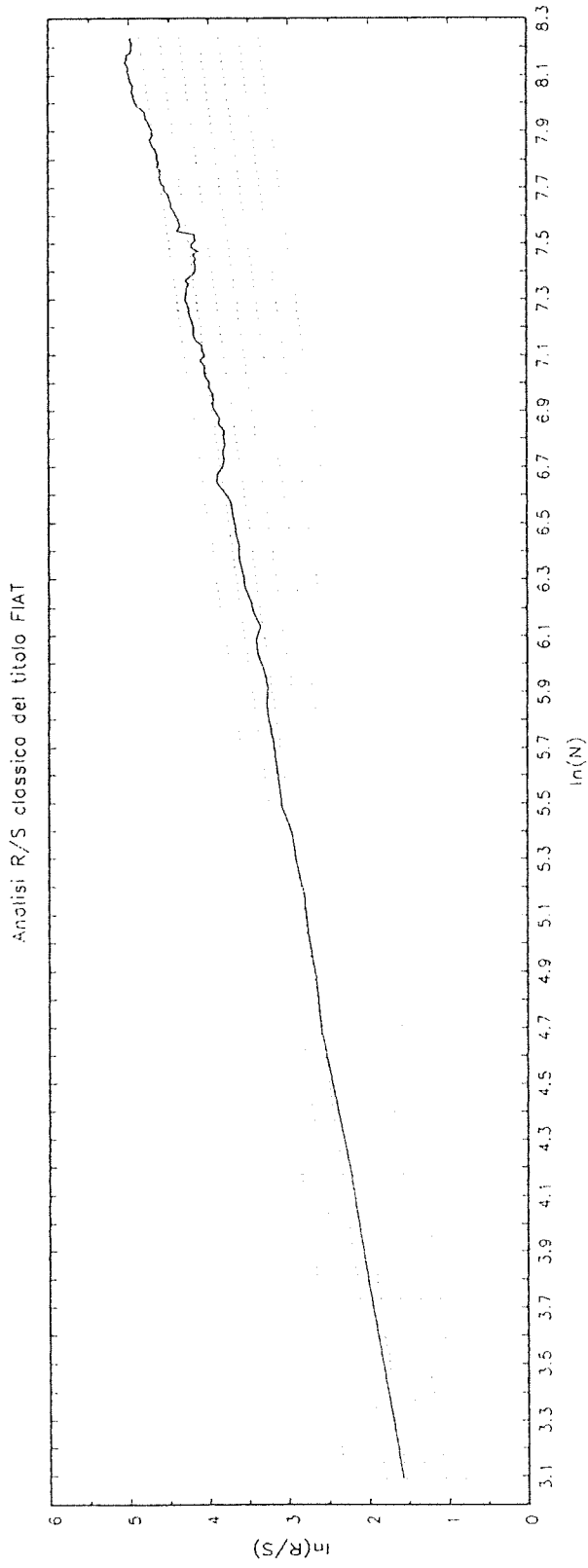


Figura 23

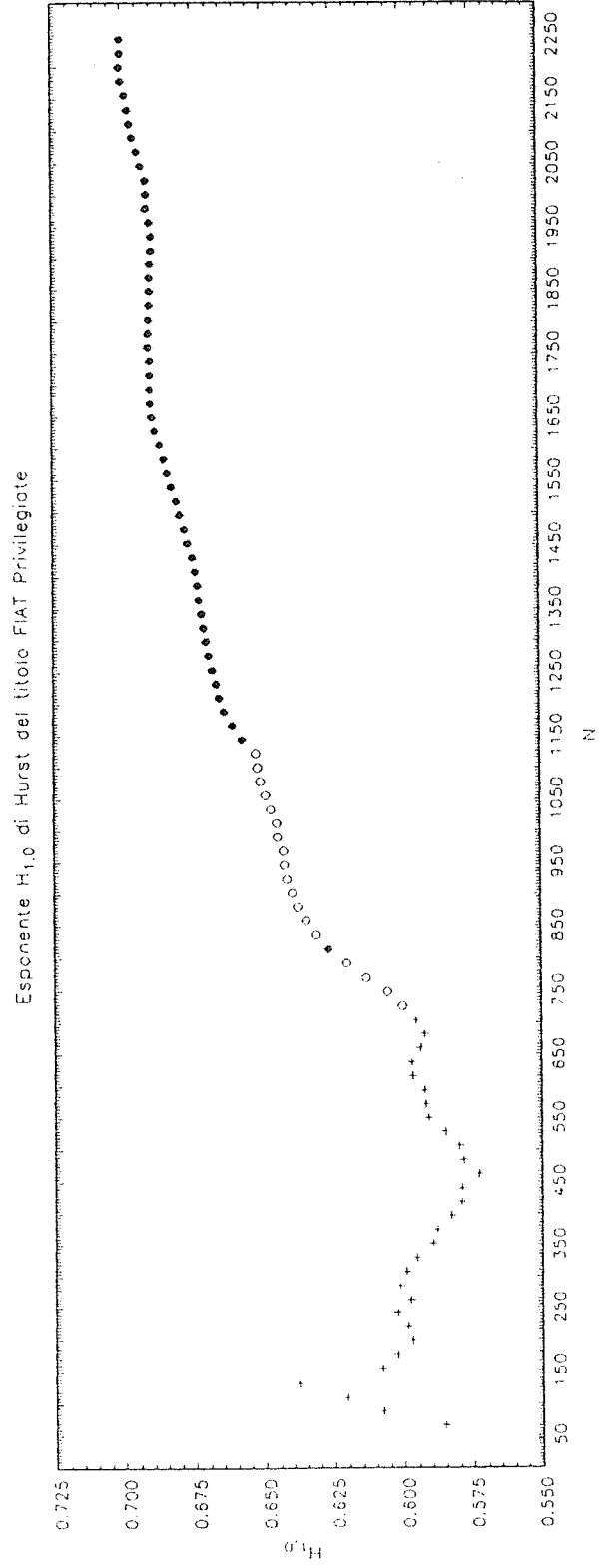
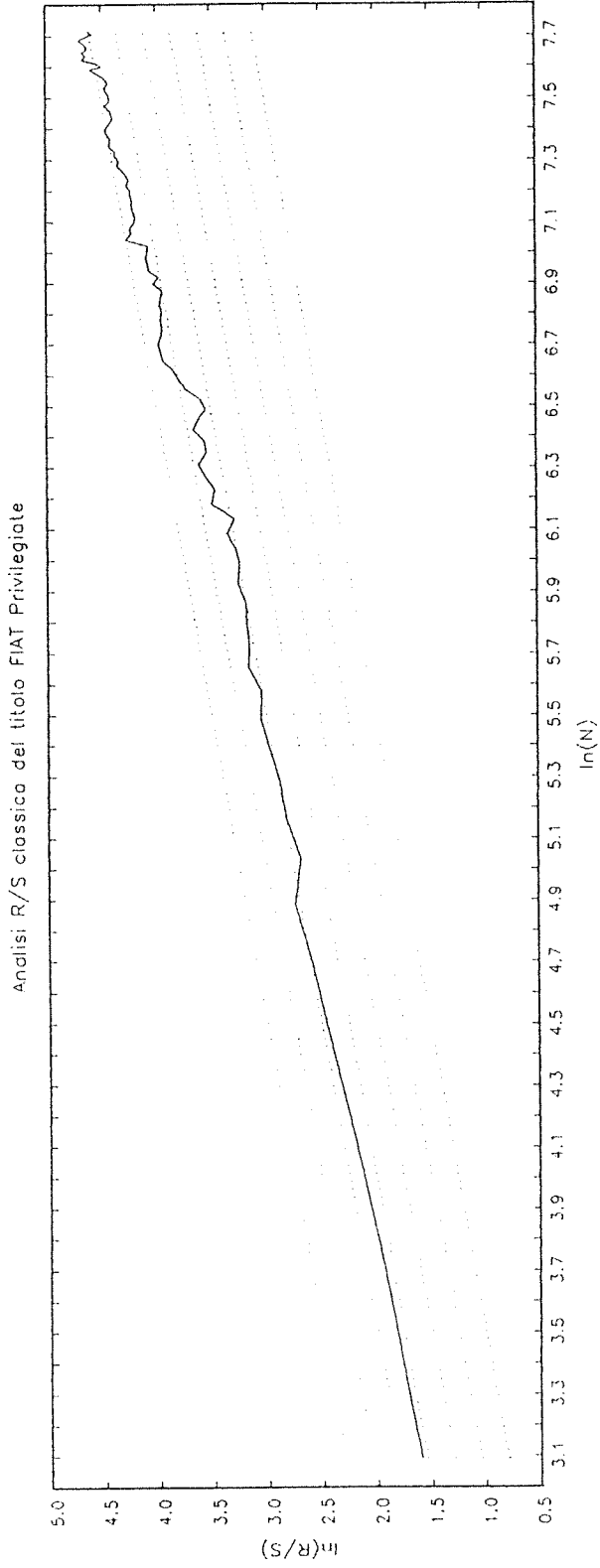


Figura 24

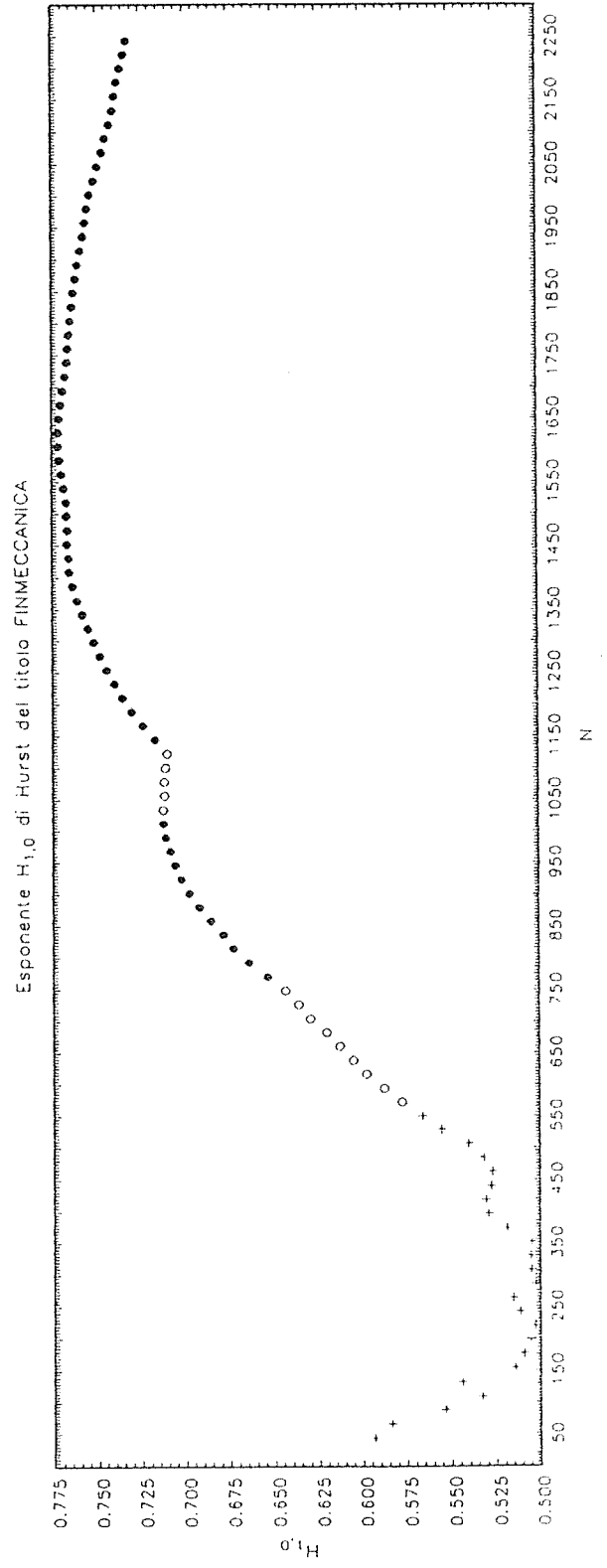
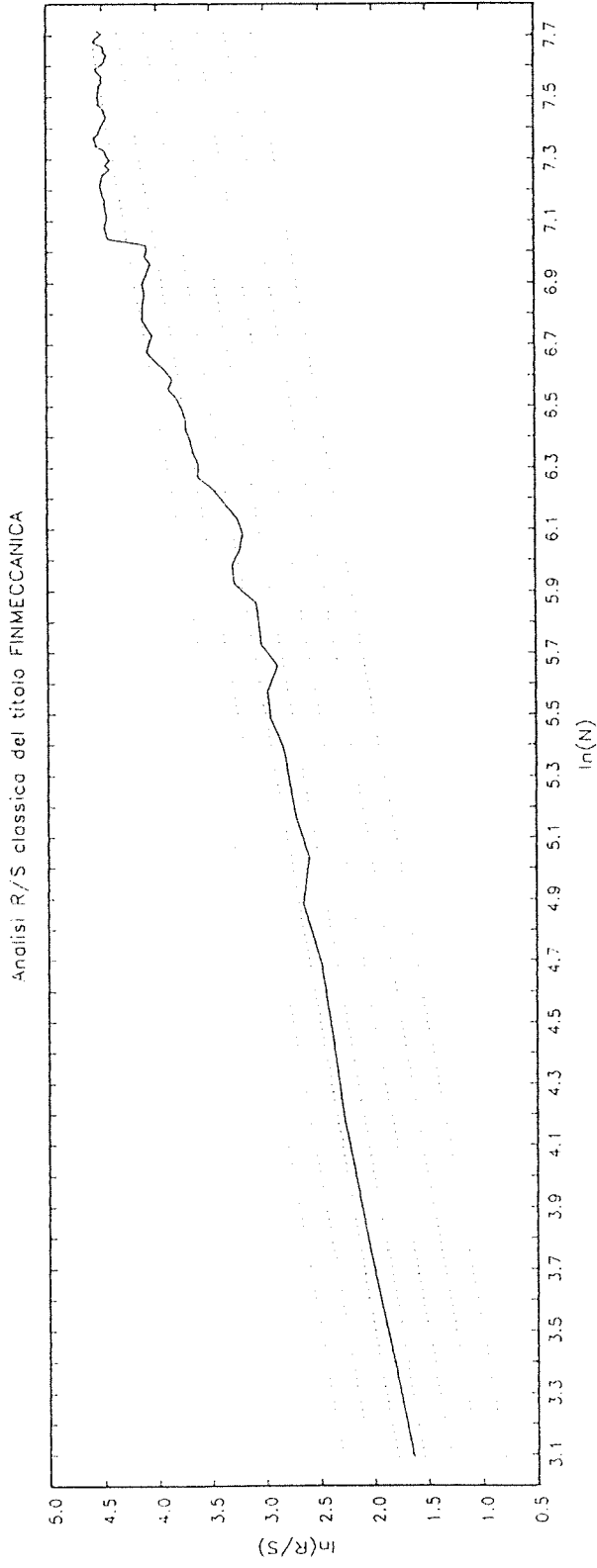


Figura 25

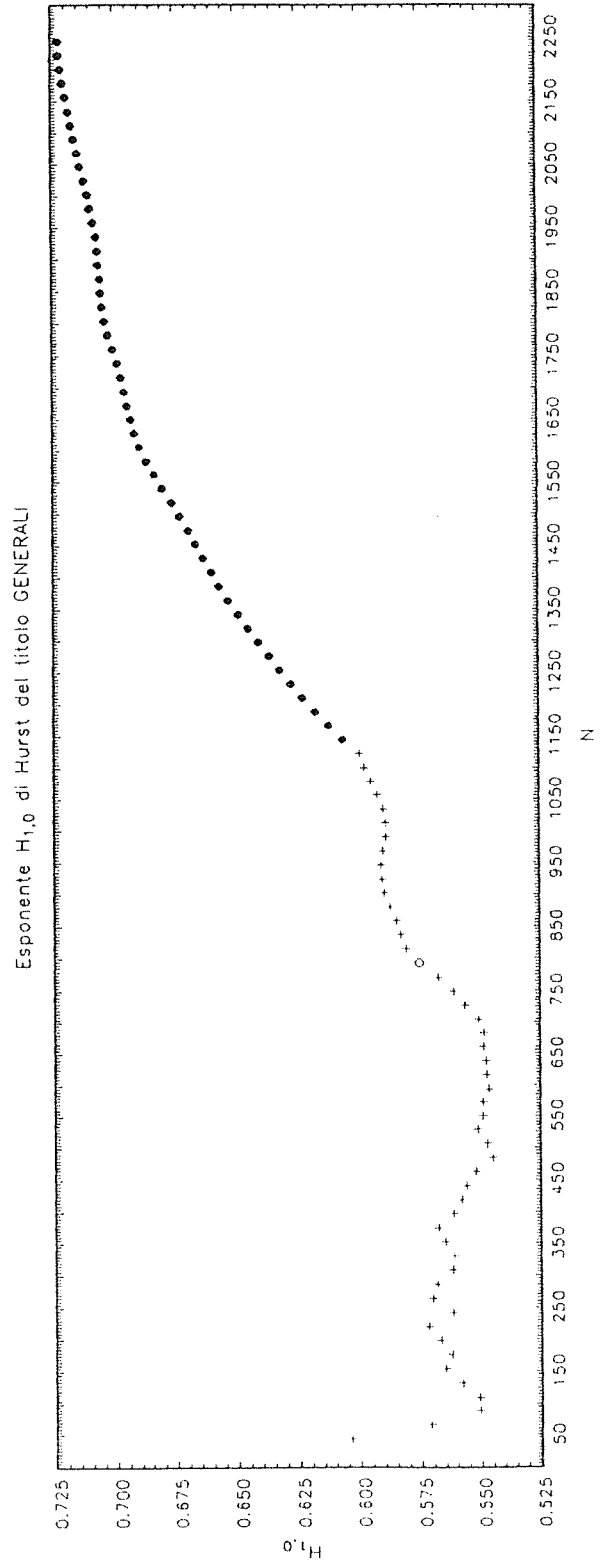
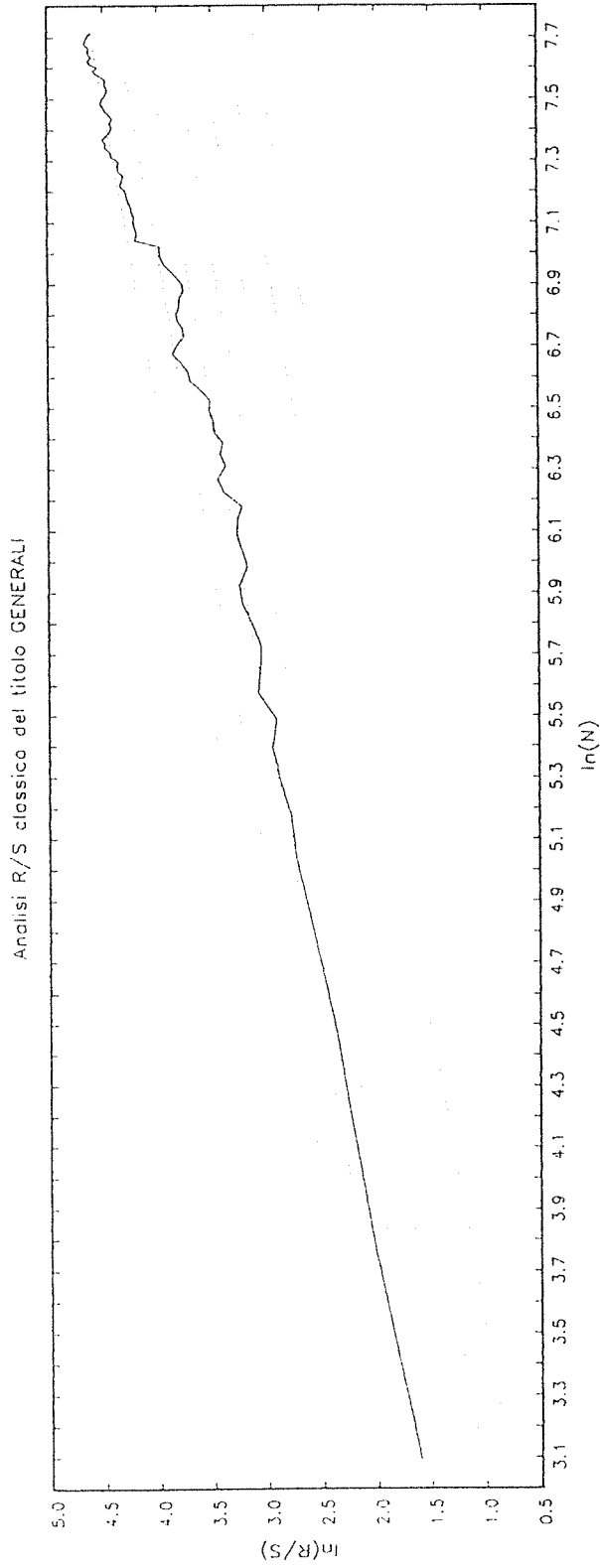




Figura 26

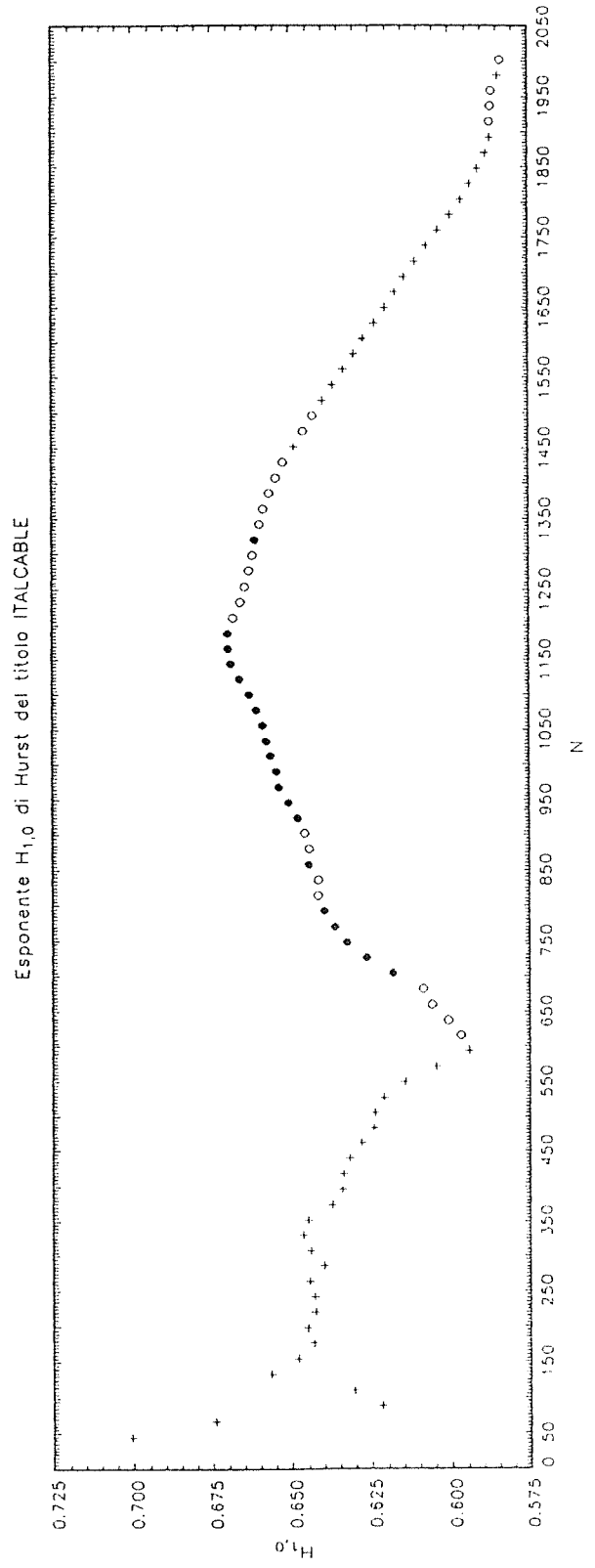
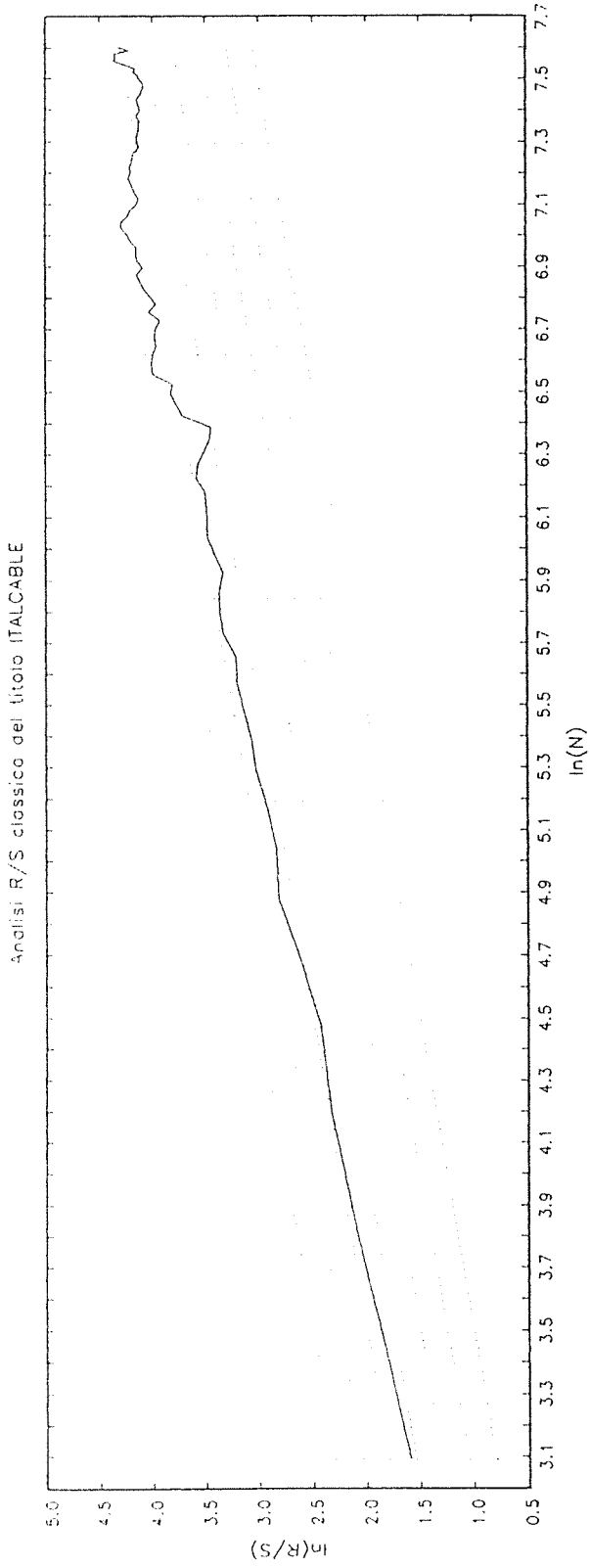


Figura 27

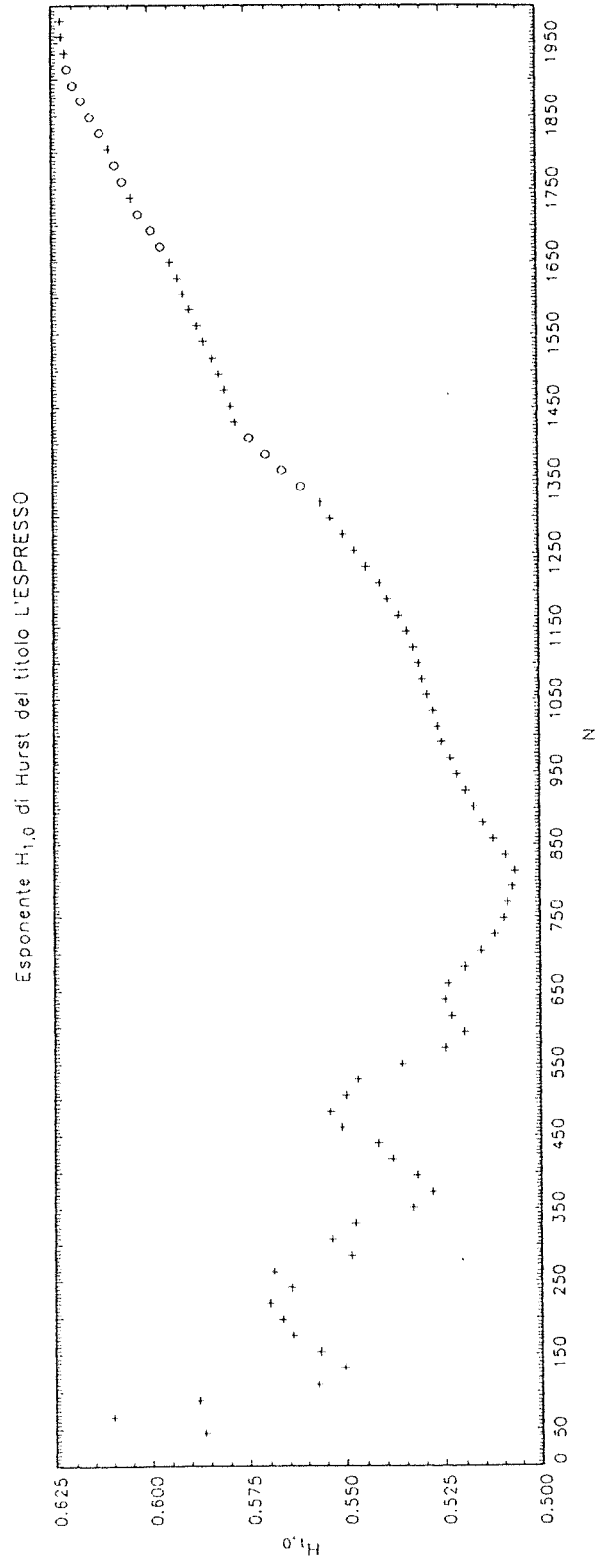
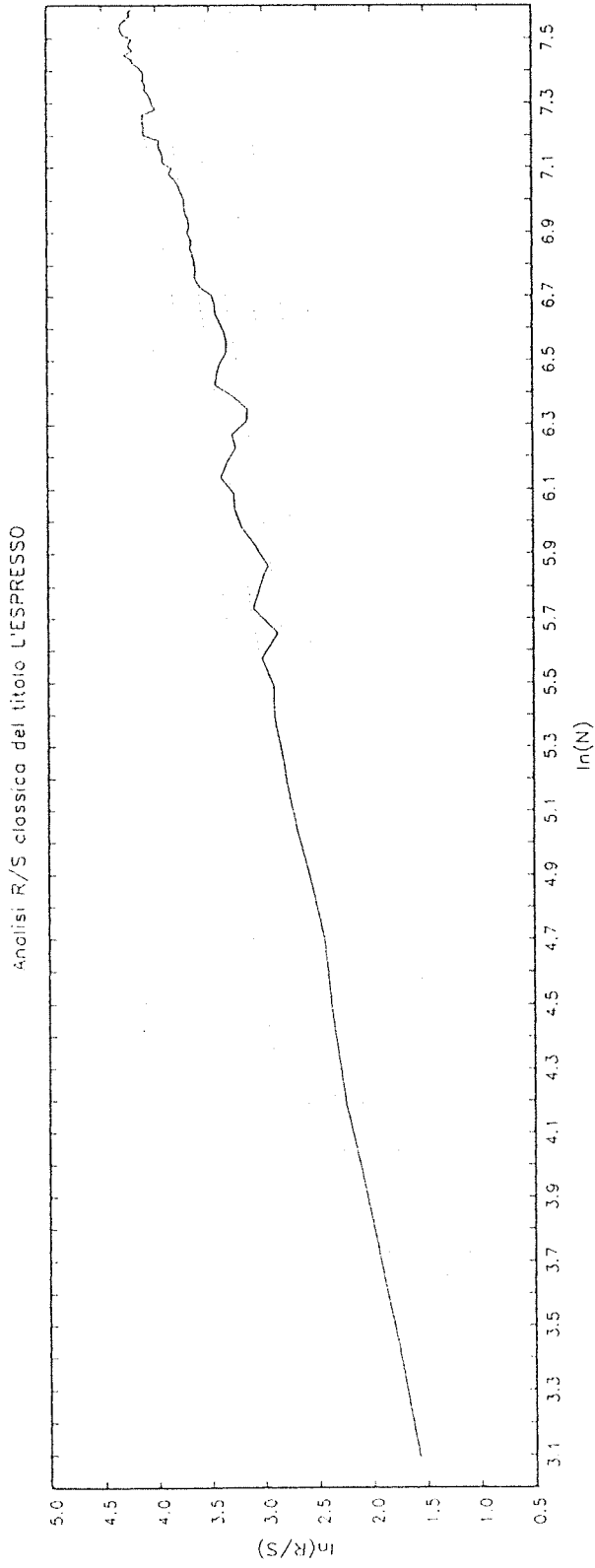


Figura 28

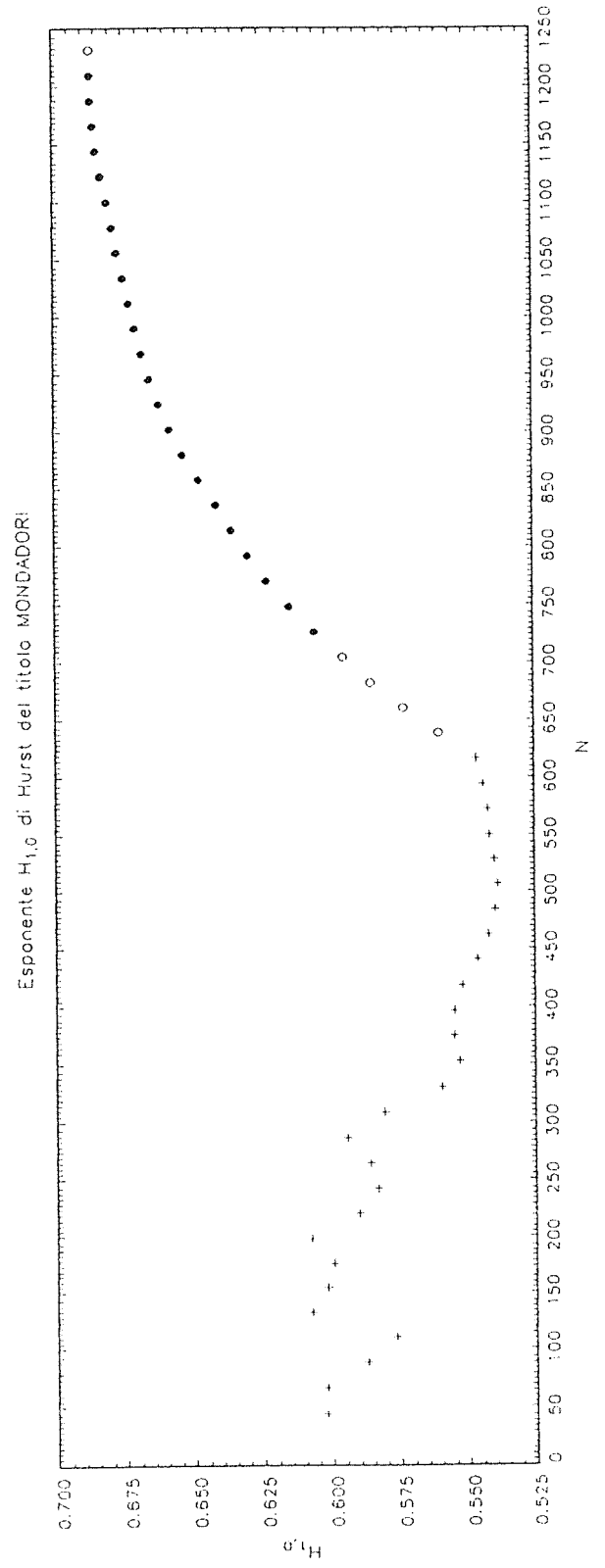
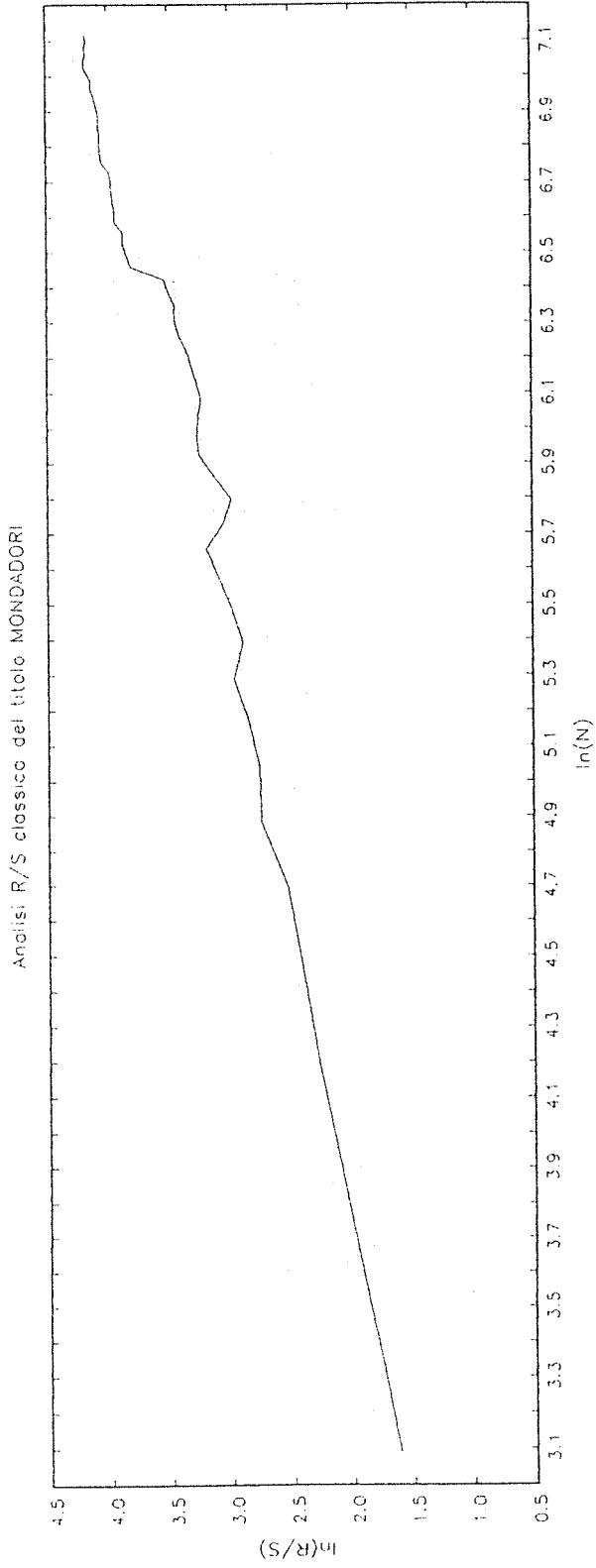


Figura 29

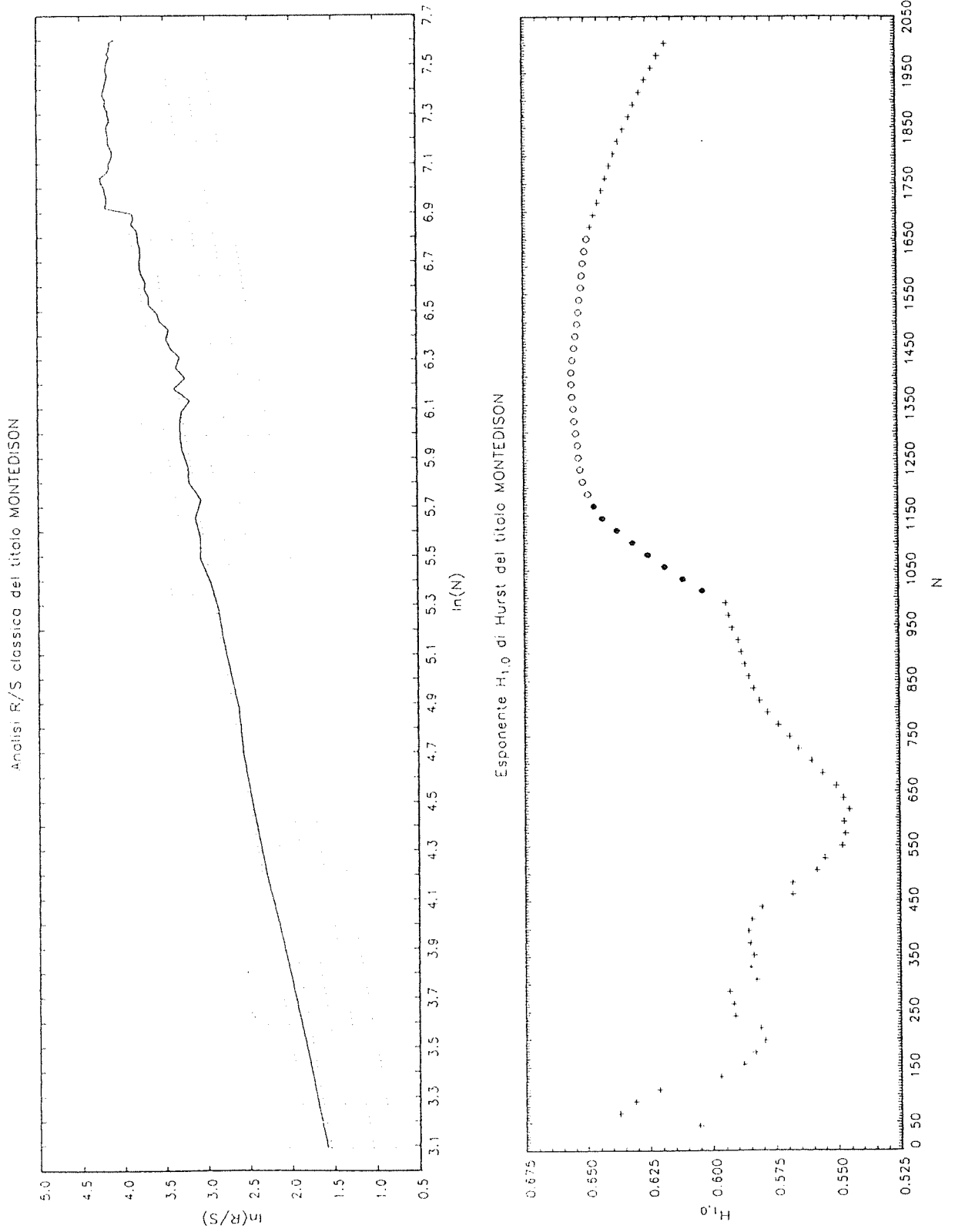


Figura 30

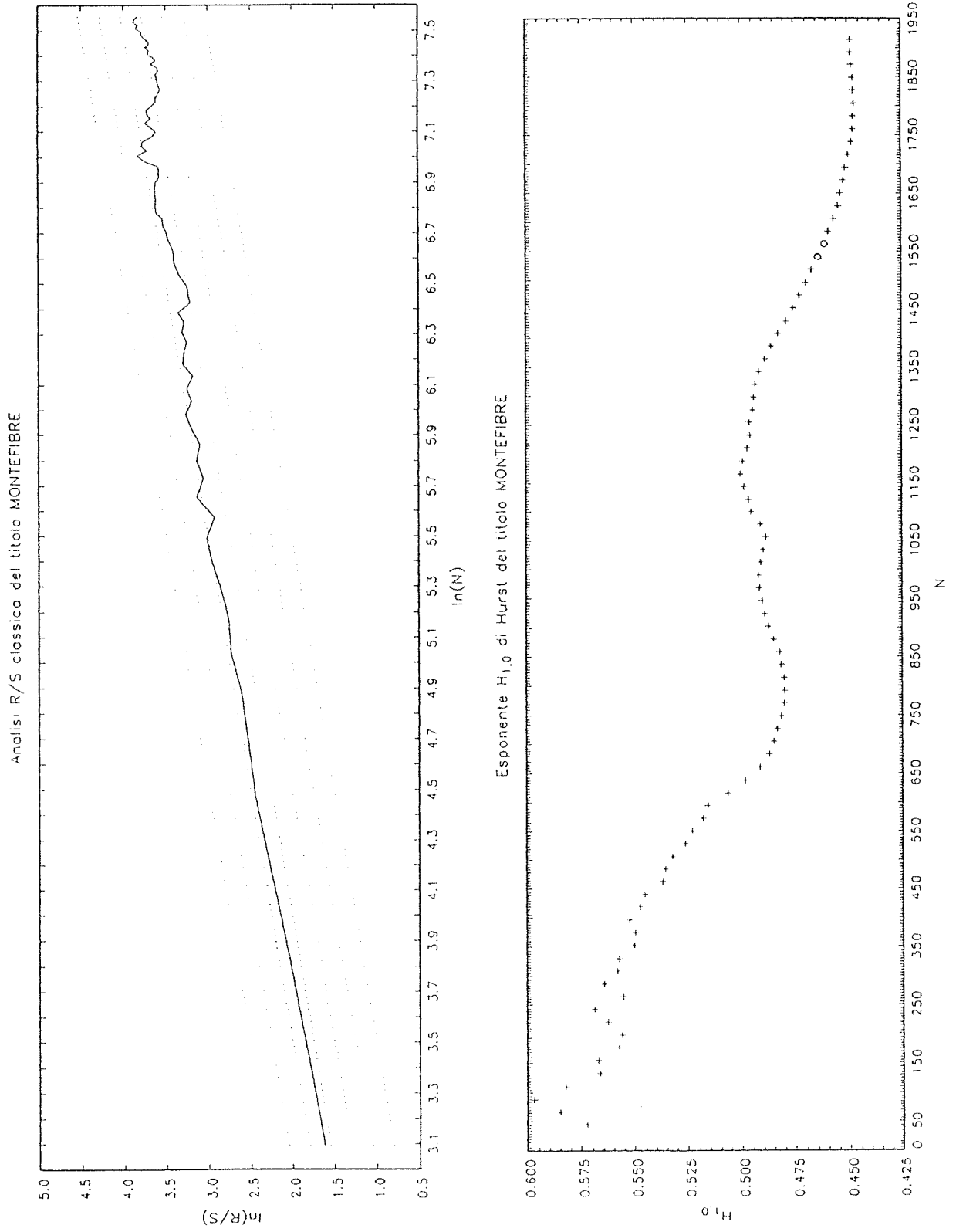


Figura 31

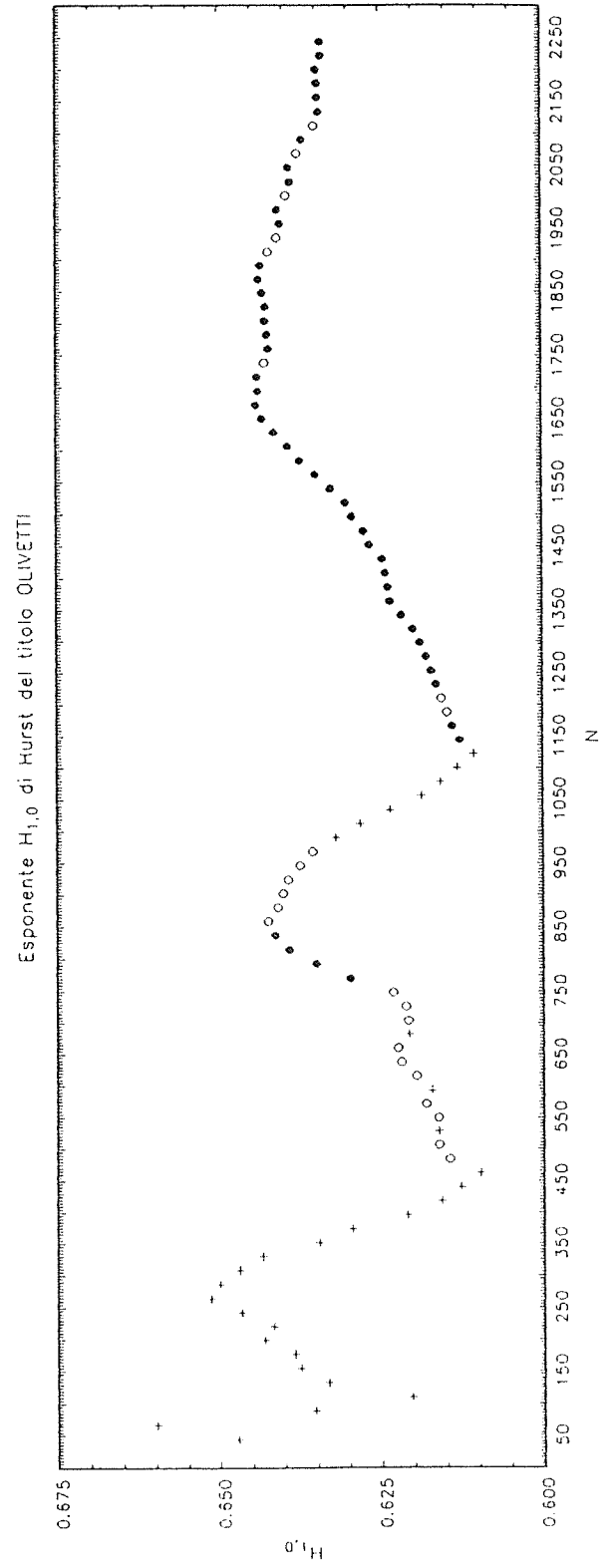
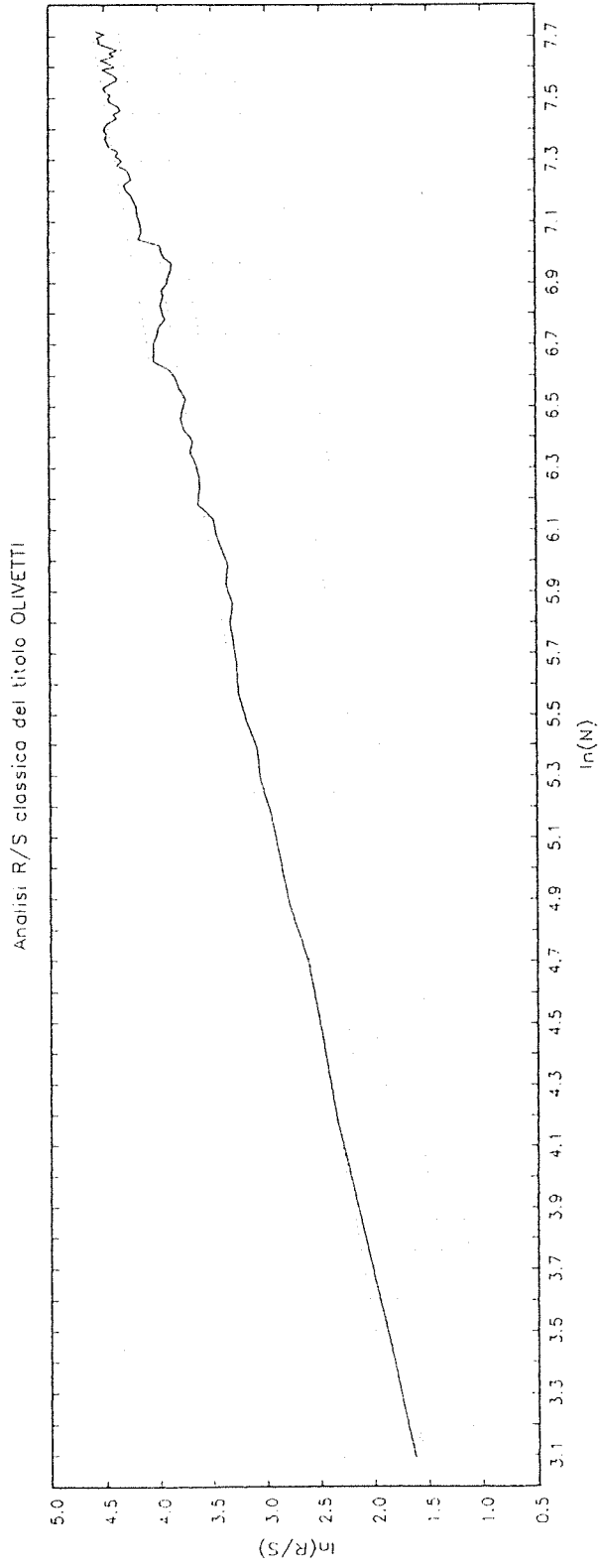


Figura 32

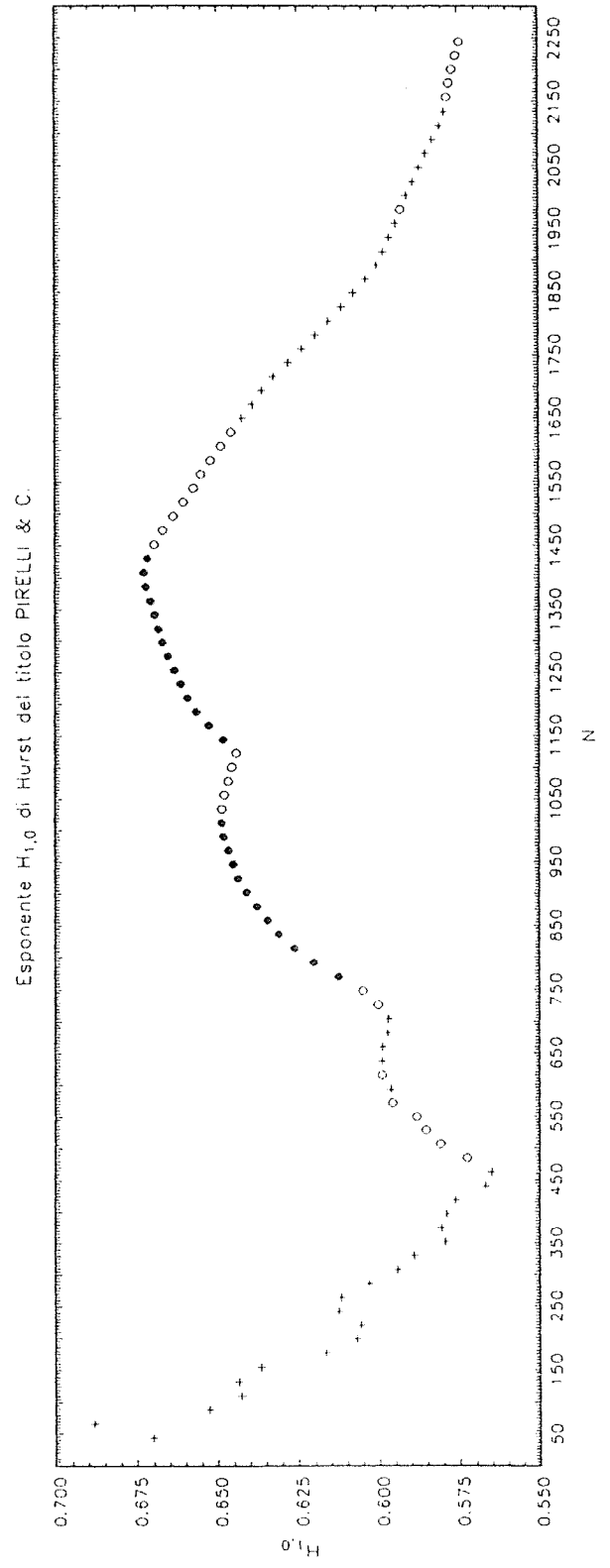
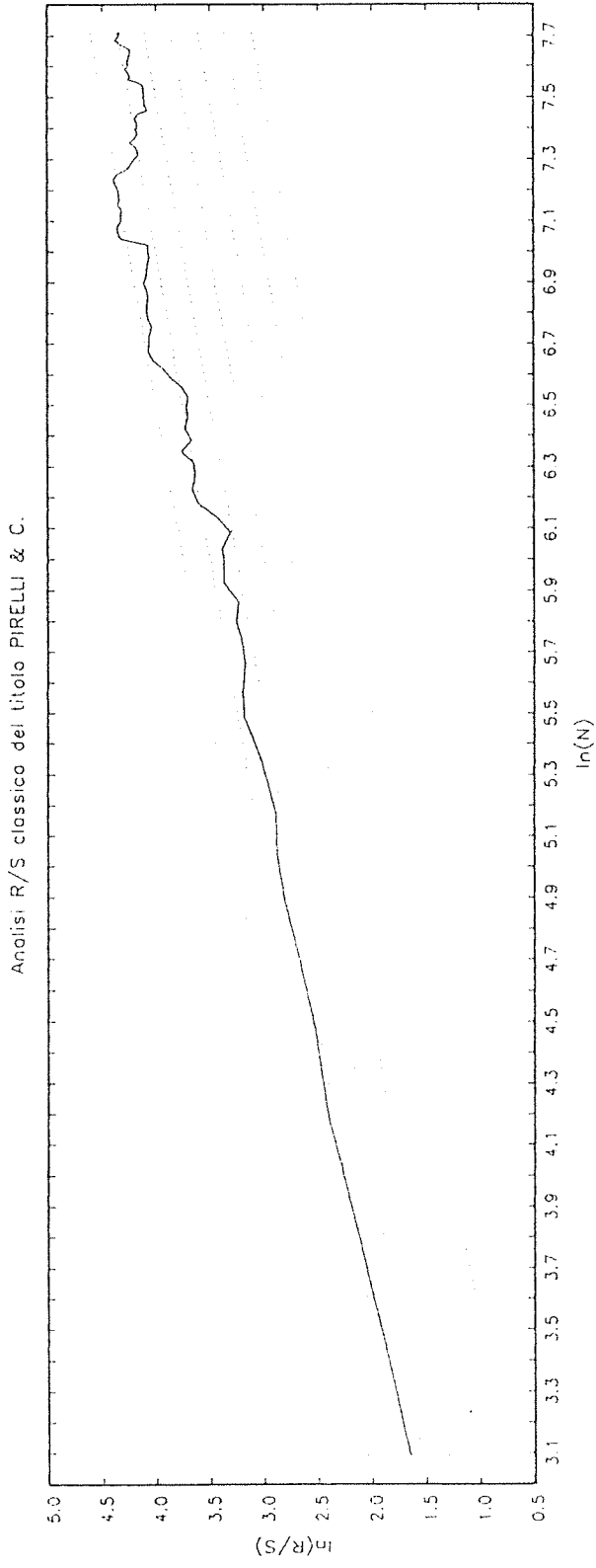


Figura 33

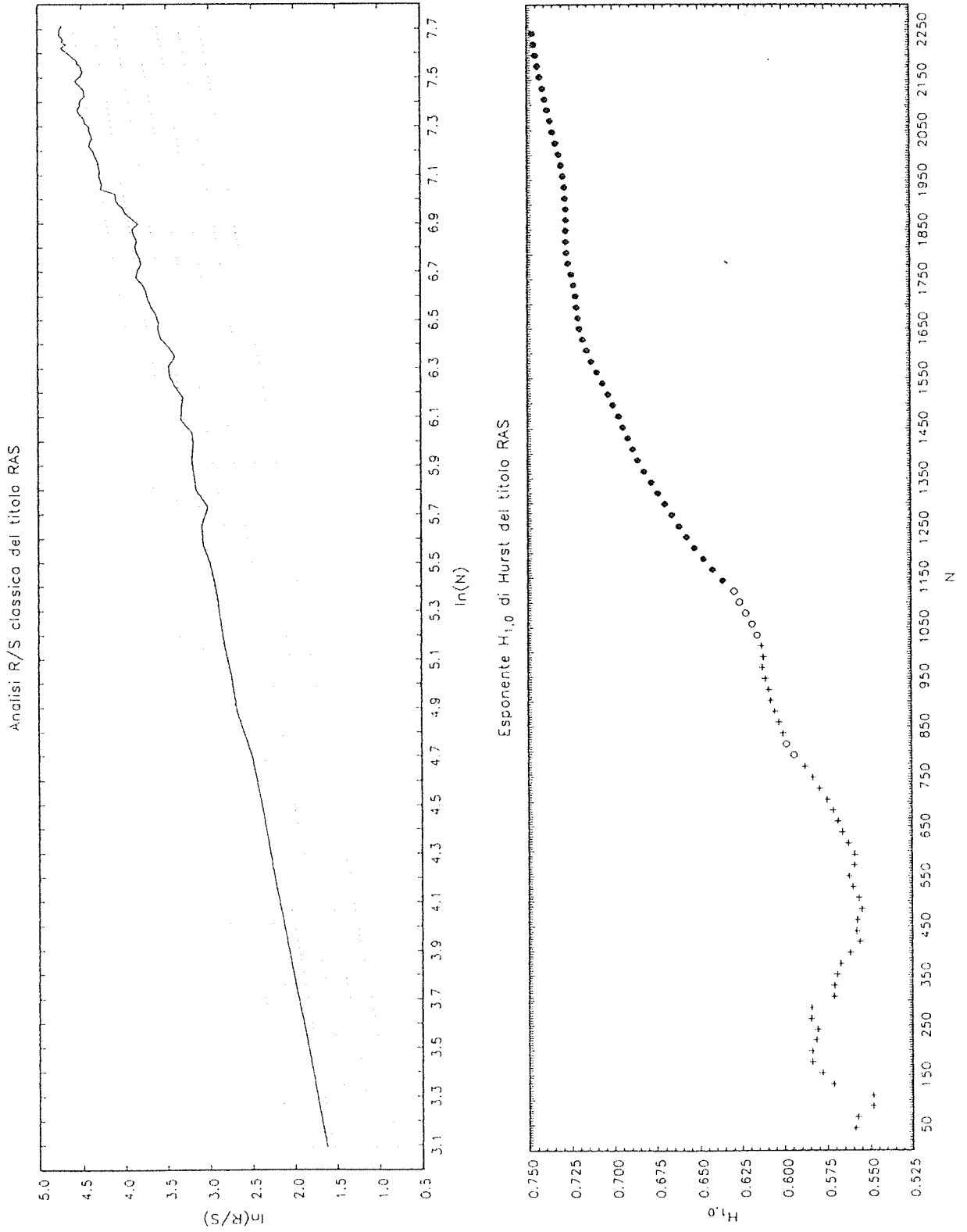




Figura 34

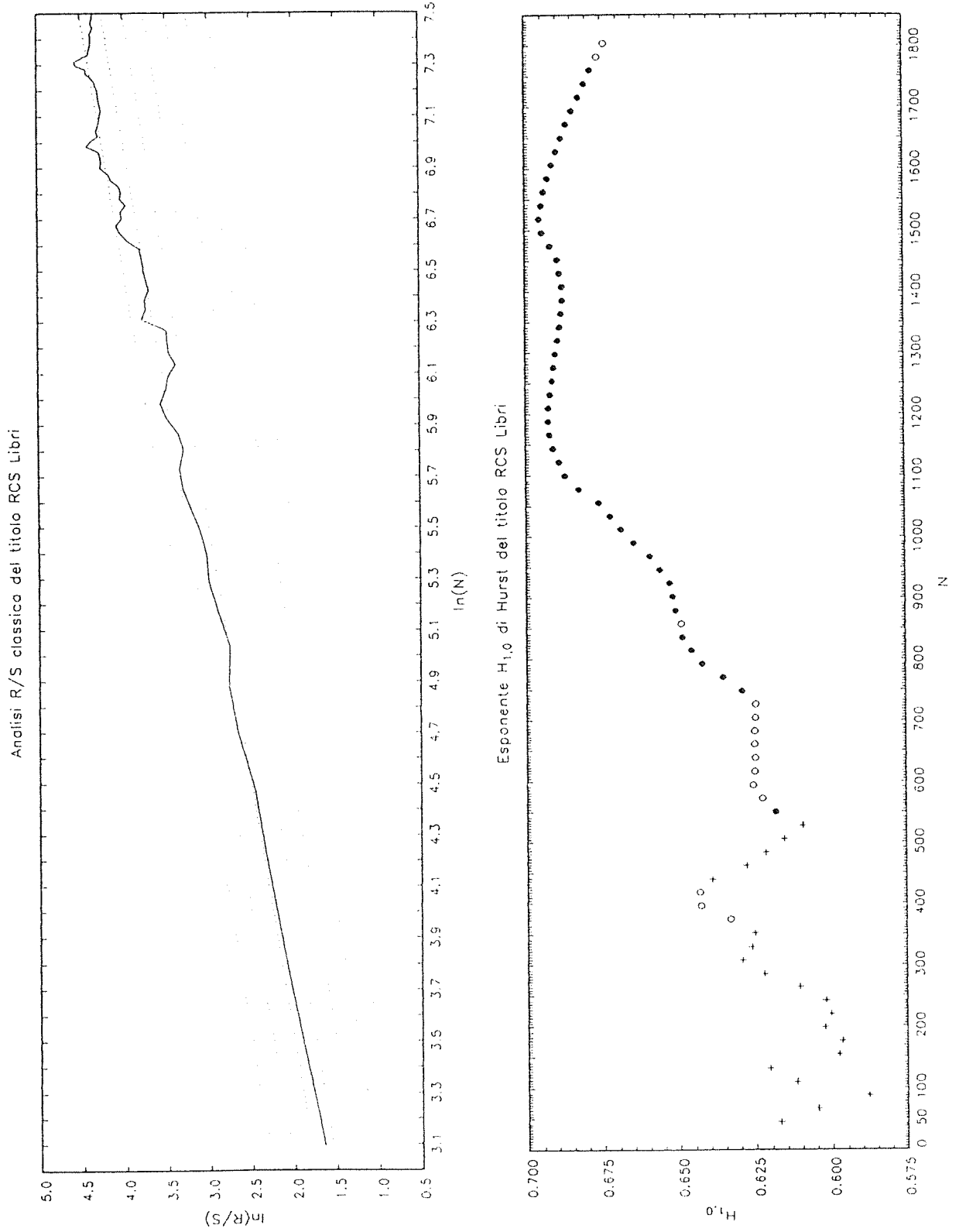


Figura 35

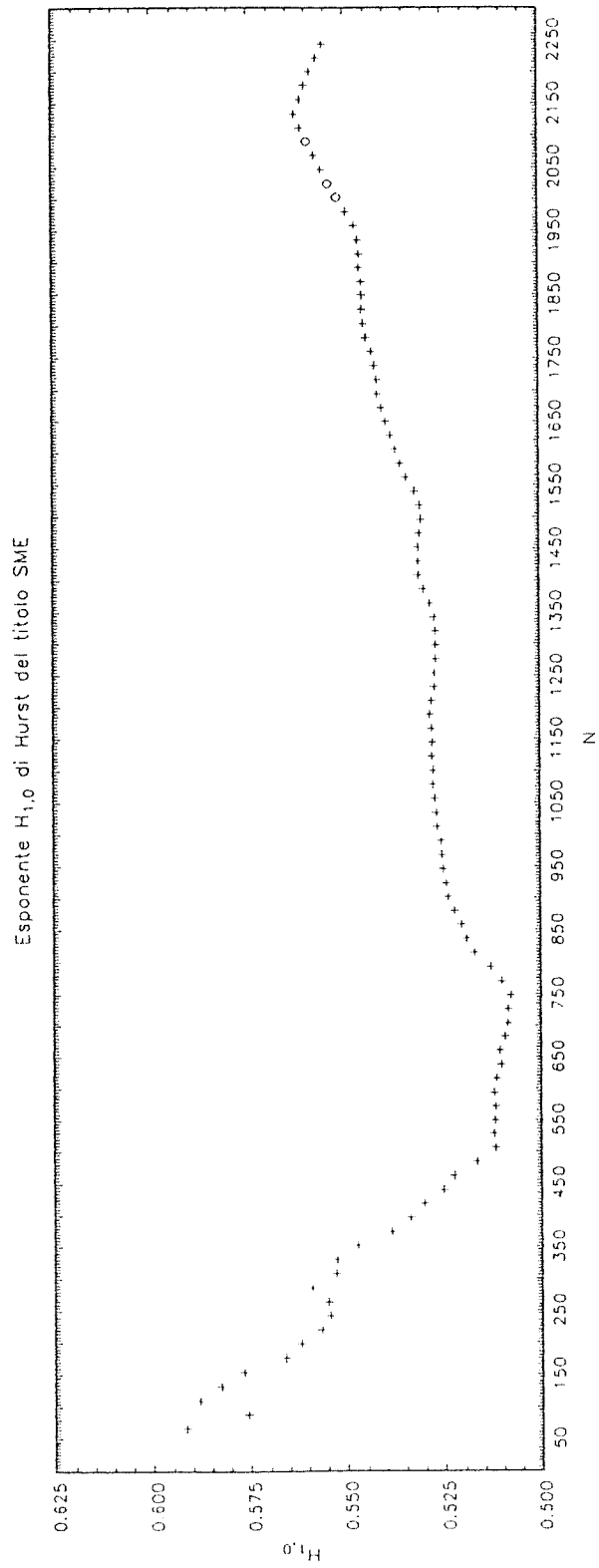
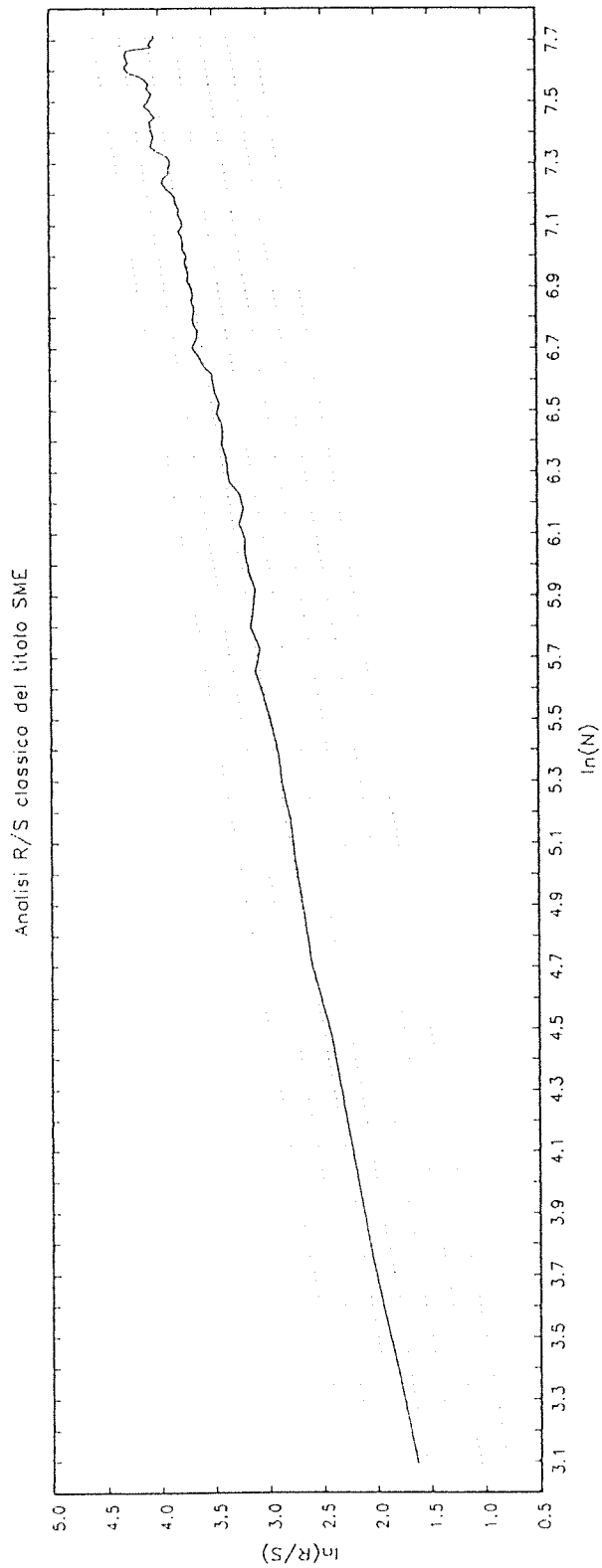


Figura 36

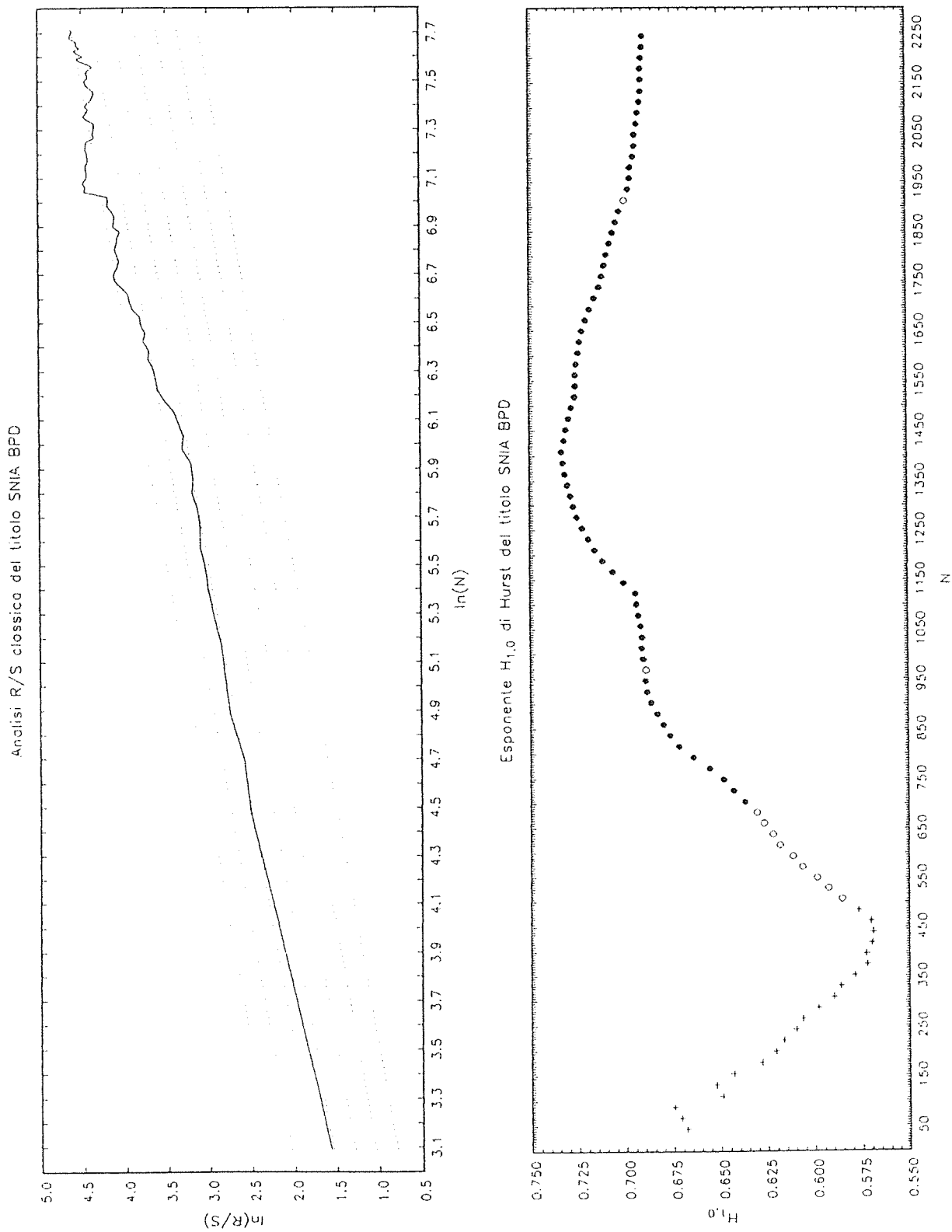


Figura 37

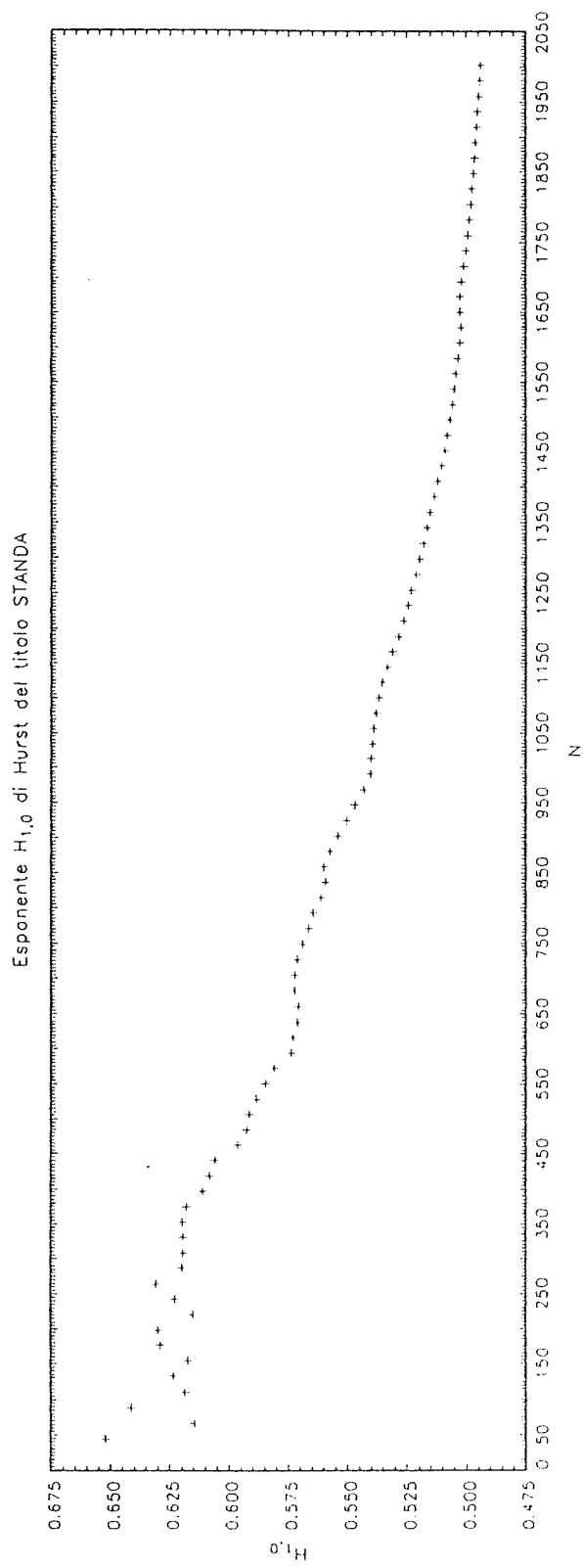
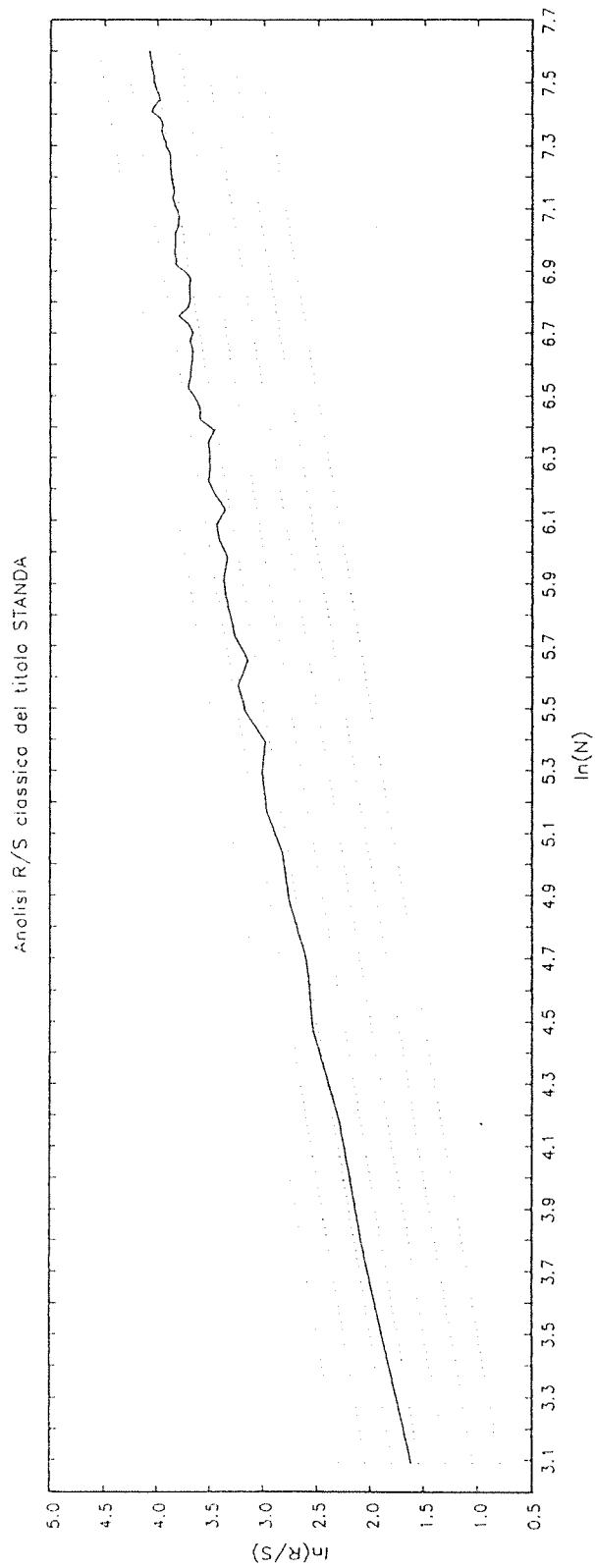


Figura 38

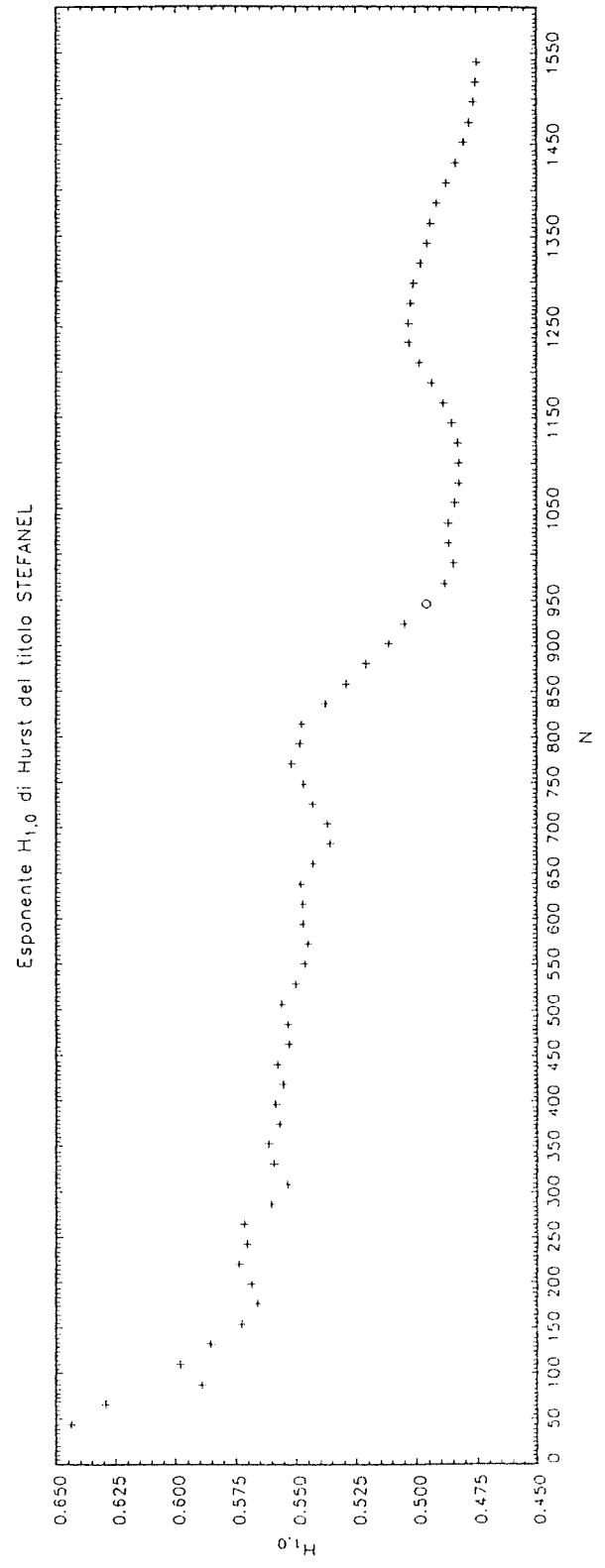
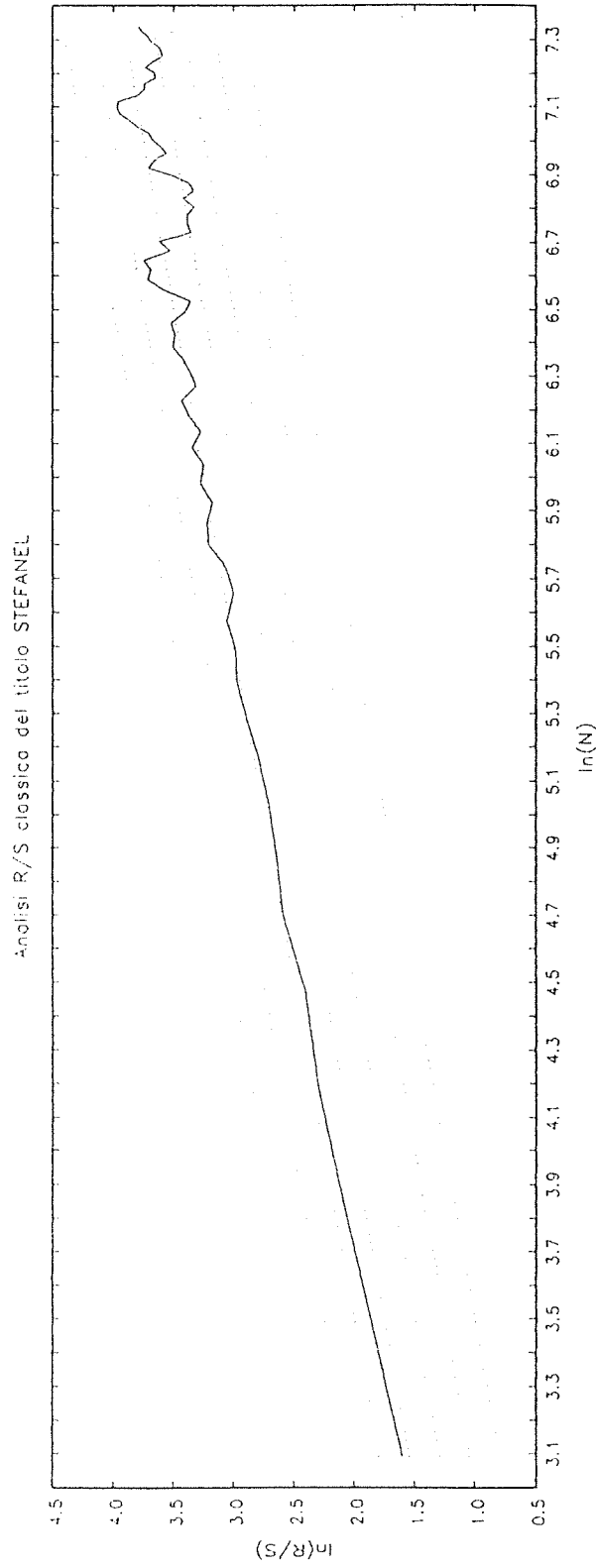


Figura 39

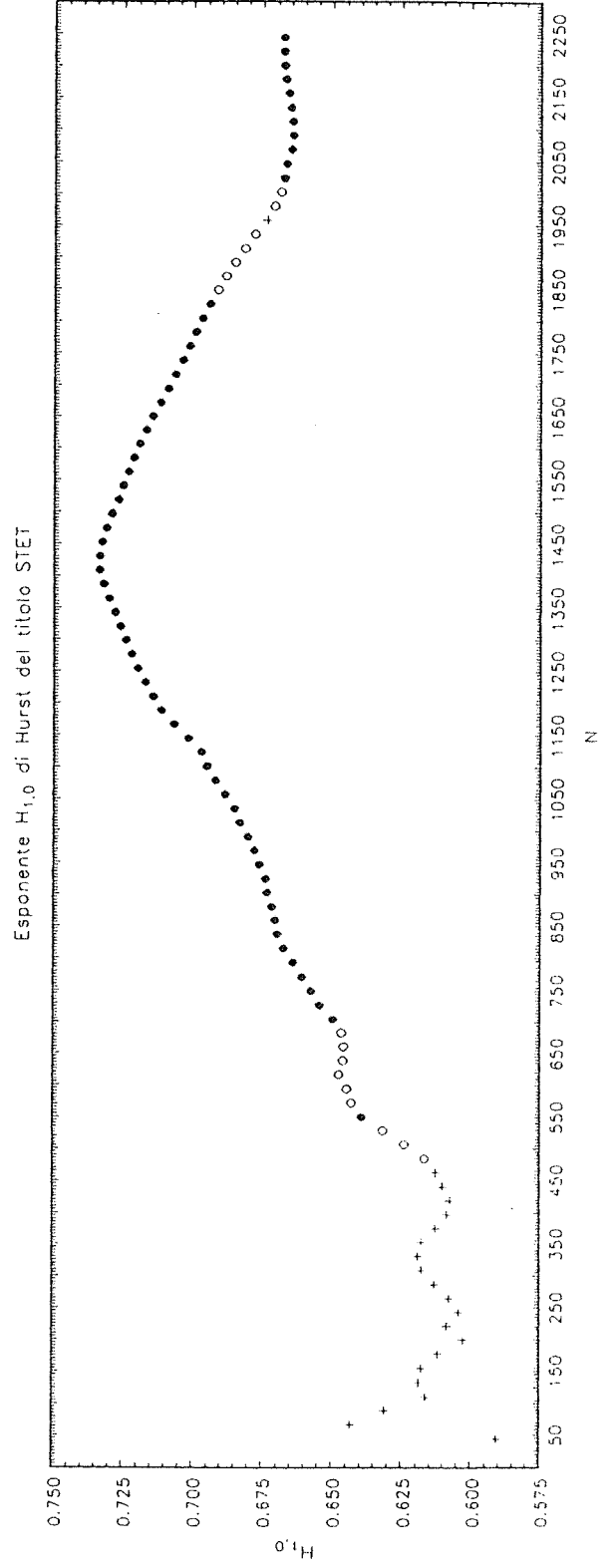
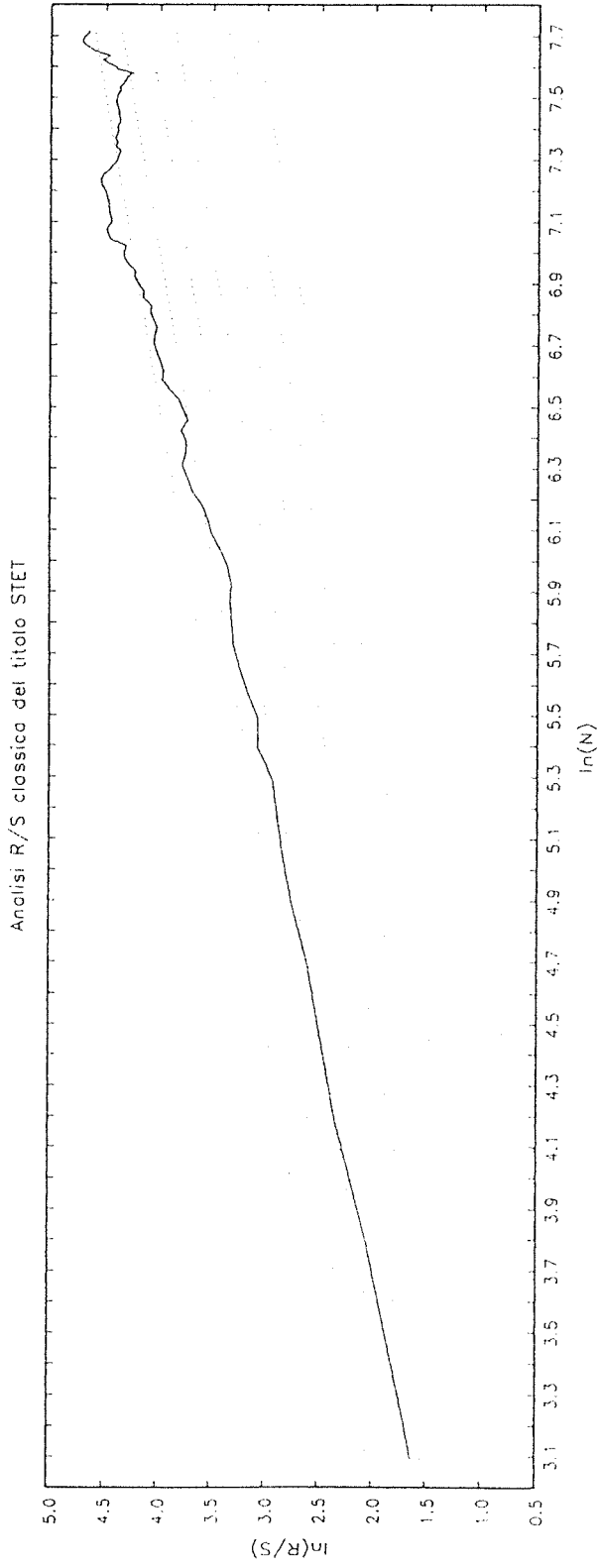


Figura 40

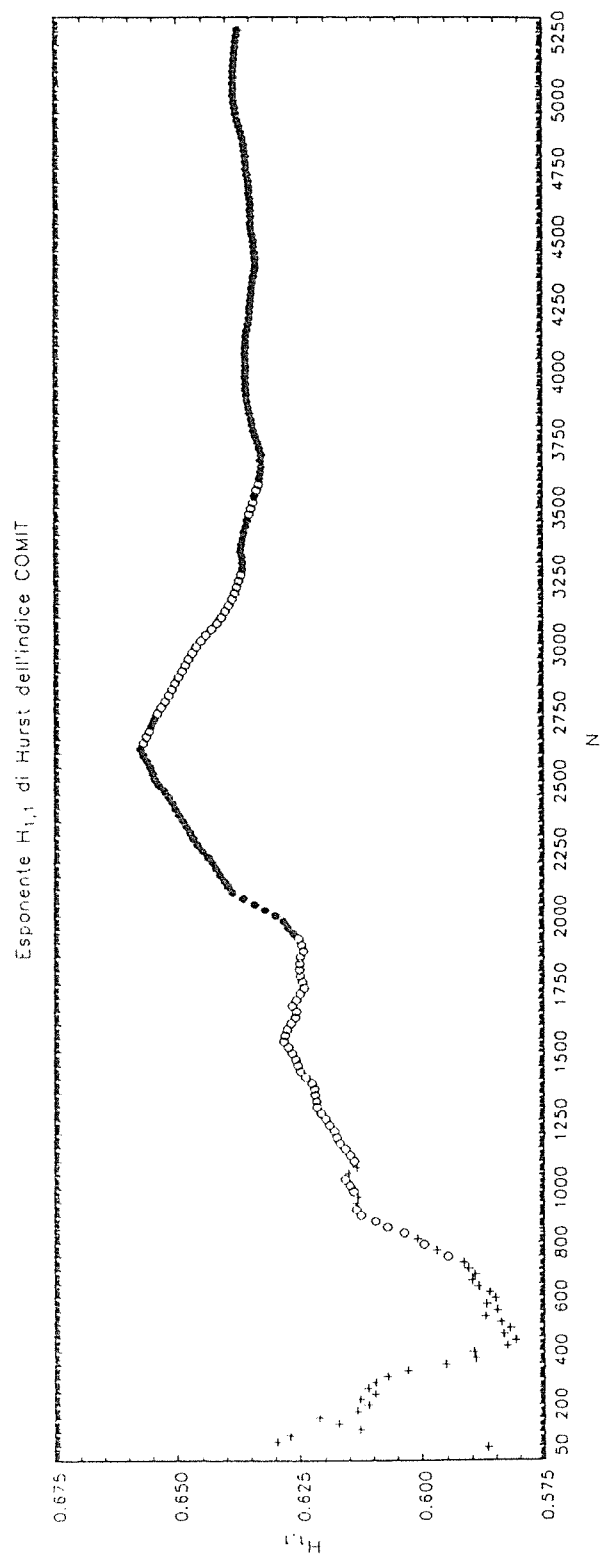
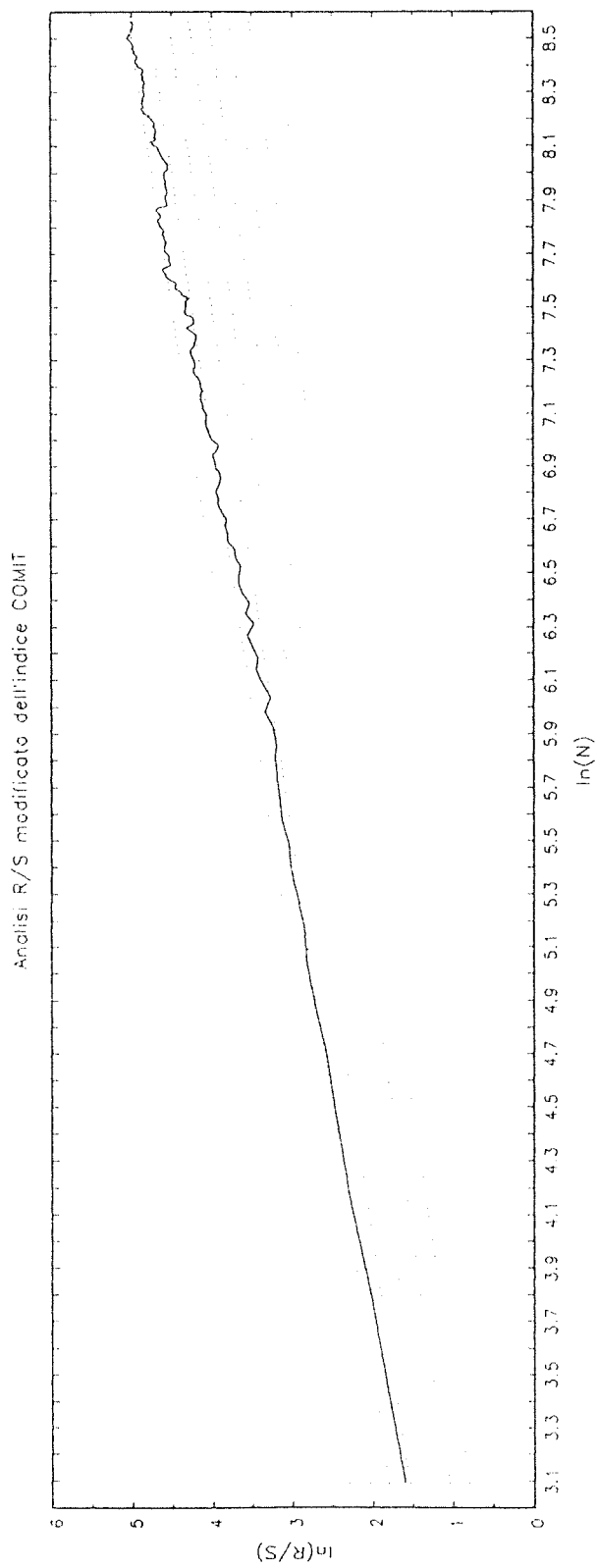


Figura 41

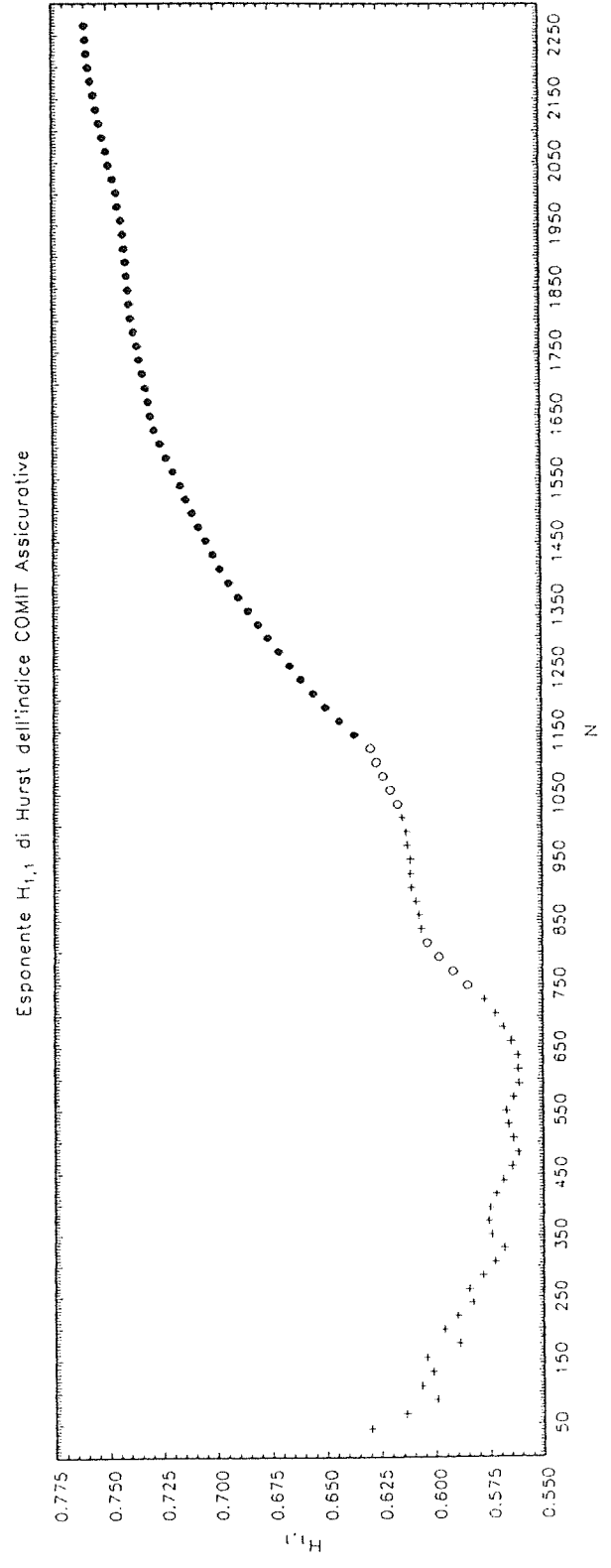
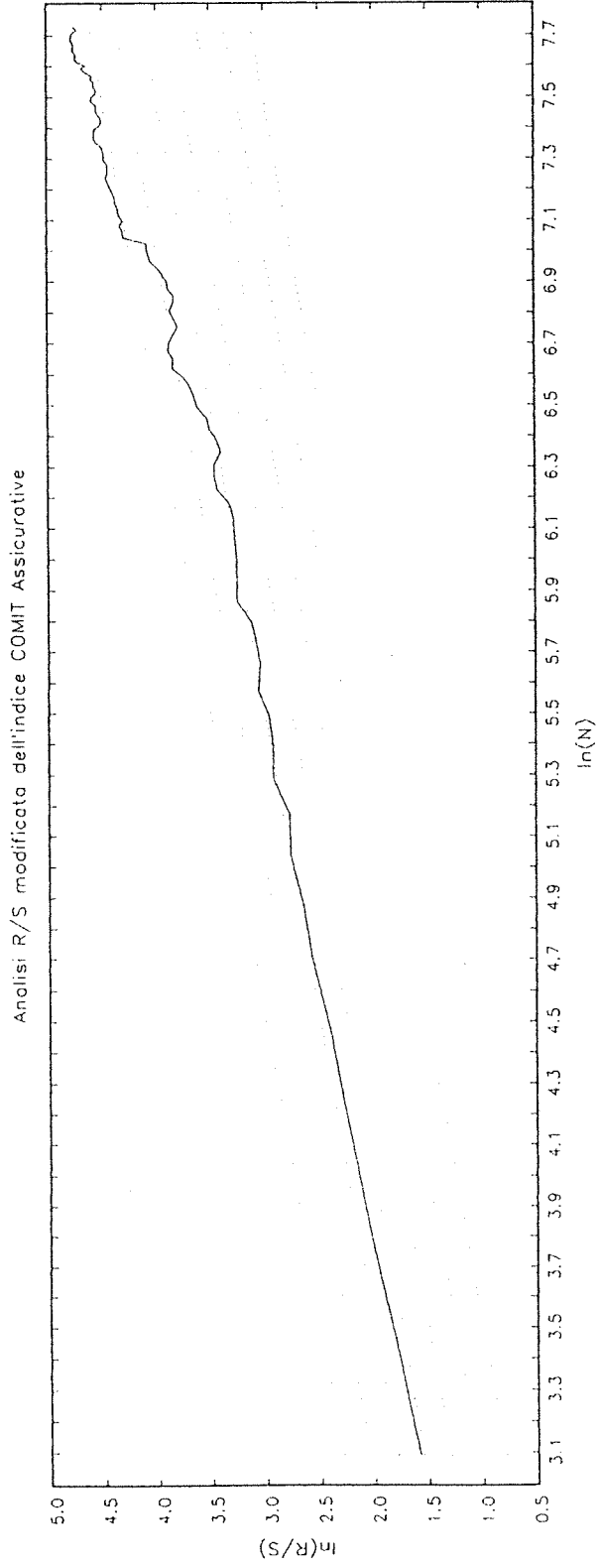




Figura 42

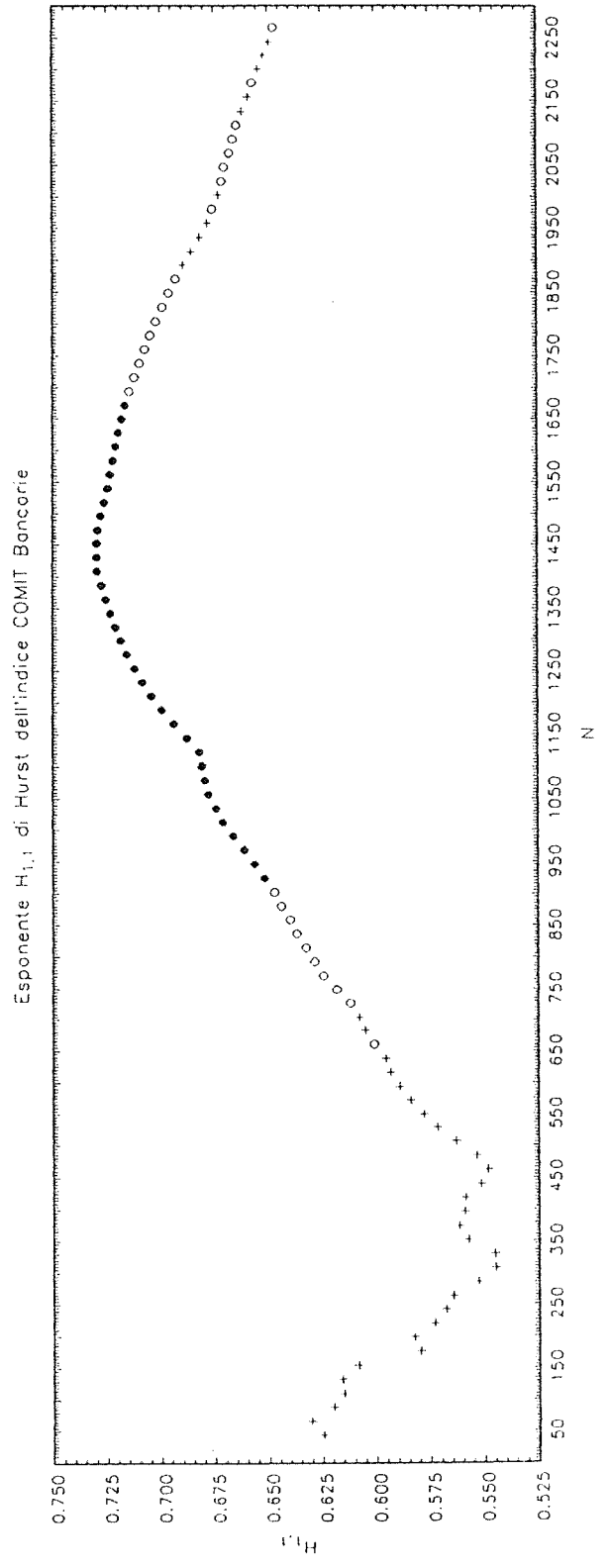
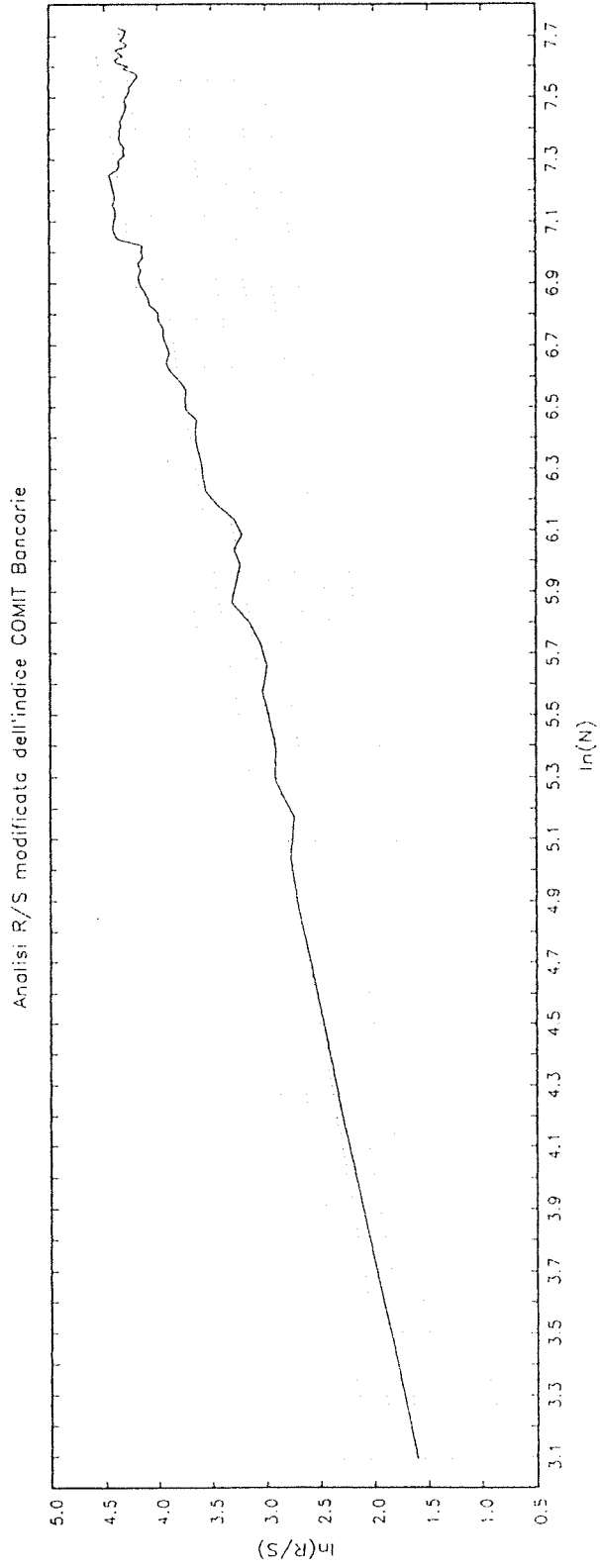


Figura 43

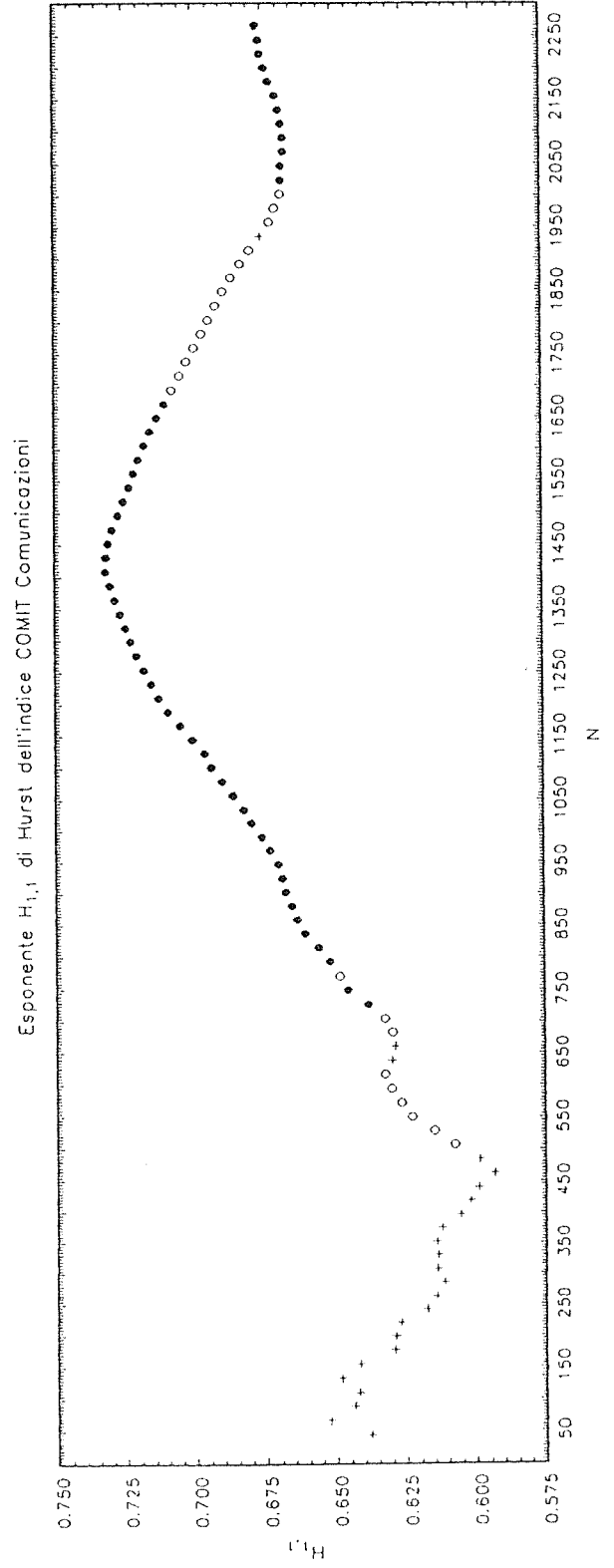
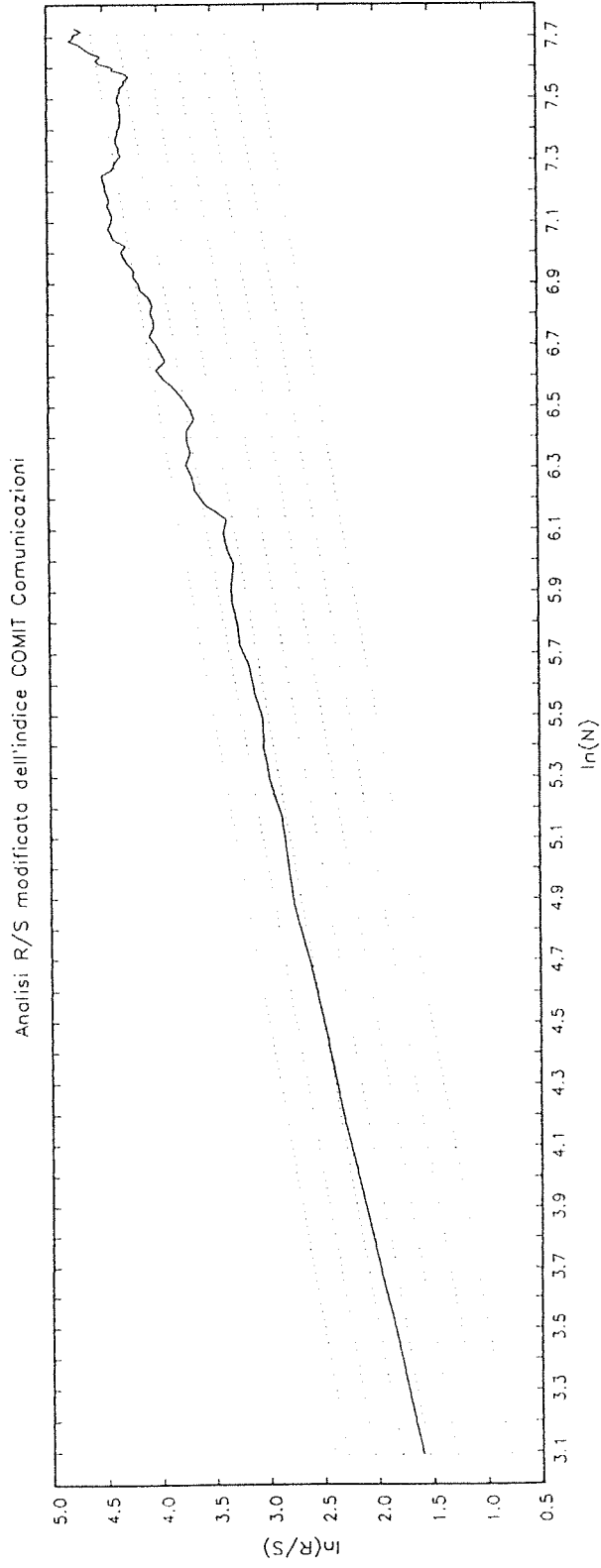


Figura 44

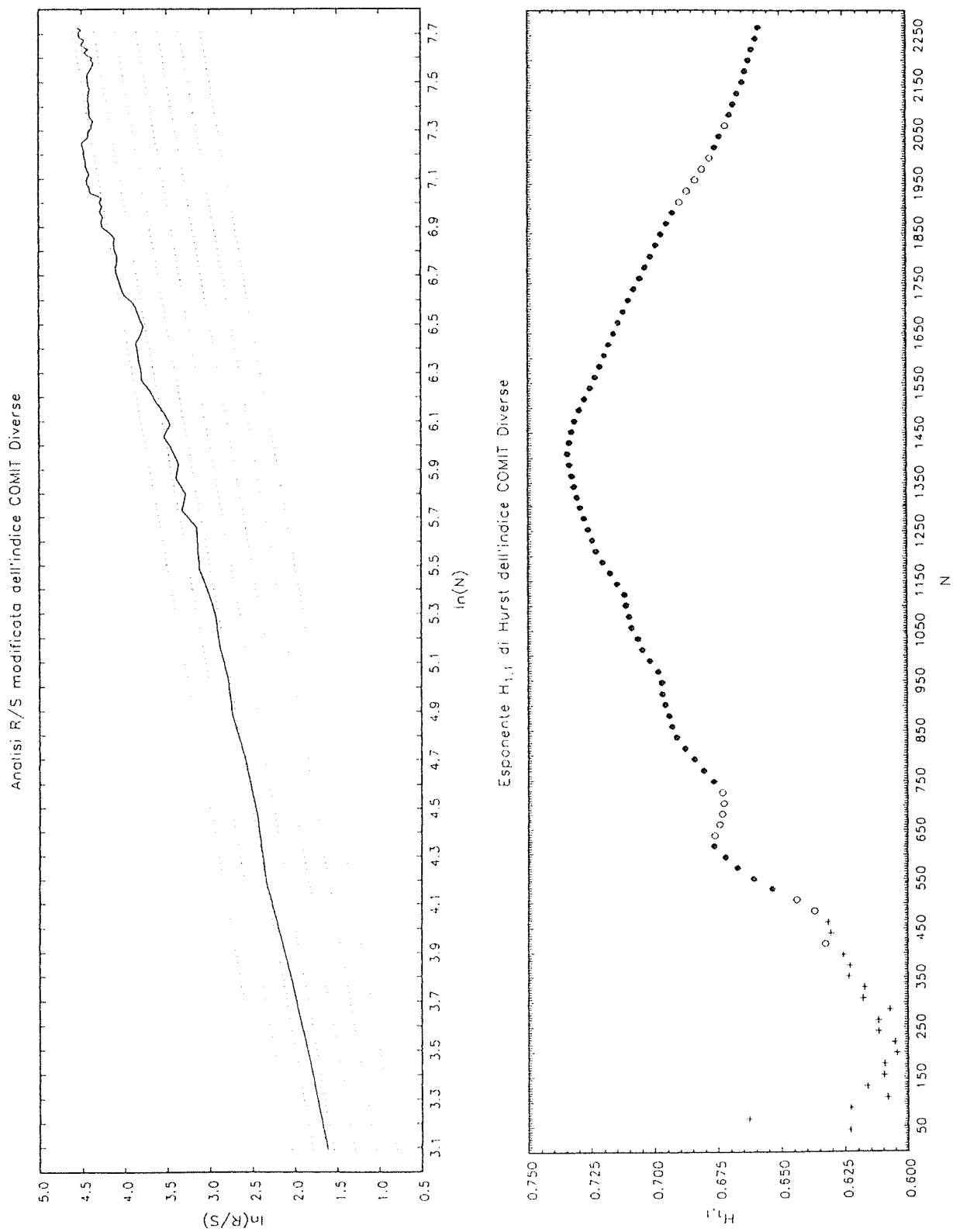


Figura 45

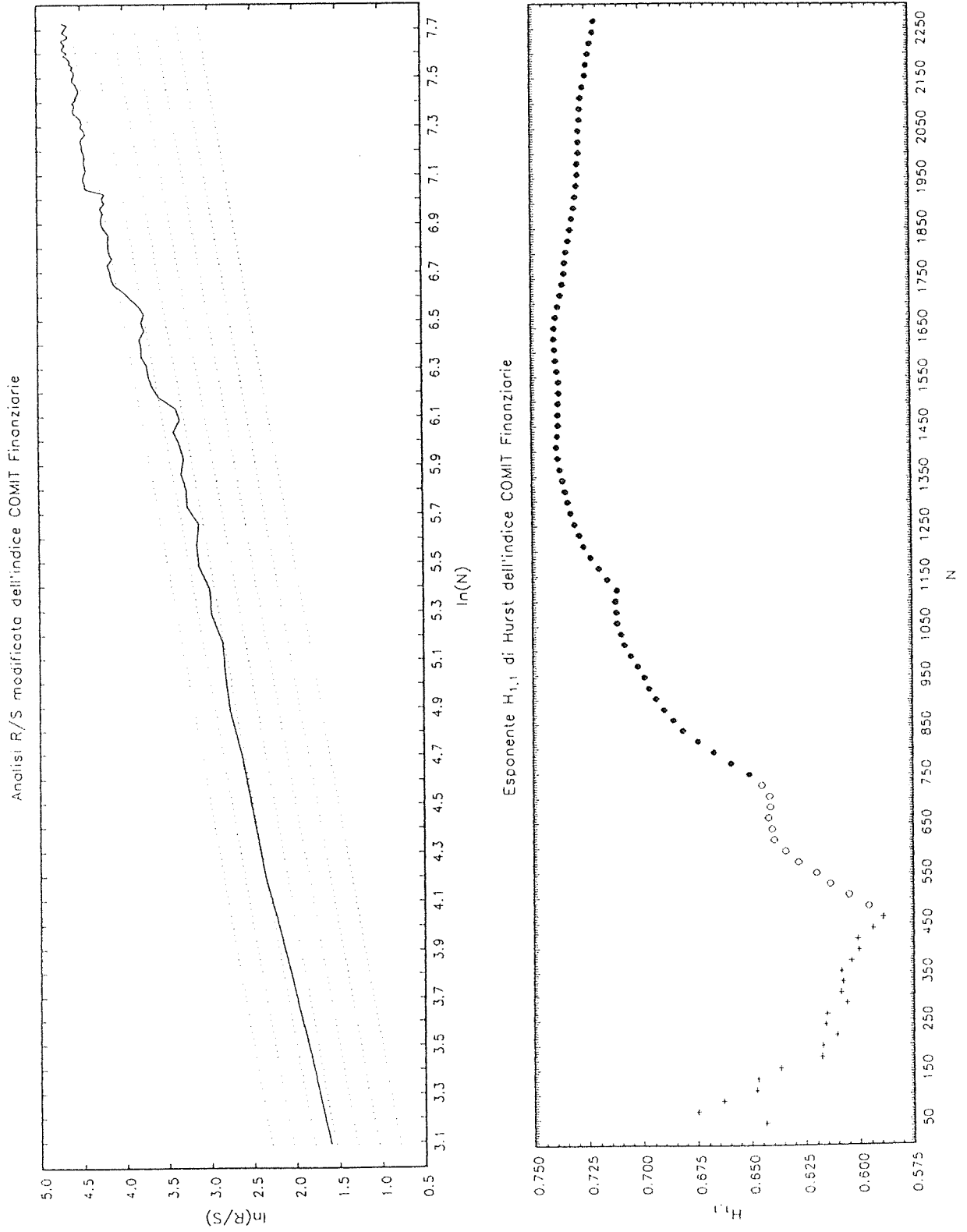


Figura 46

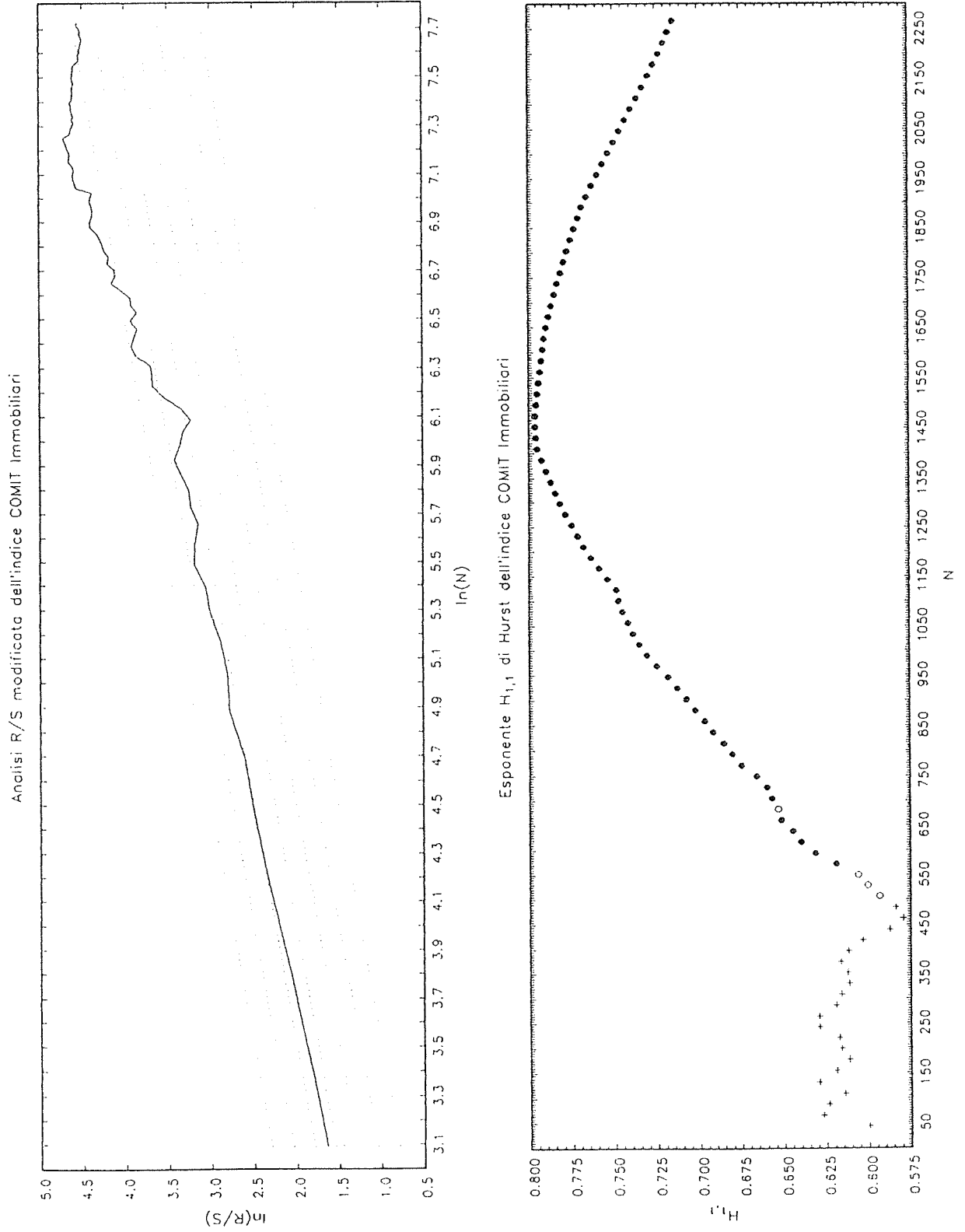


Figura 47

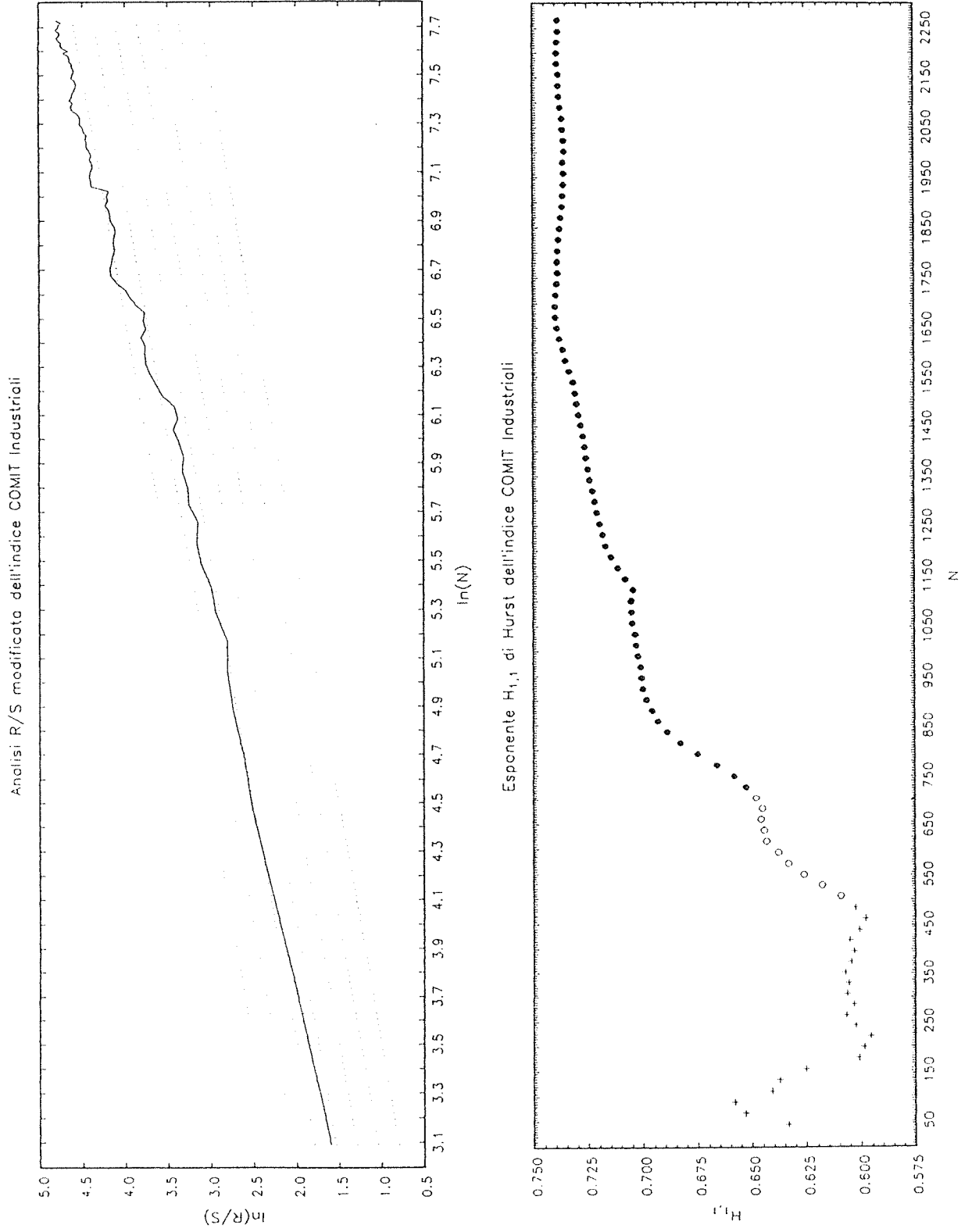


Figura 48

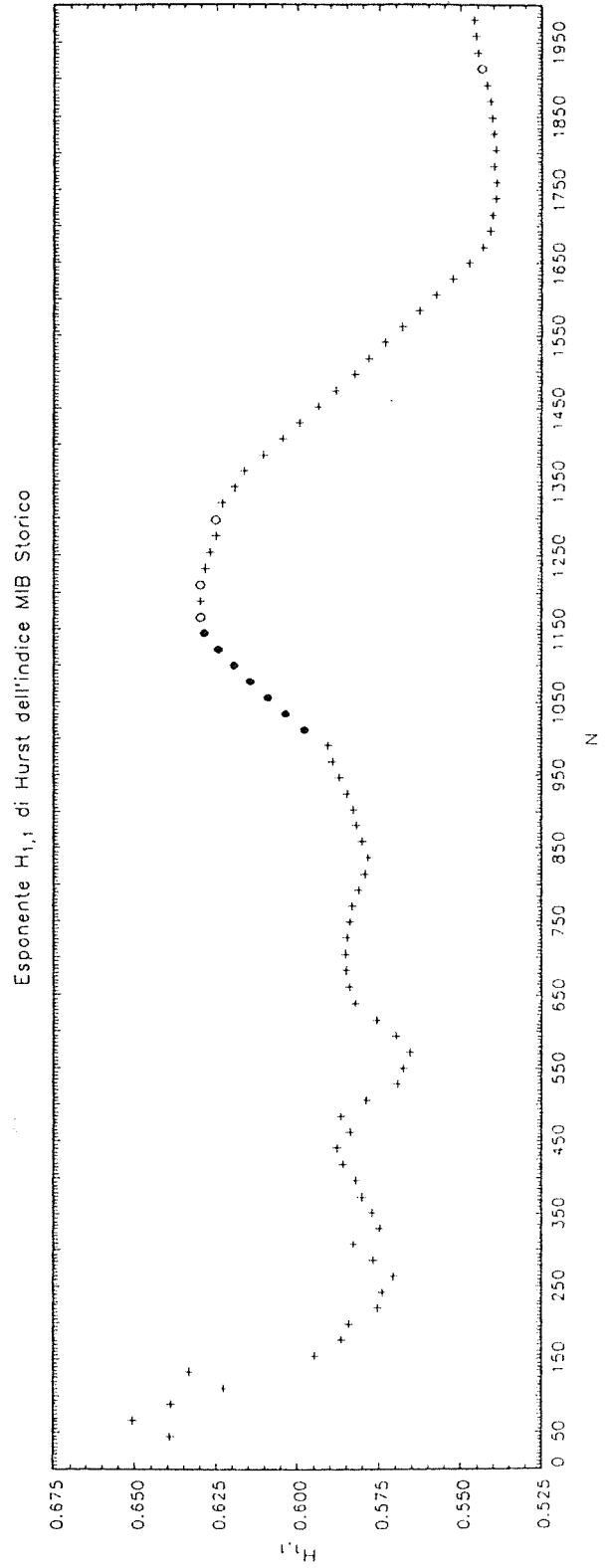
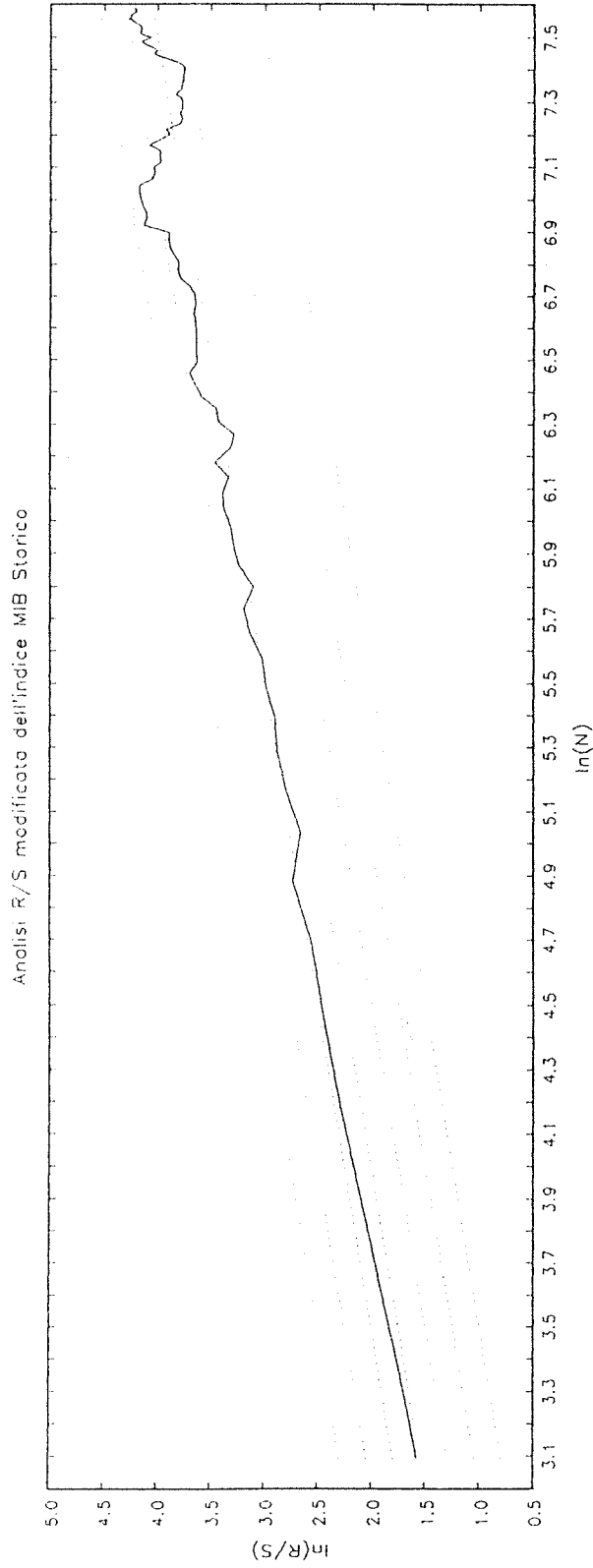






Figura 49

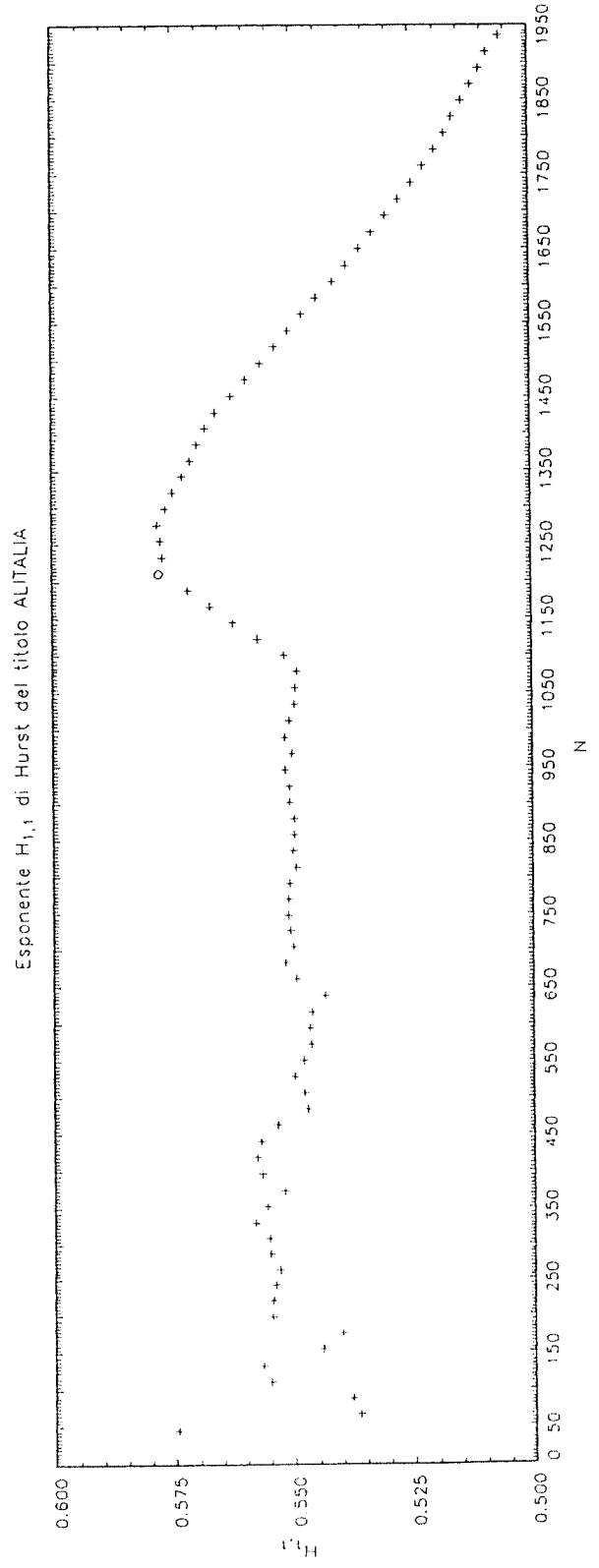
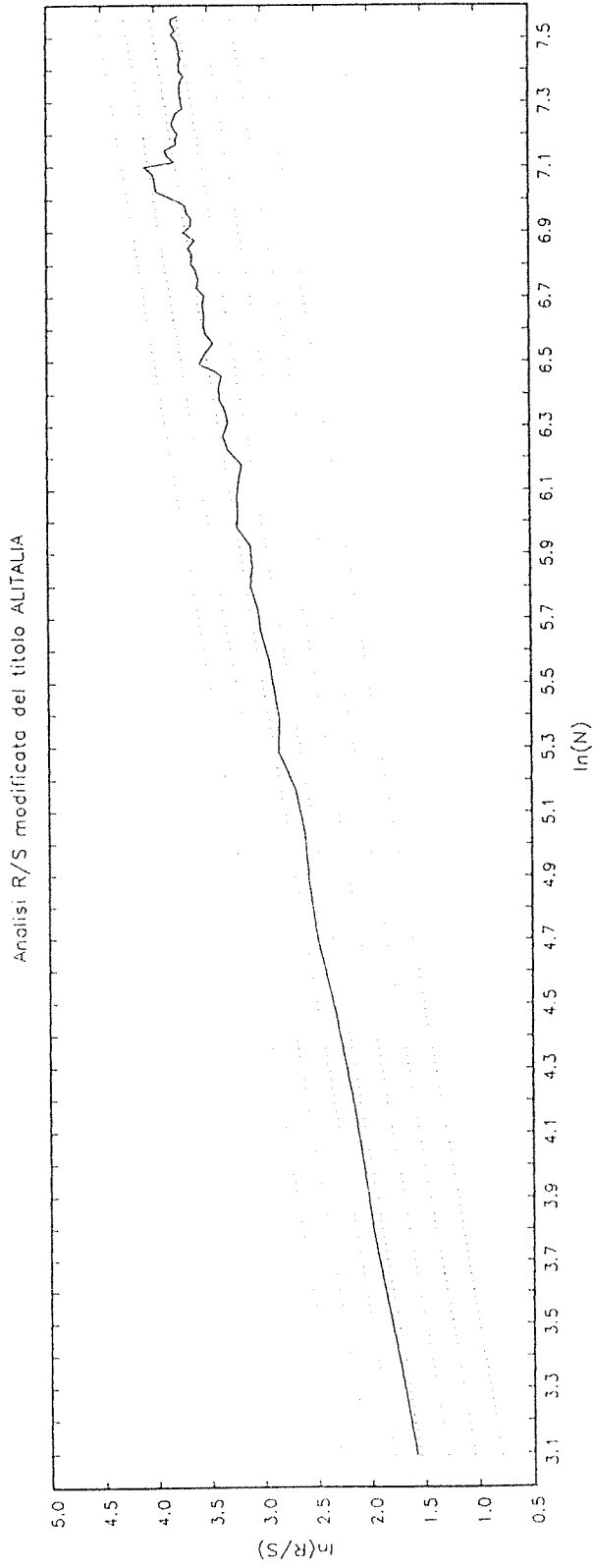


Figura 50

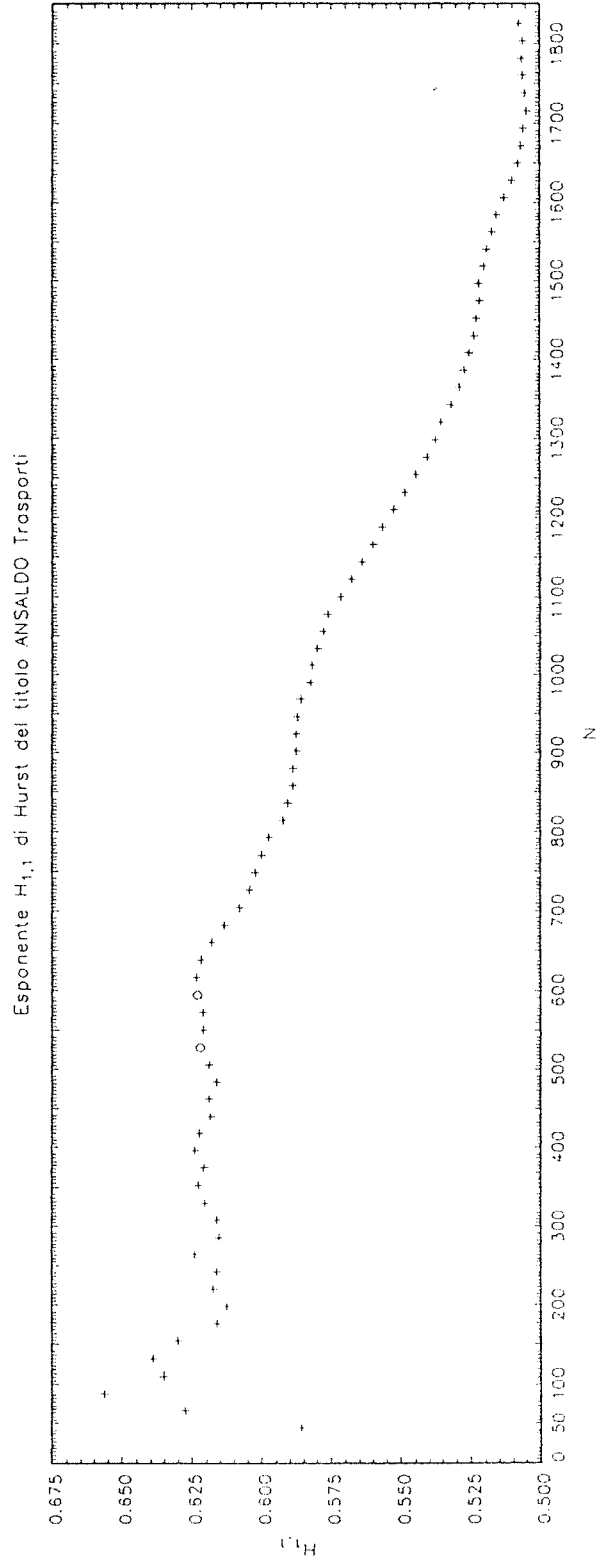
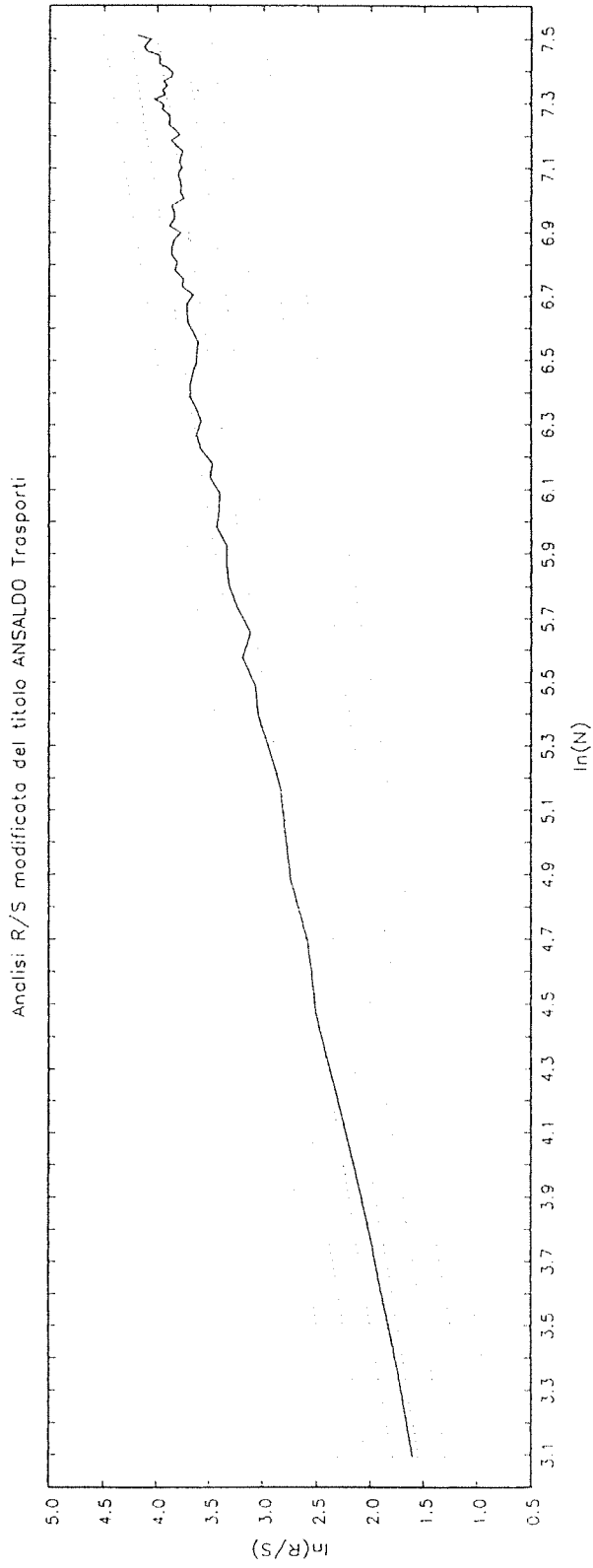


Figura 51

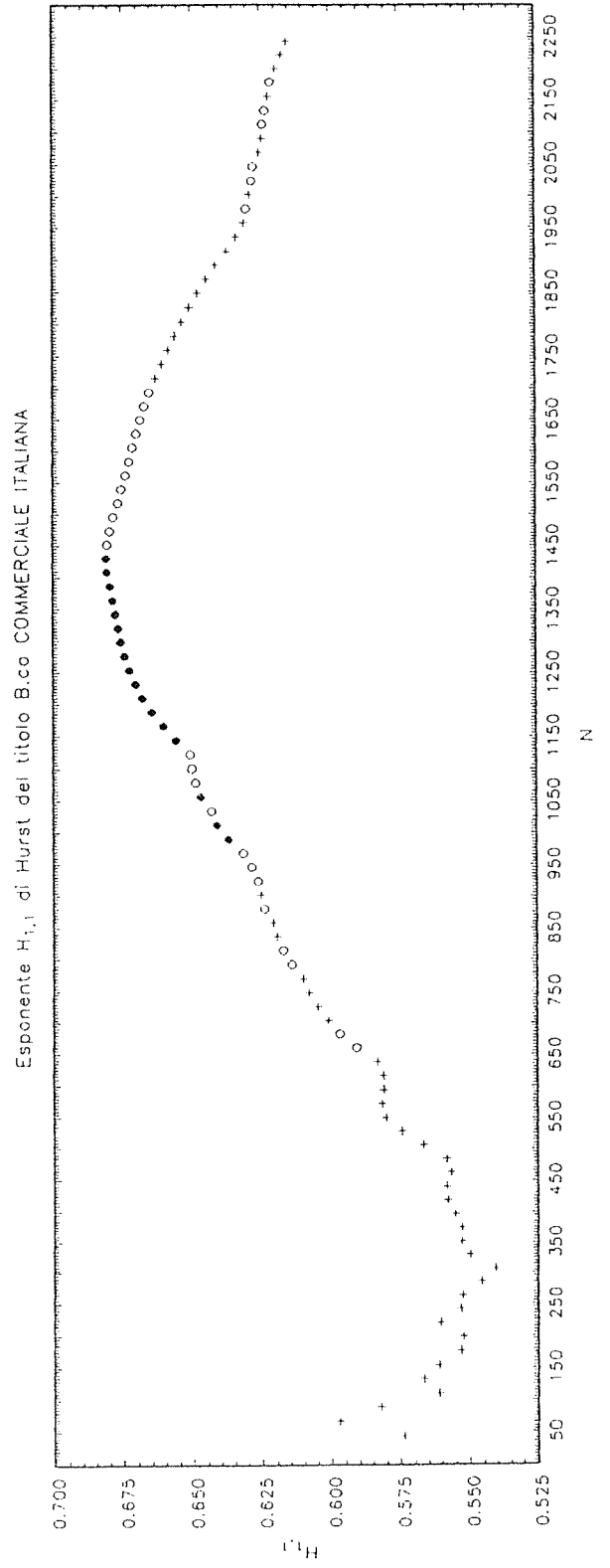
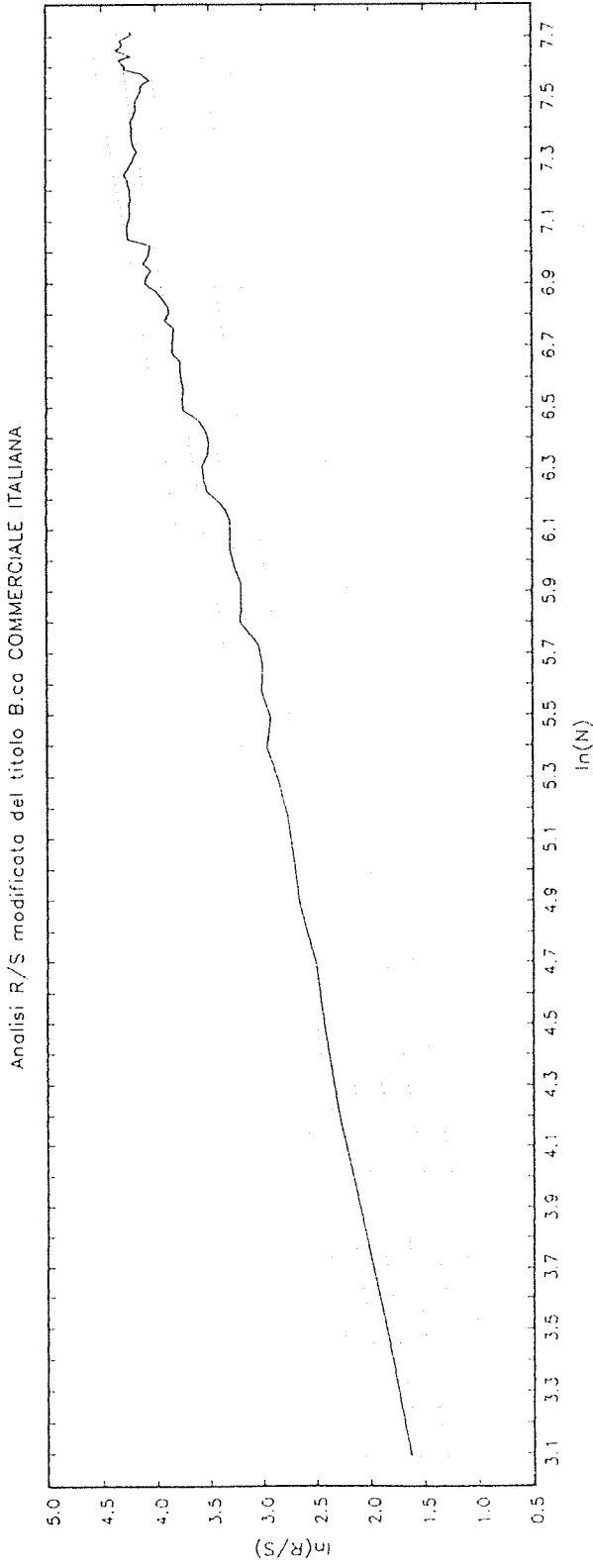


Figura 52

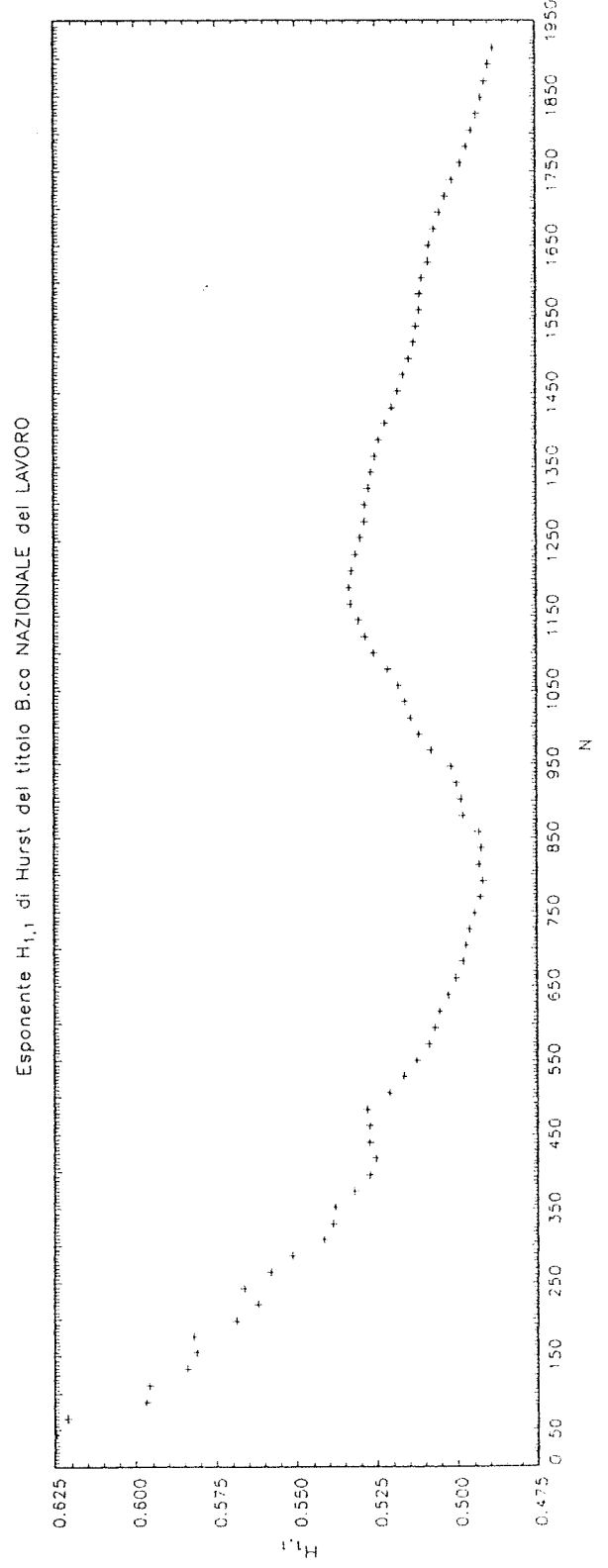
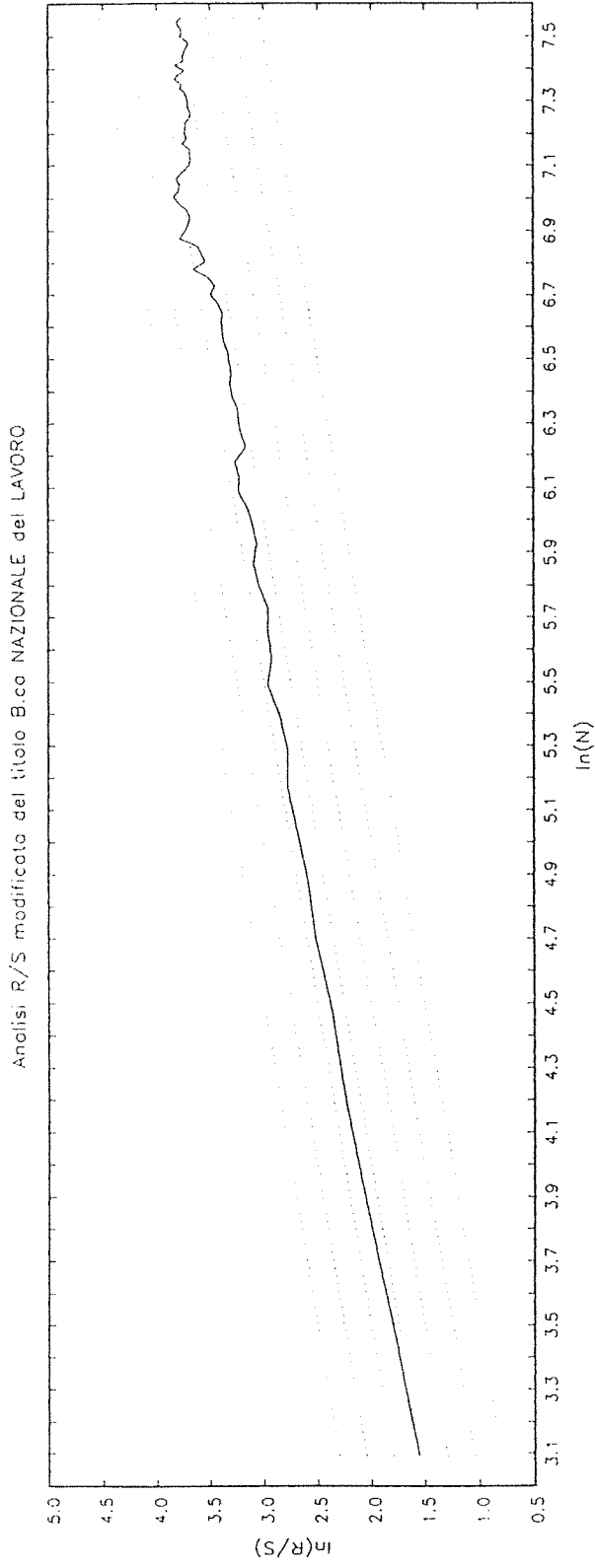


Figura 53

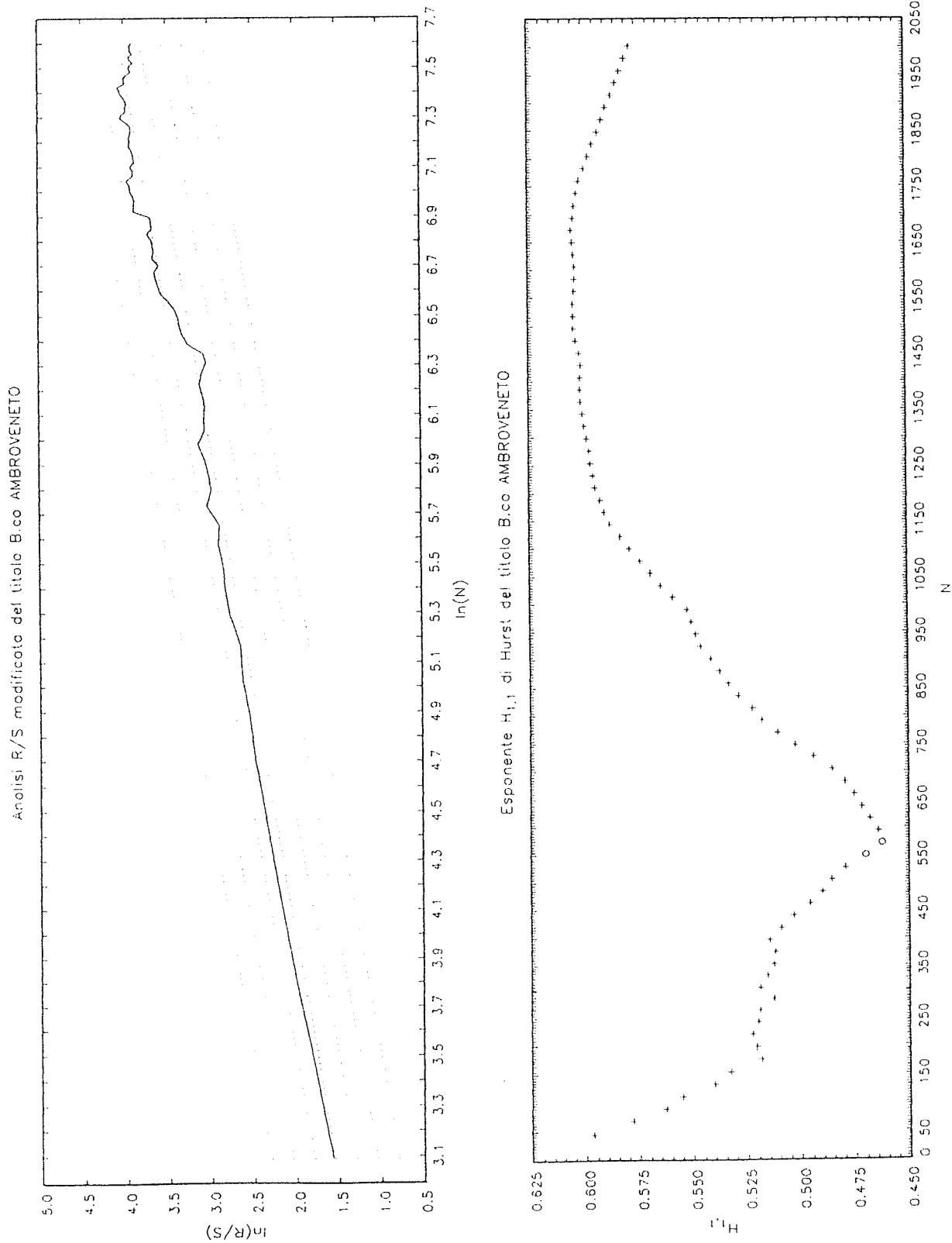


Figura 54

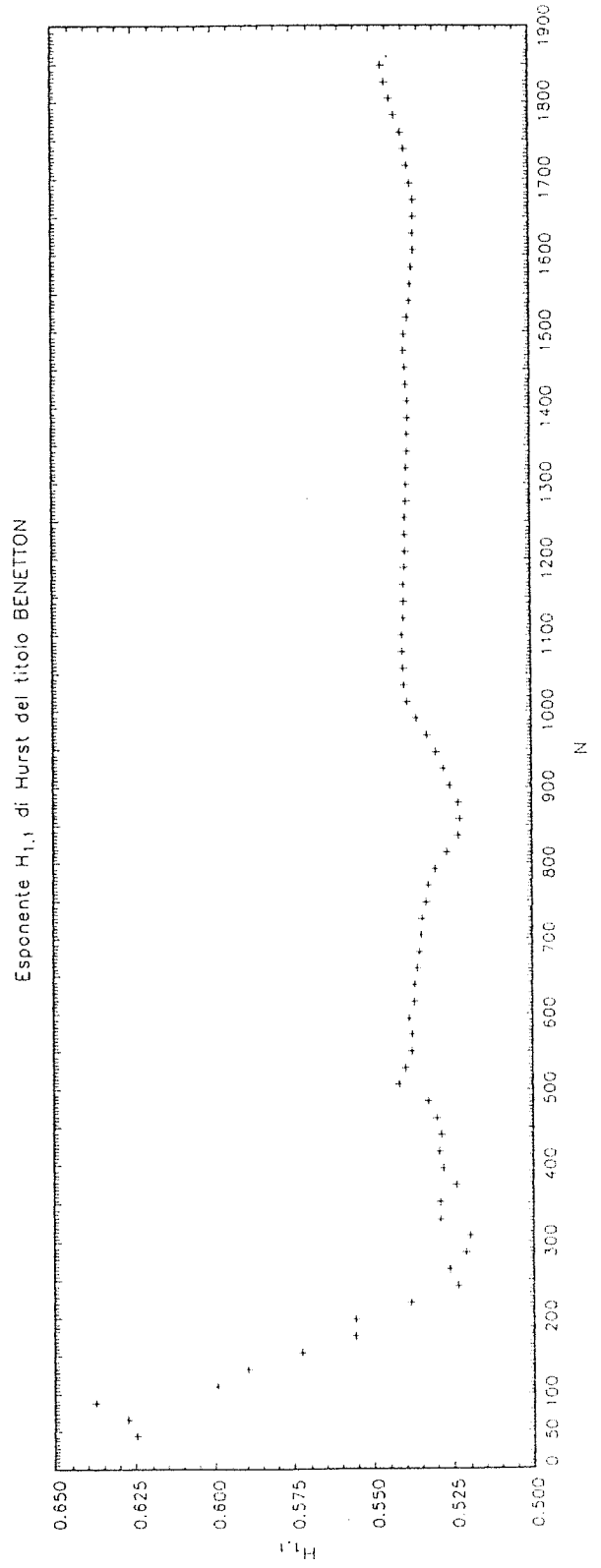
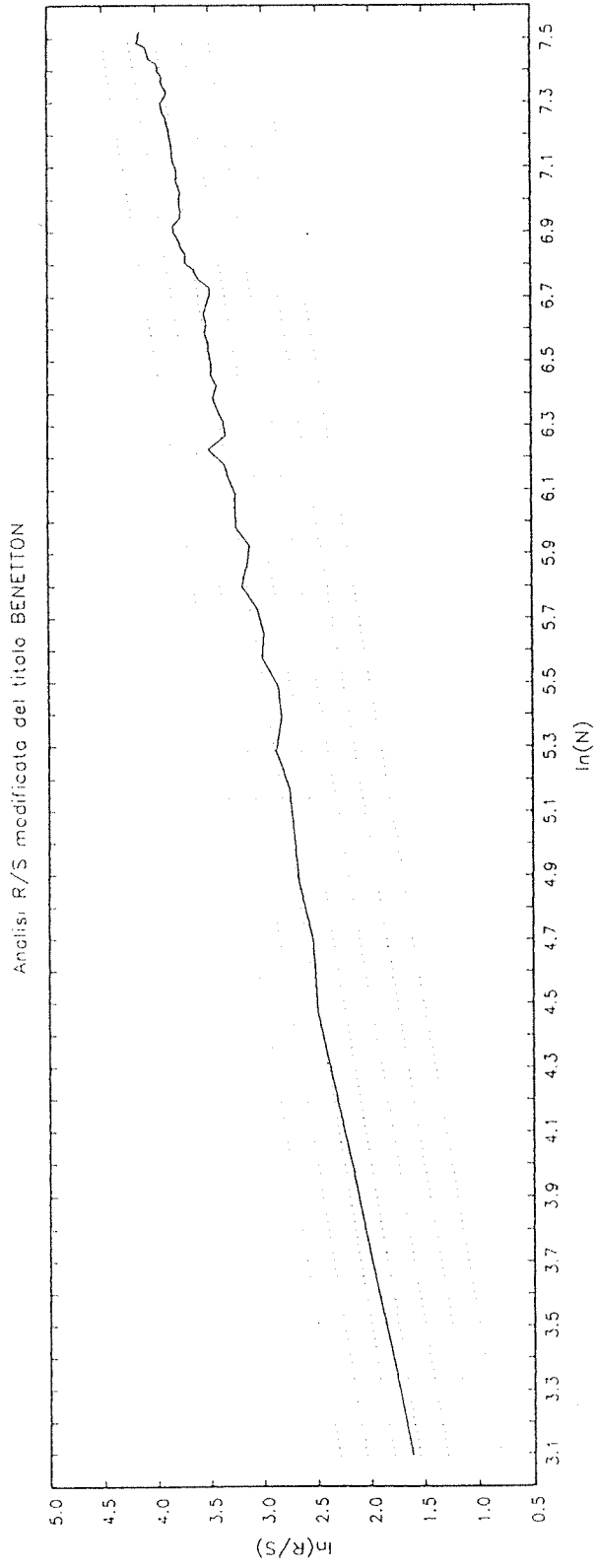


Figura 55

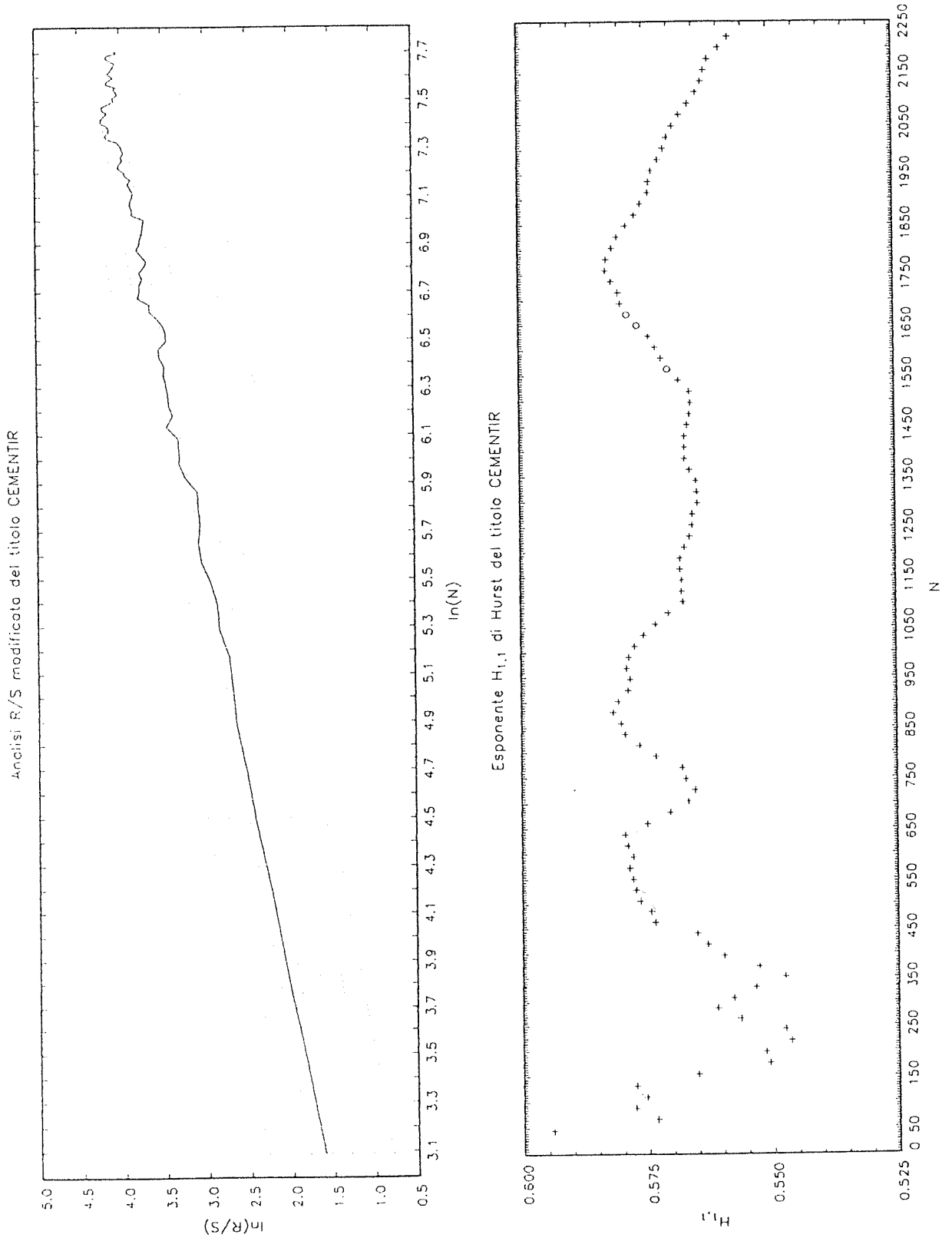


Figura 56

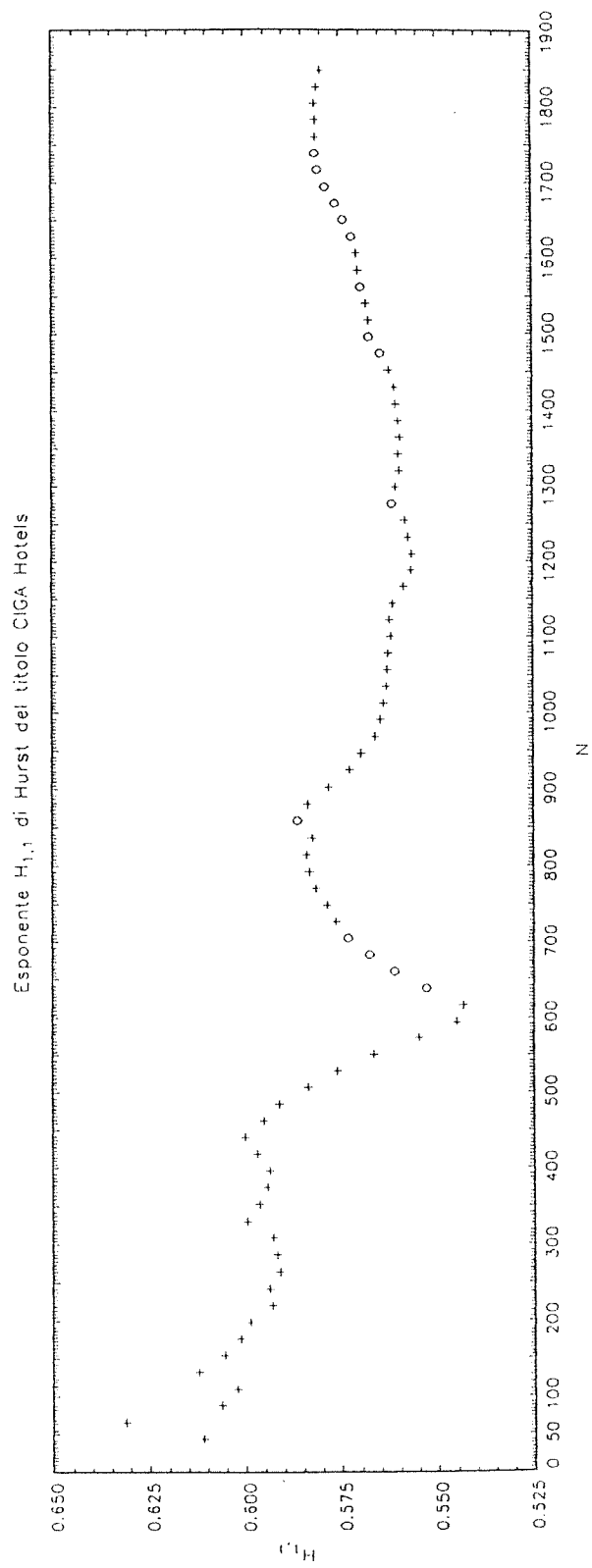
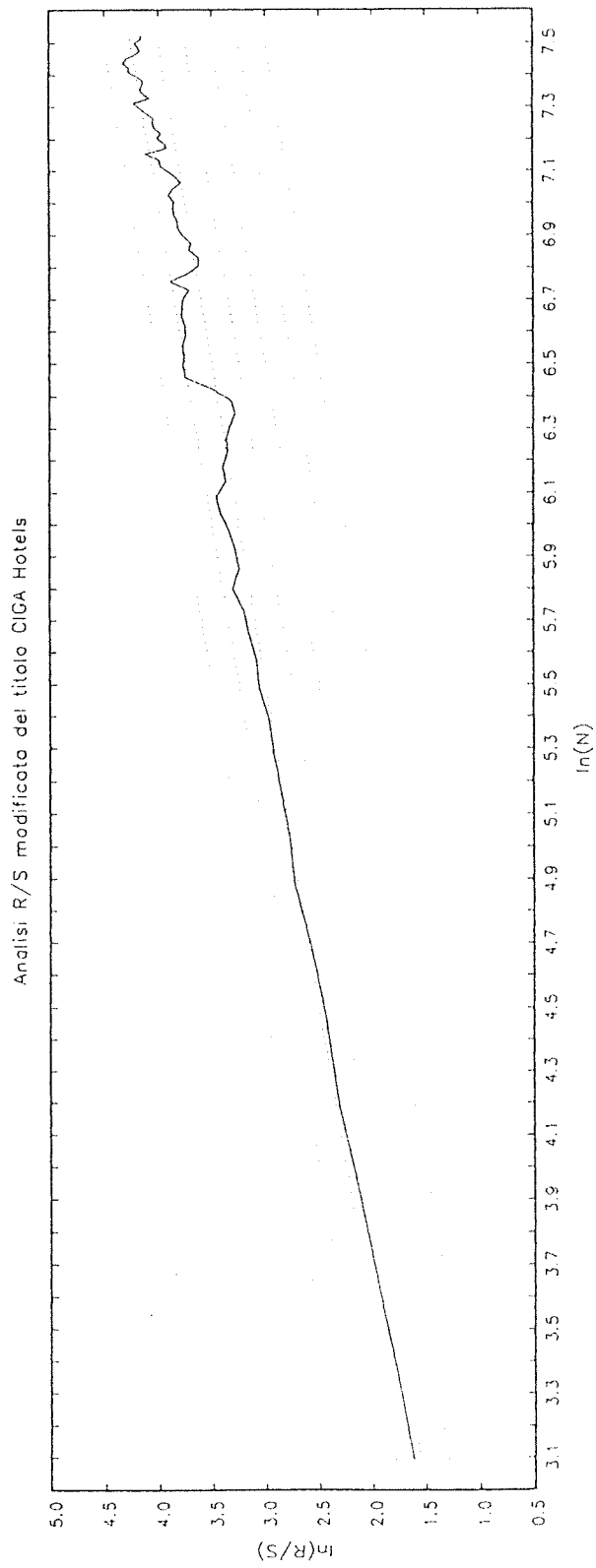




Figura 57

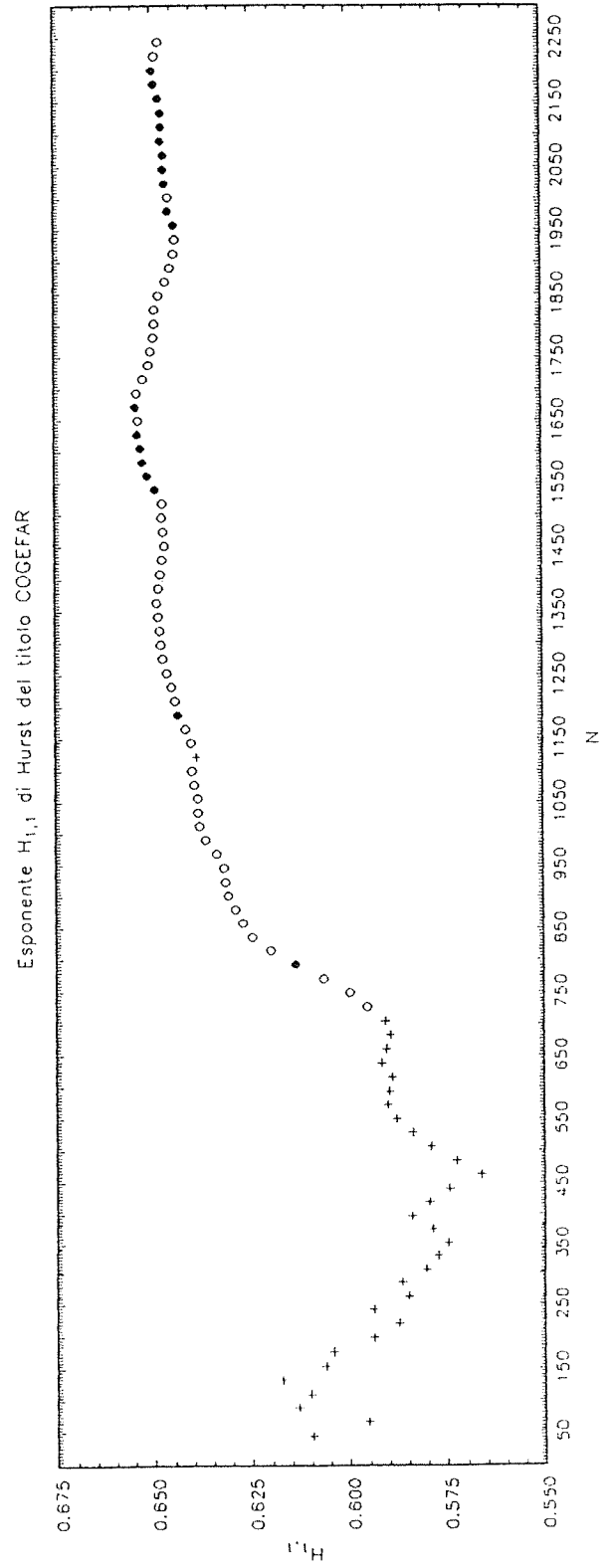
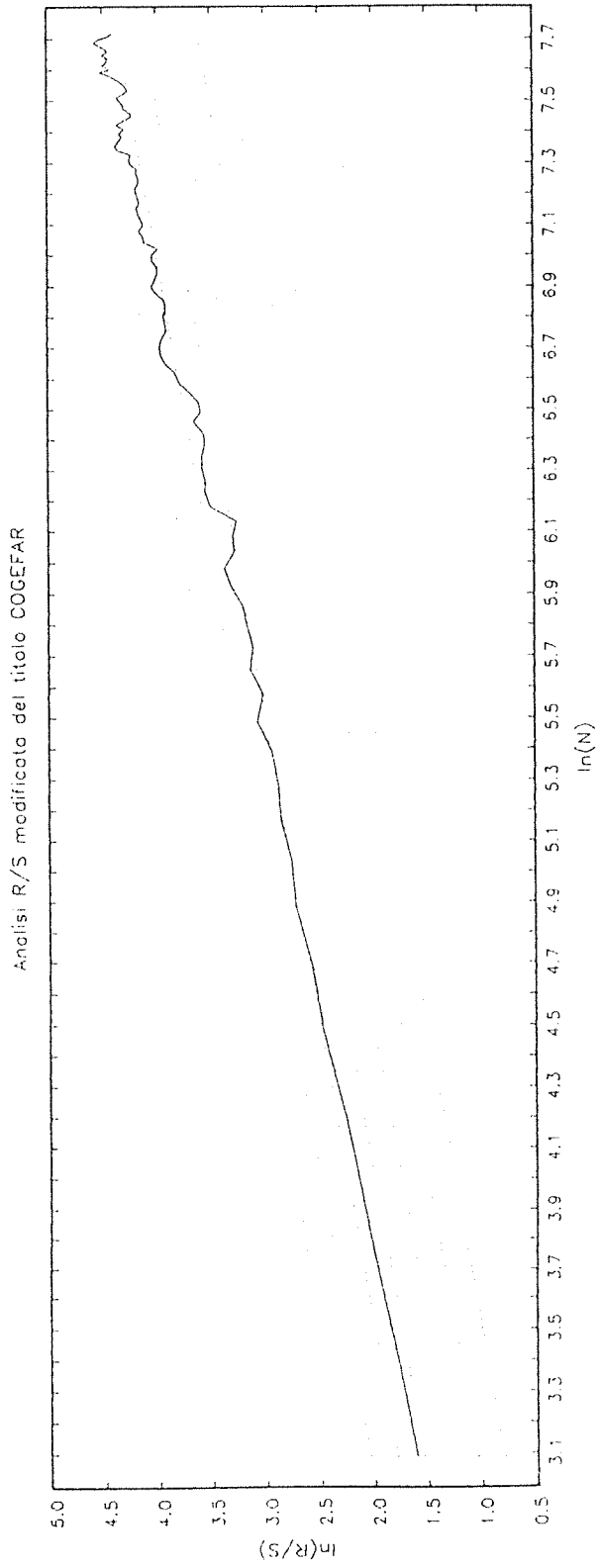


Figura 58

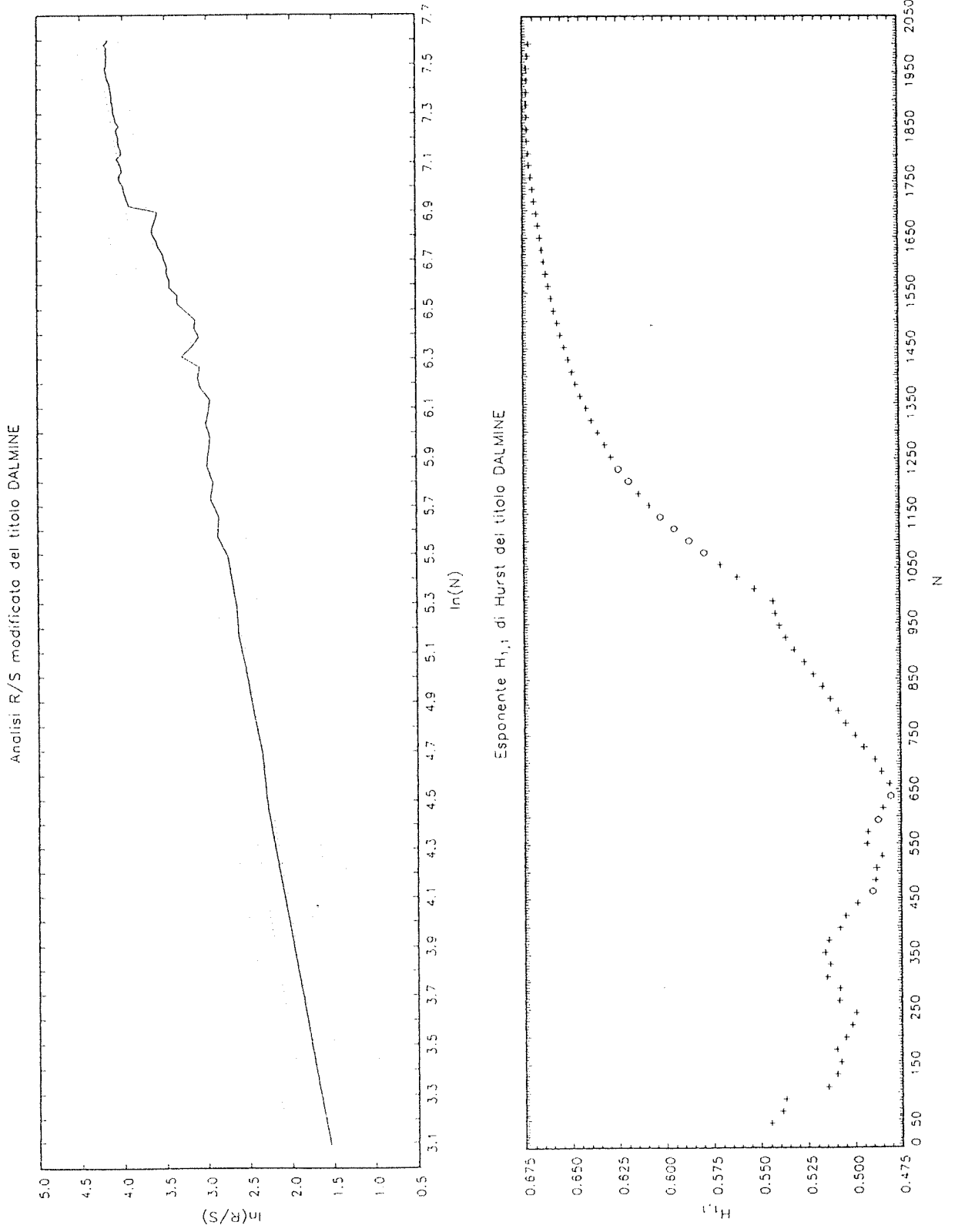


Figura 59

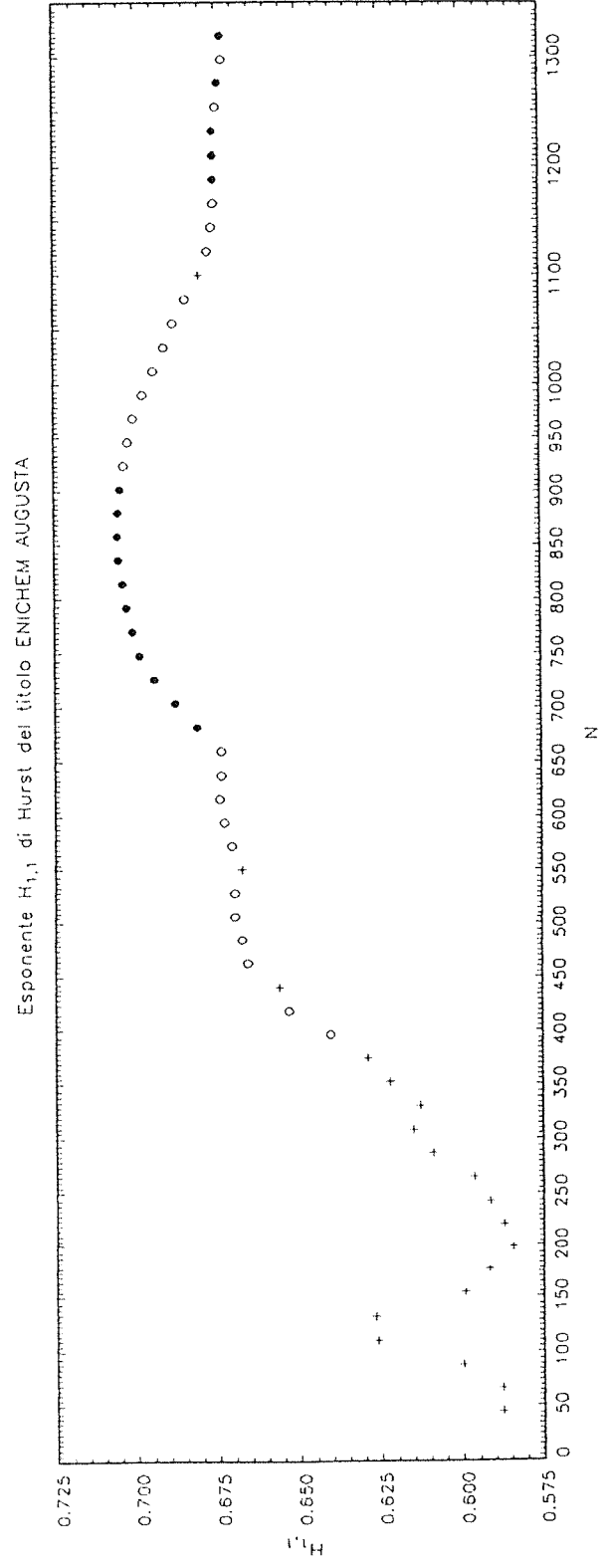
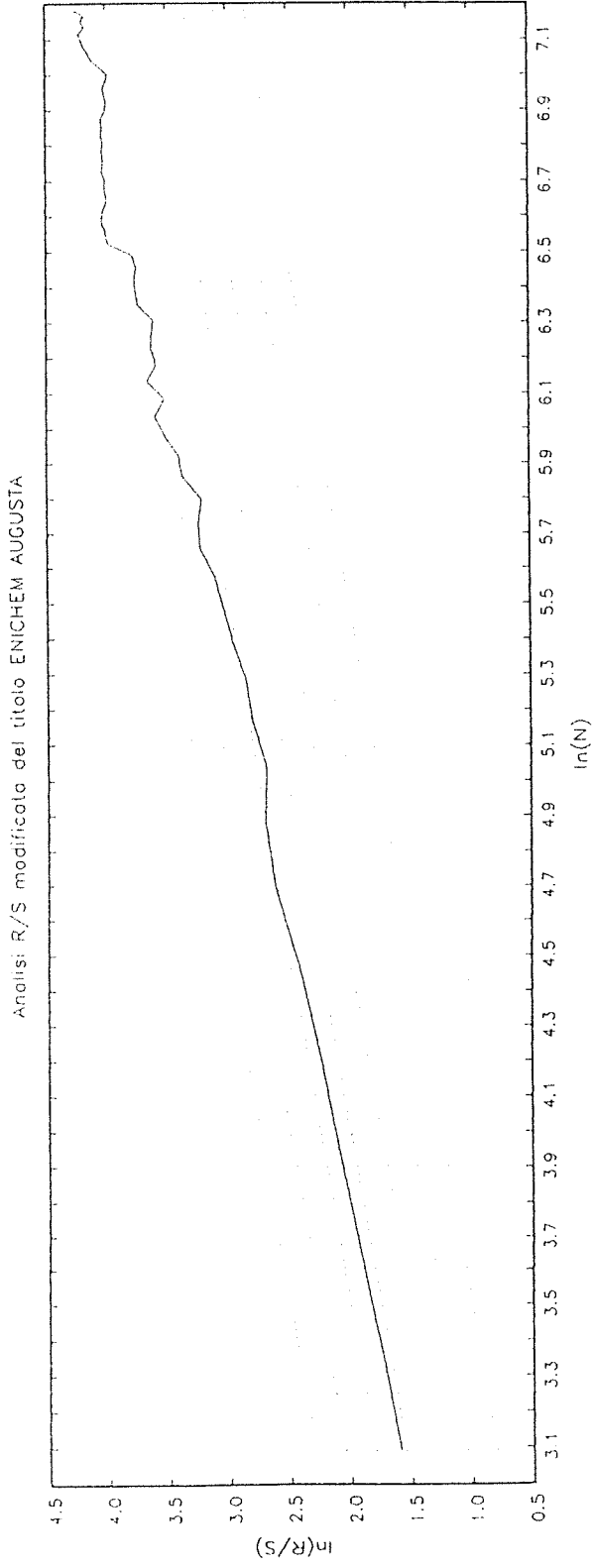


Figura 60

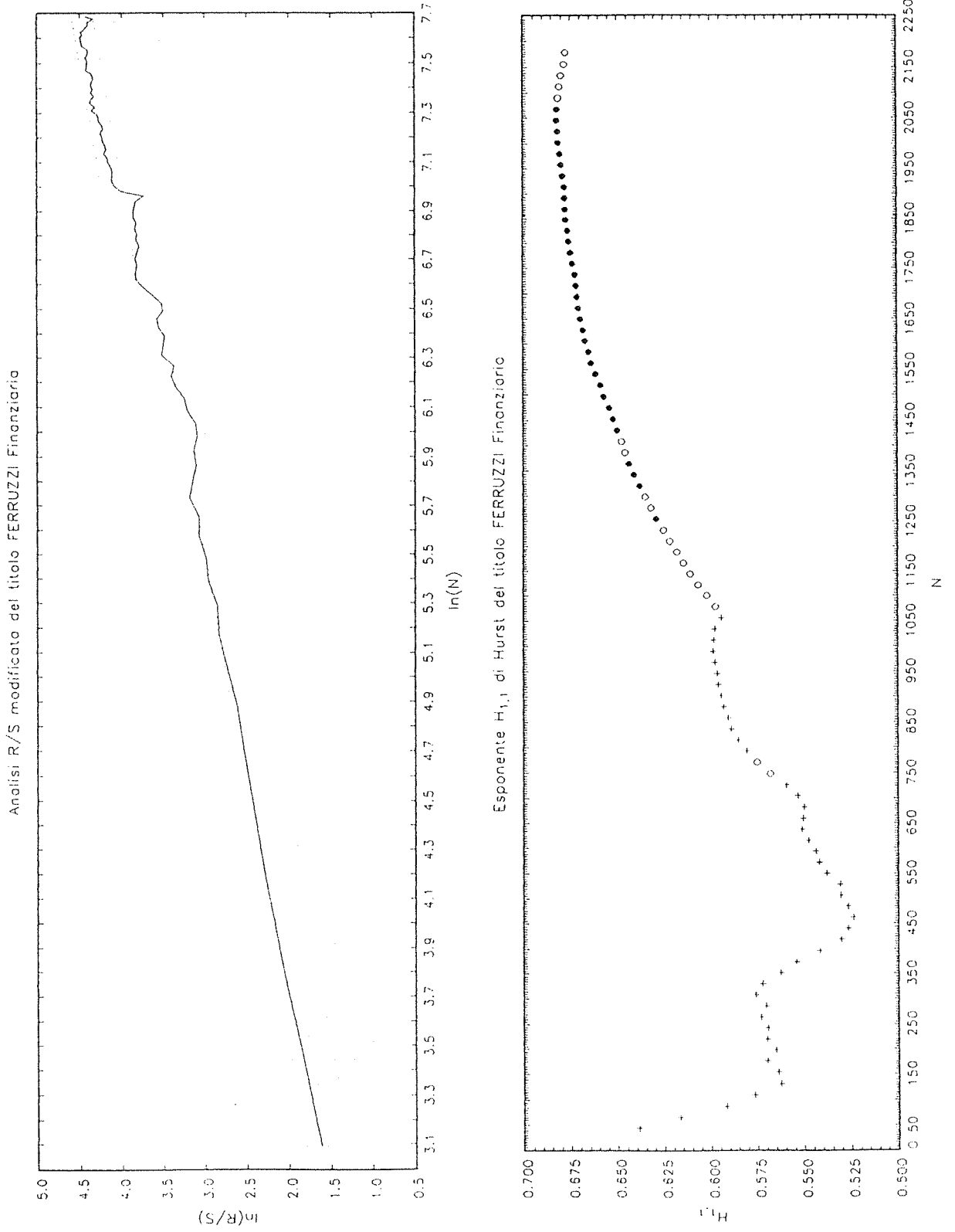


Figura 61

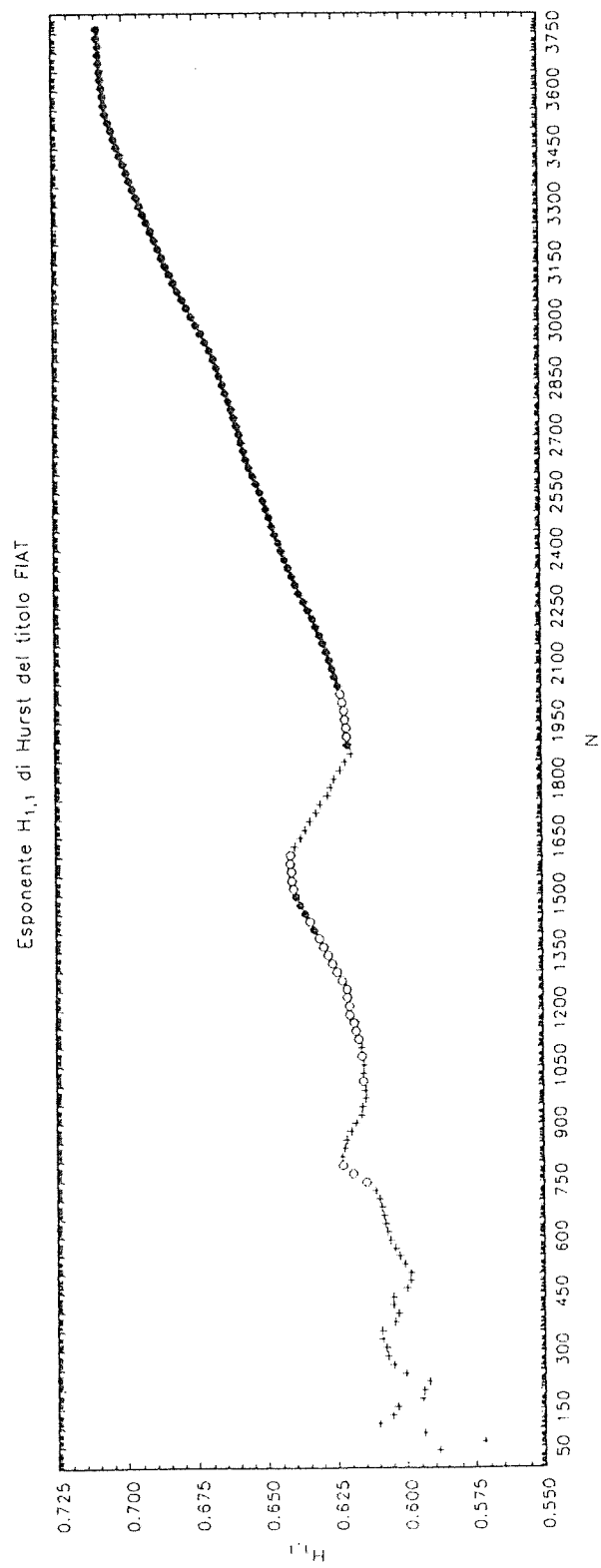
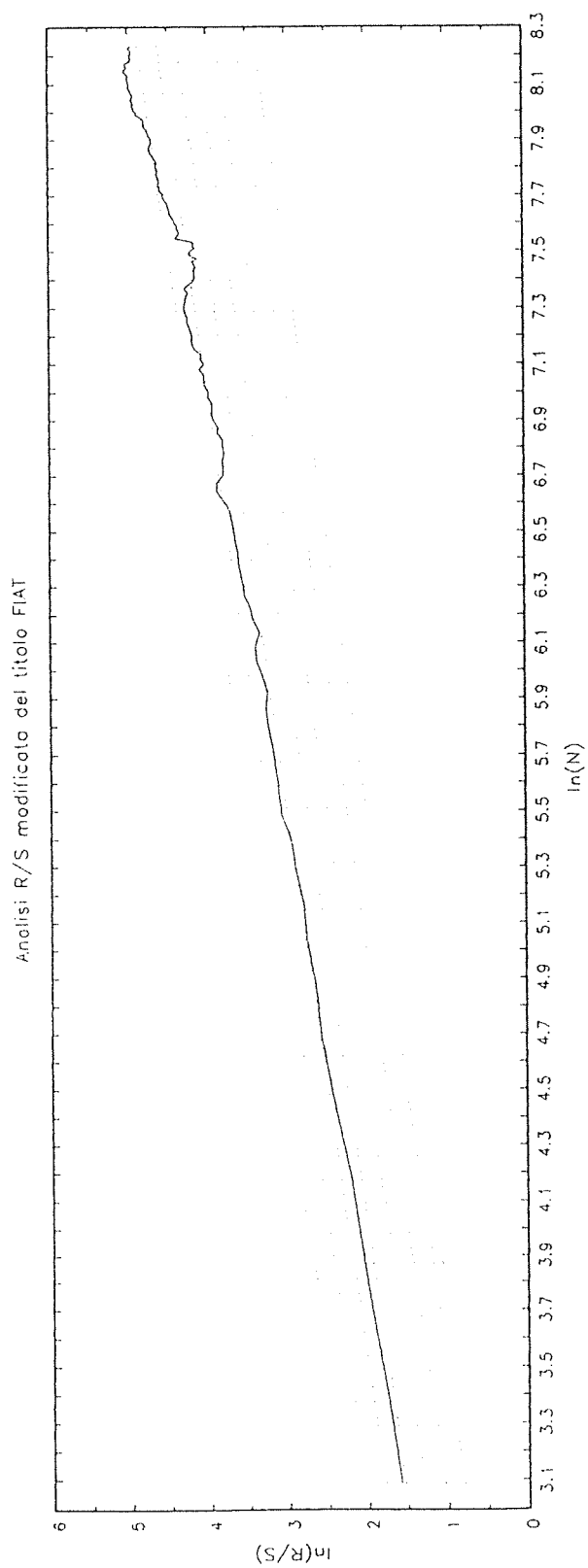


Figura 62

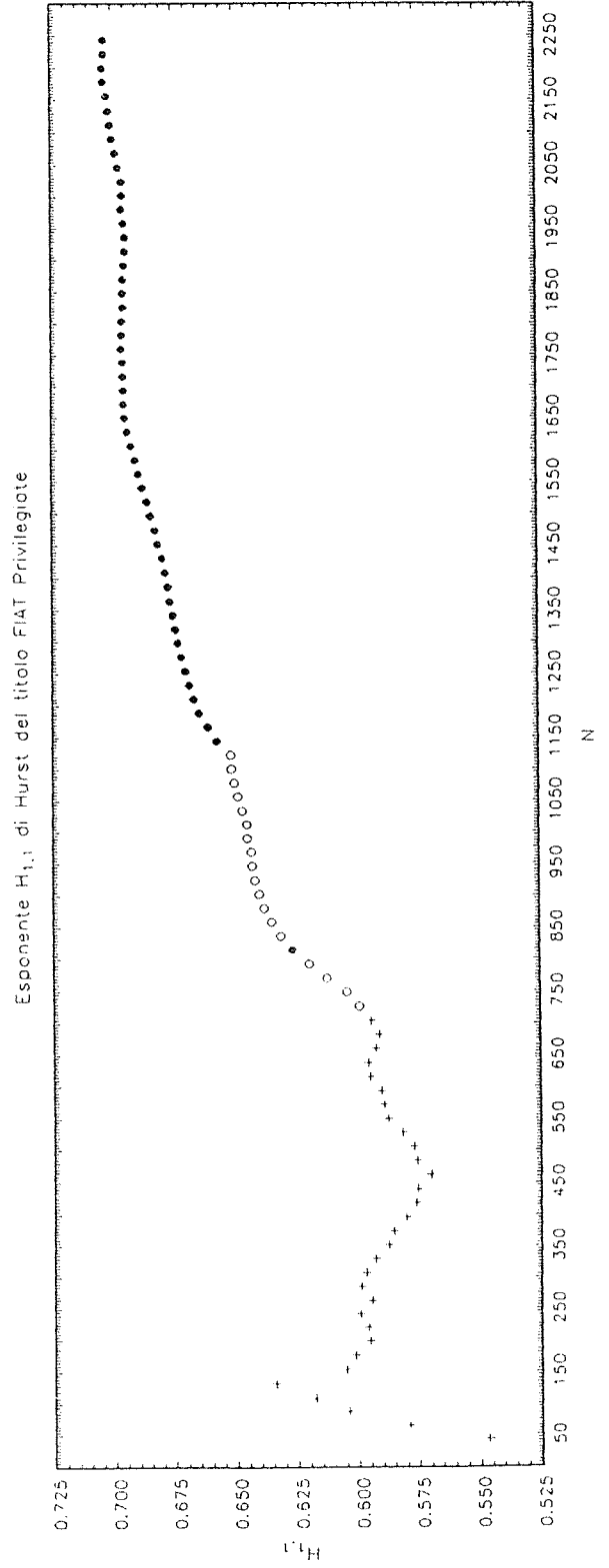
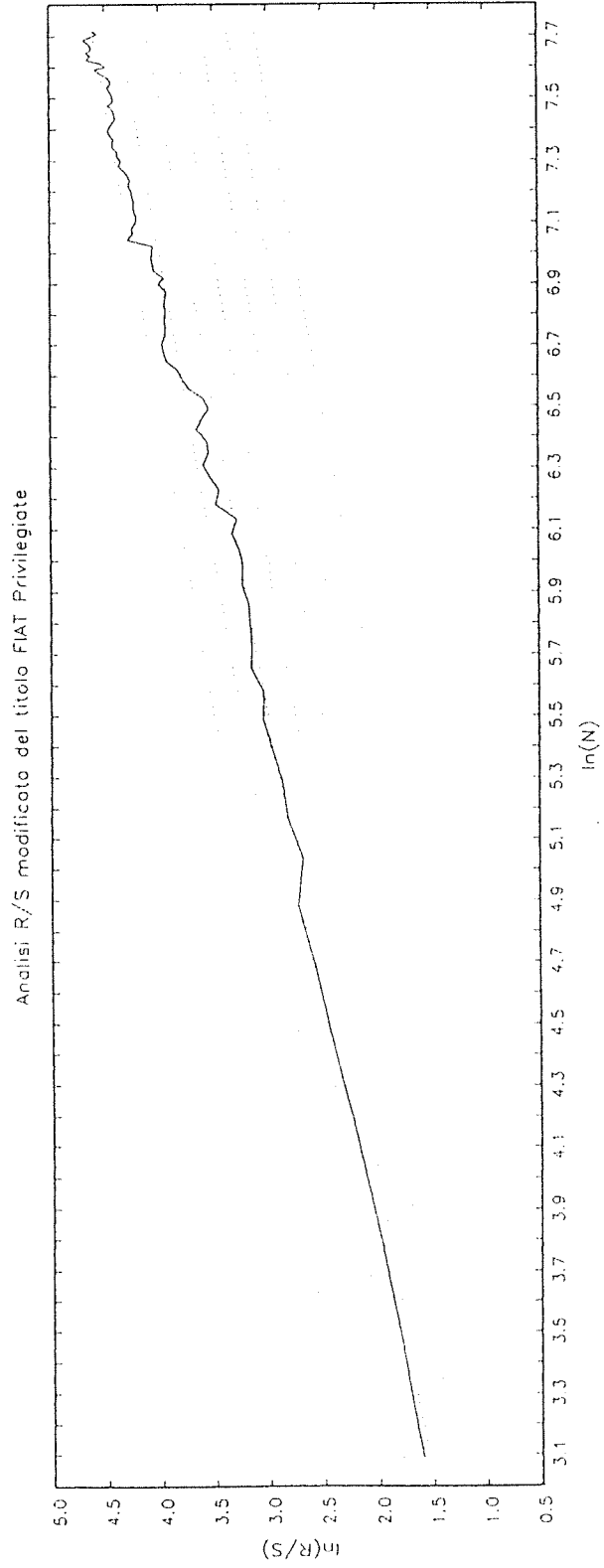


Figura 63

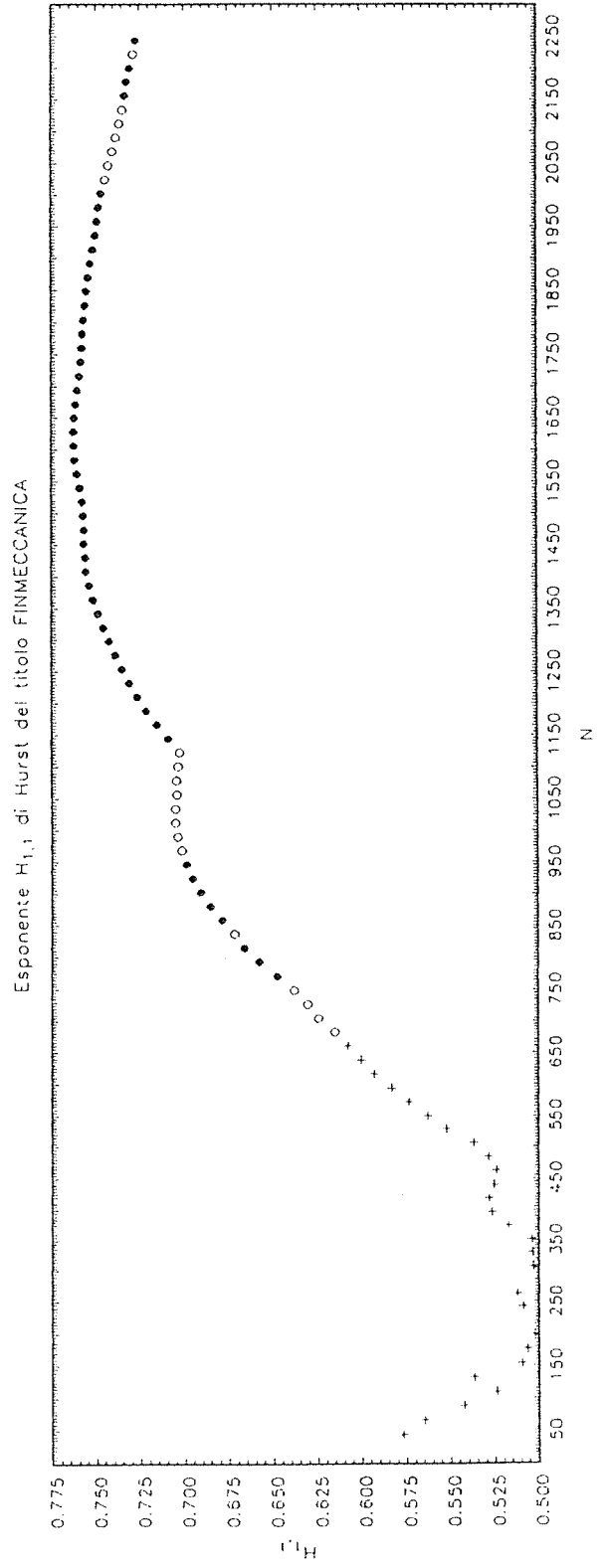
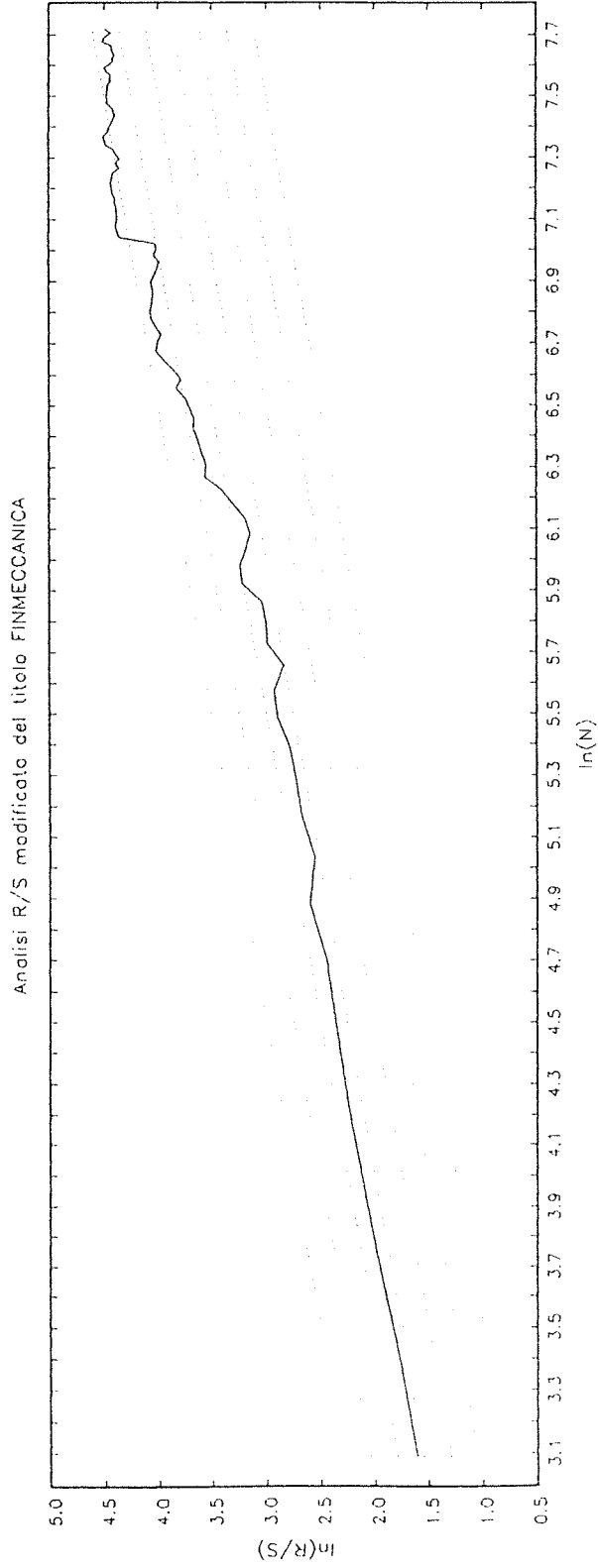


Figura 64

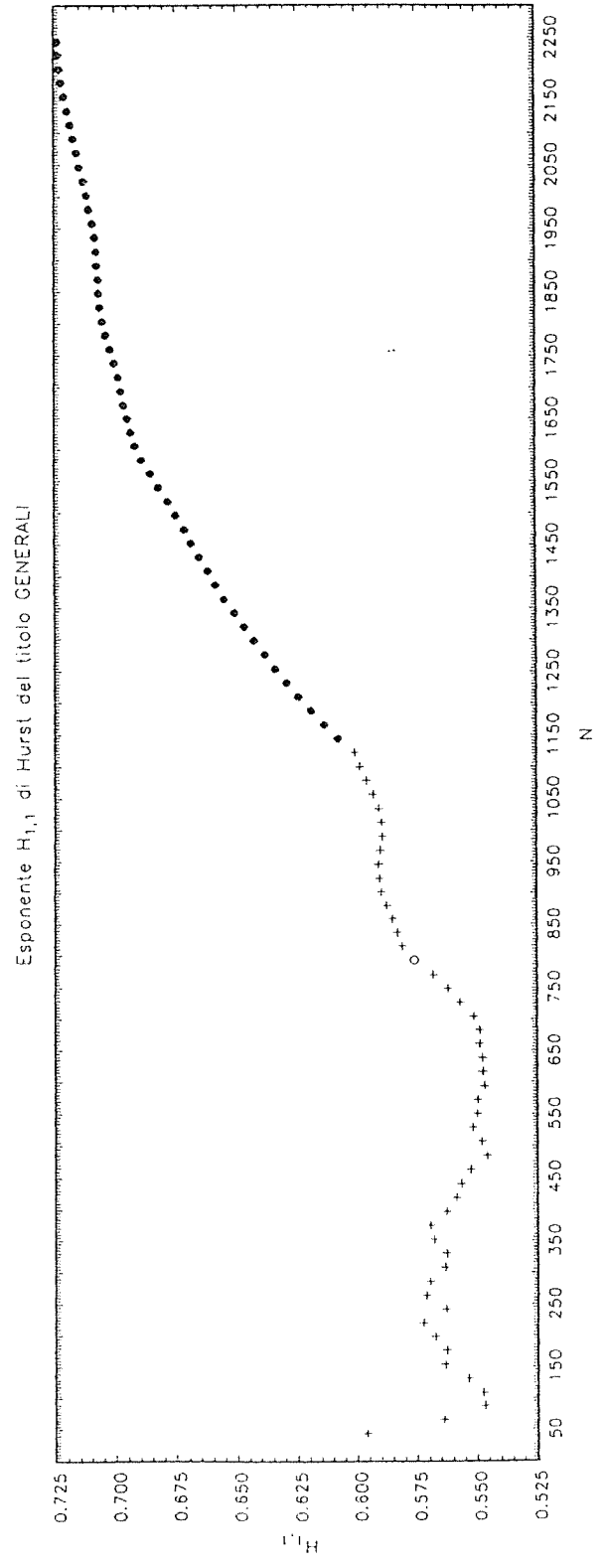
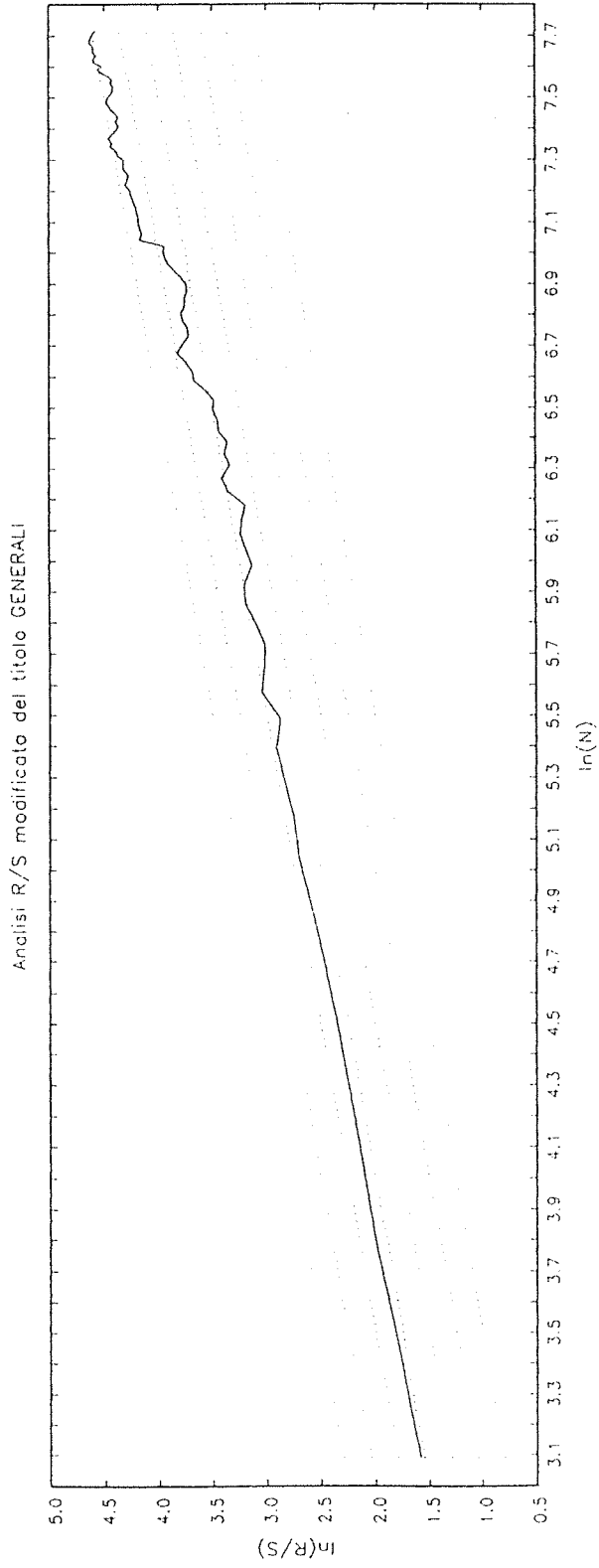




Figura 65

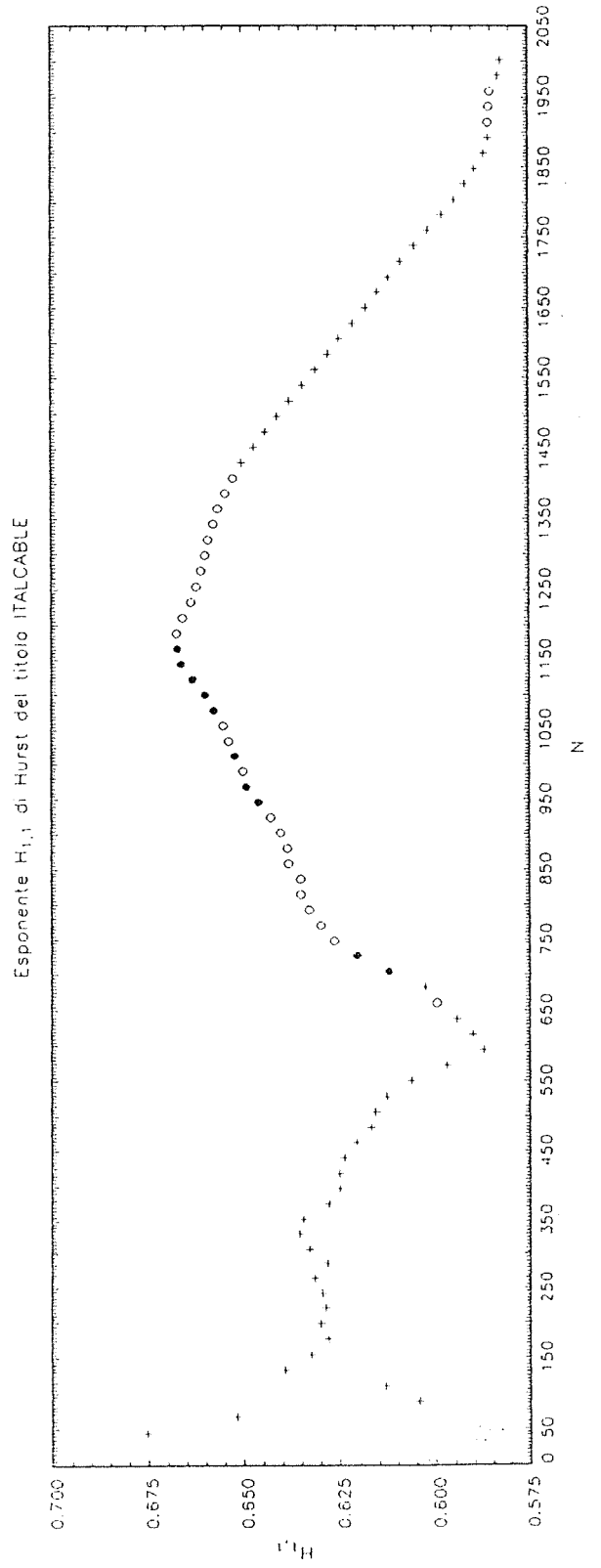
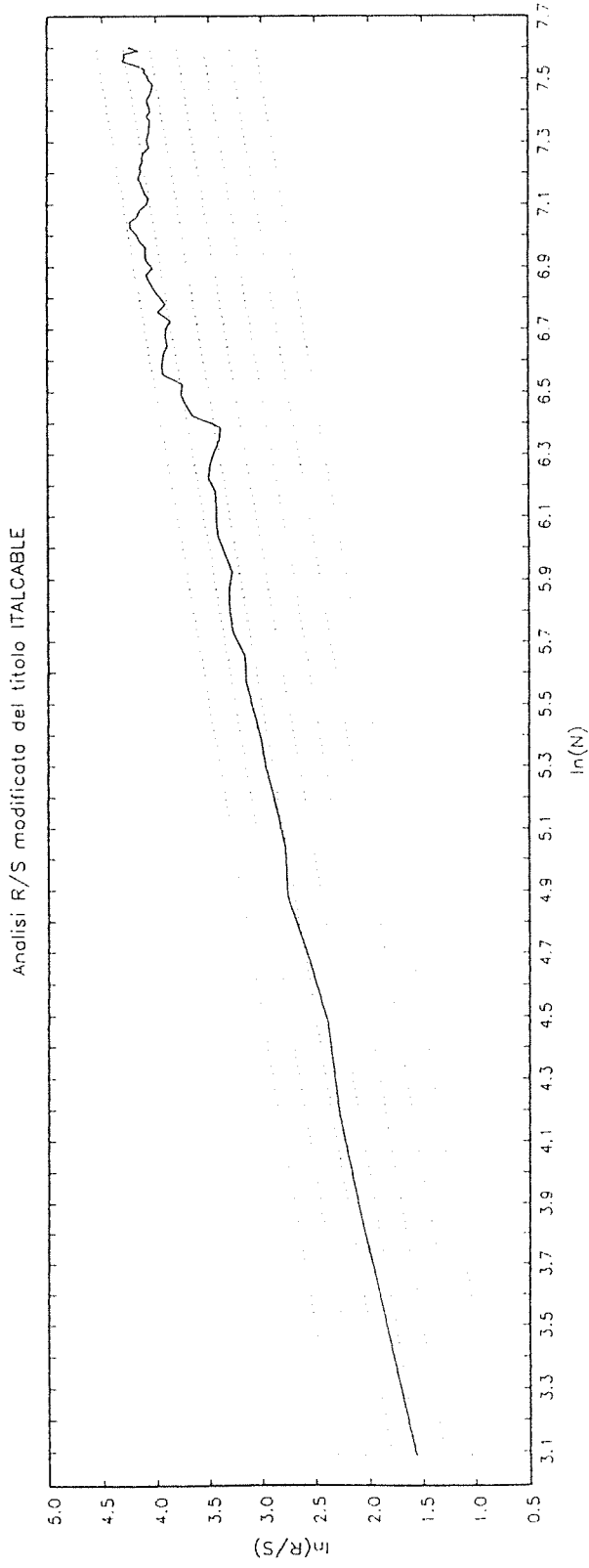


Figura 66

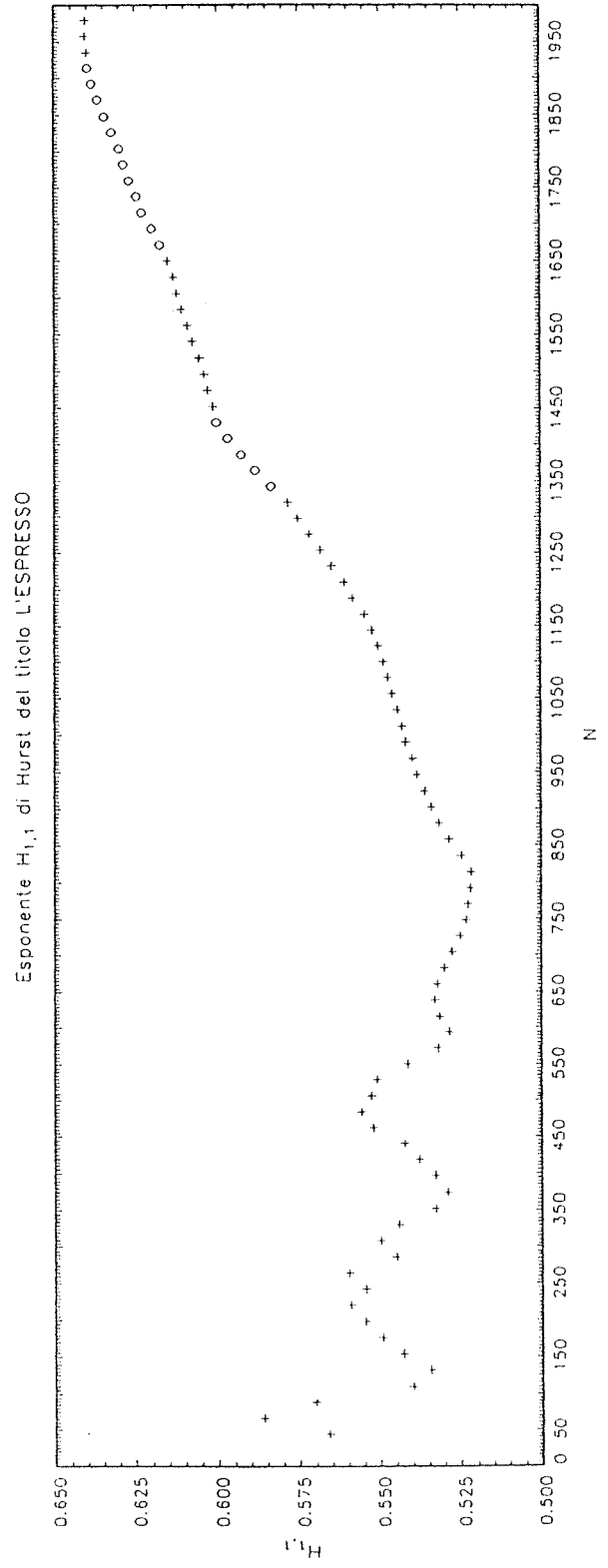
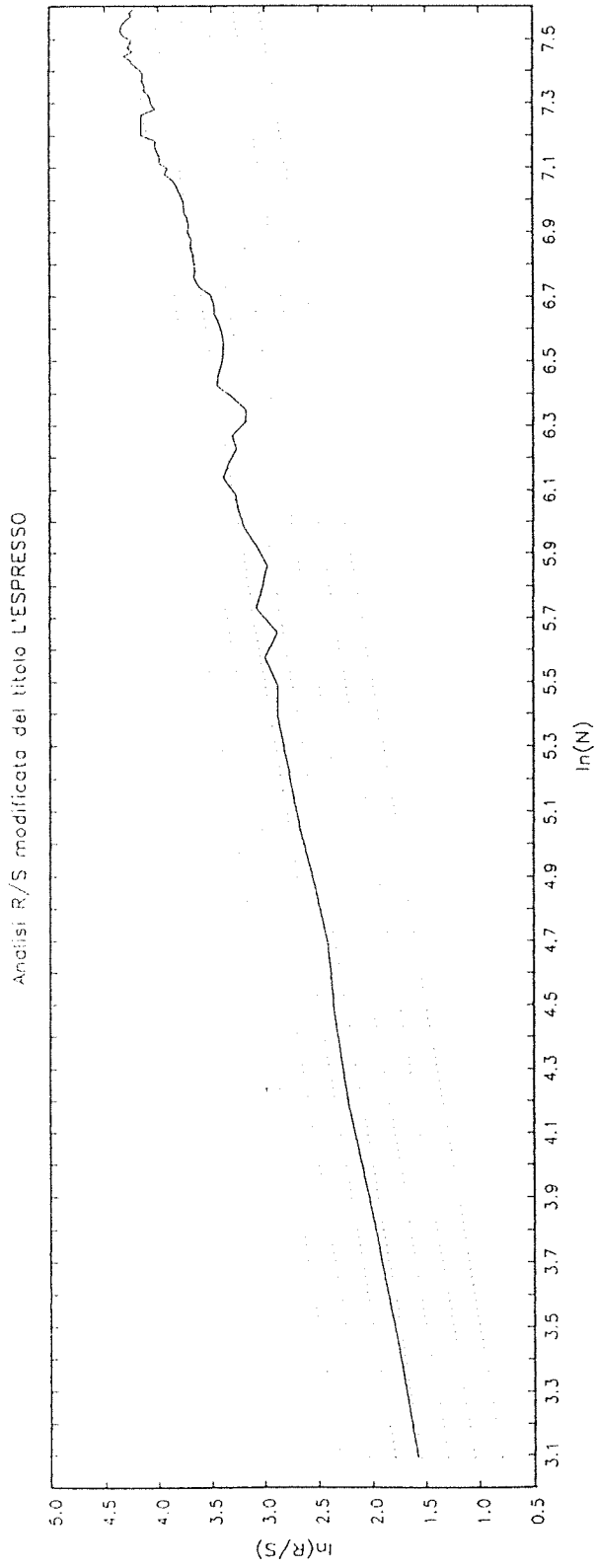


Figura 67

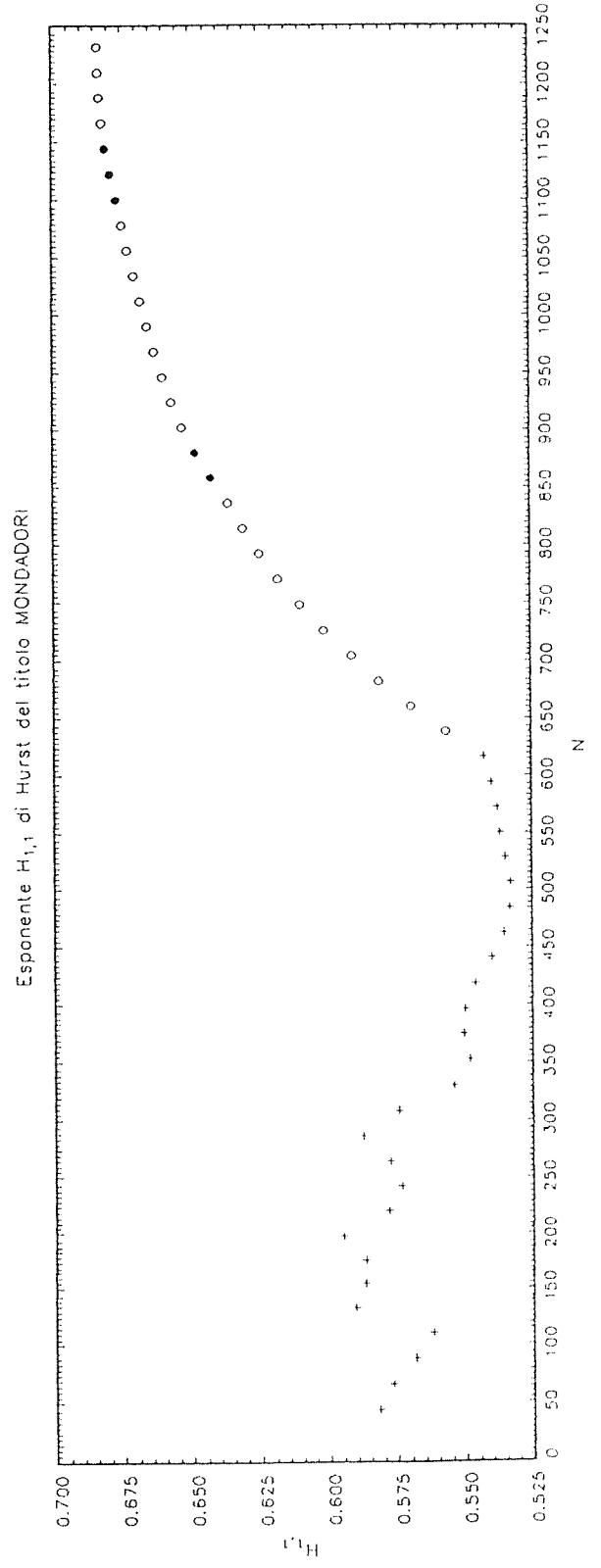
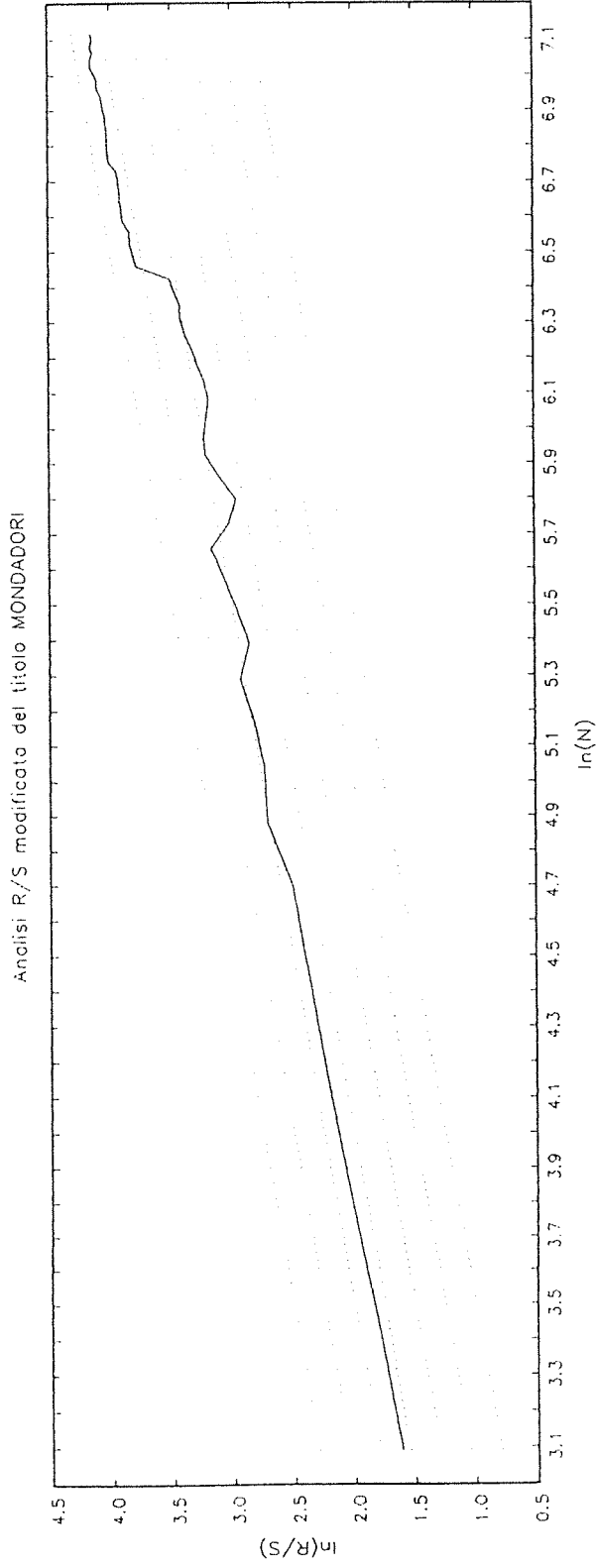


Figura 68

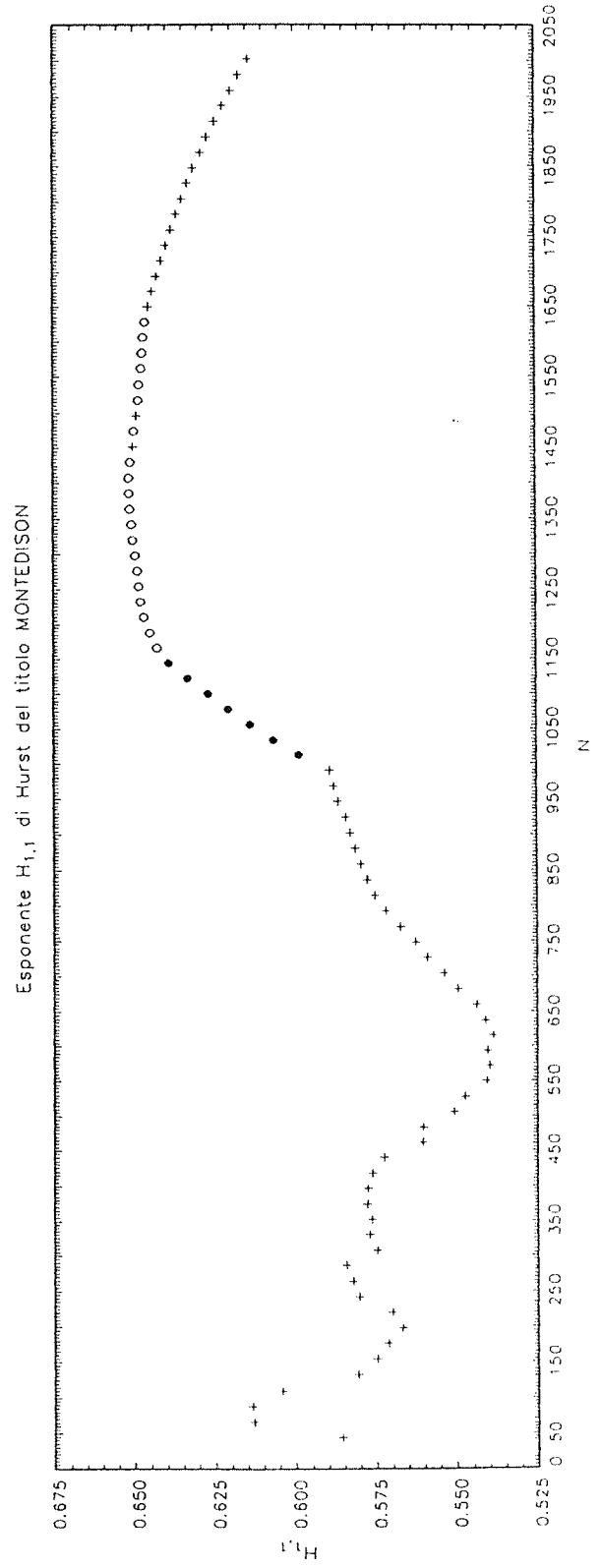
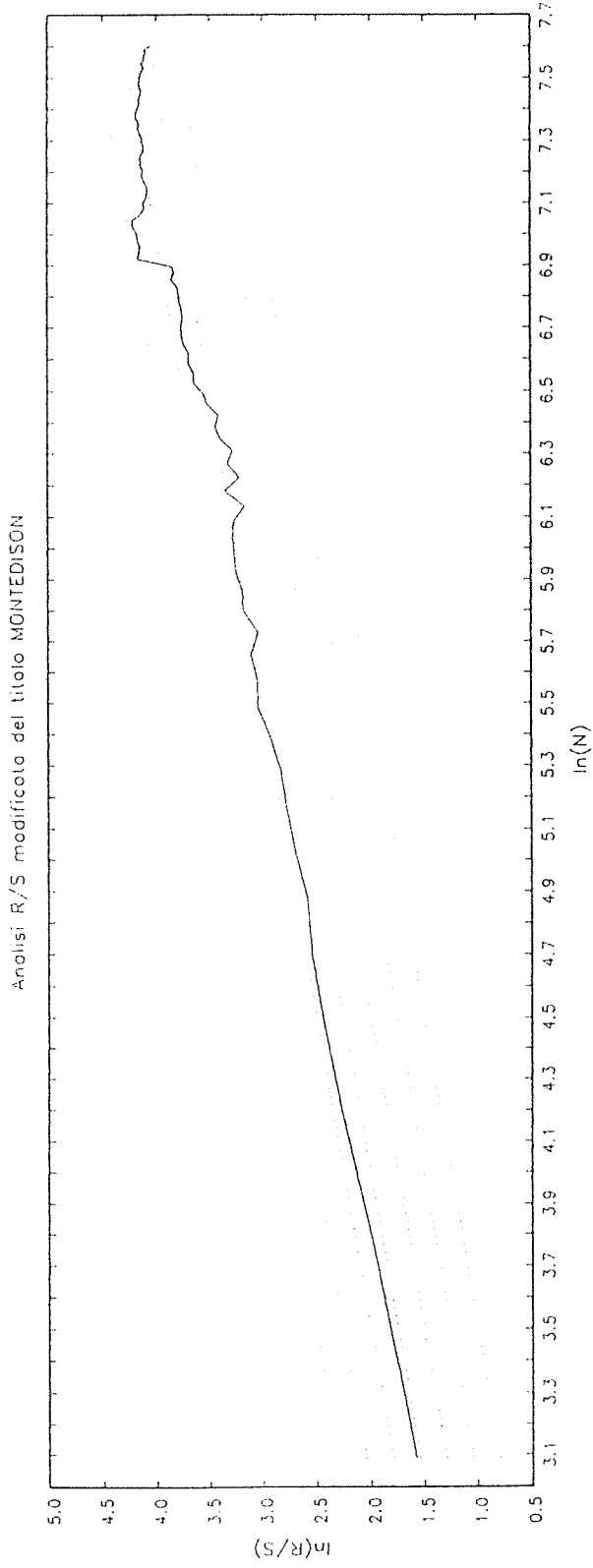


Figura 69

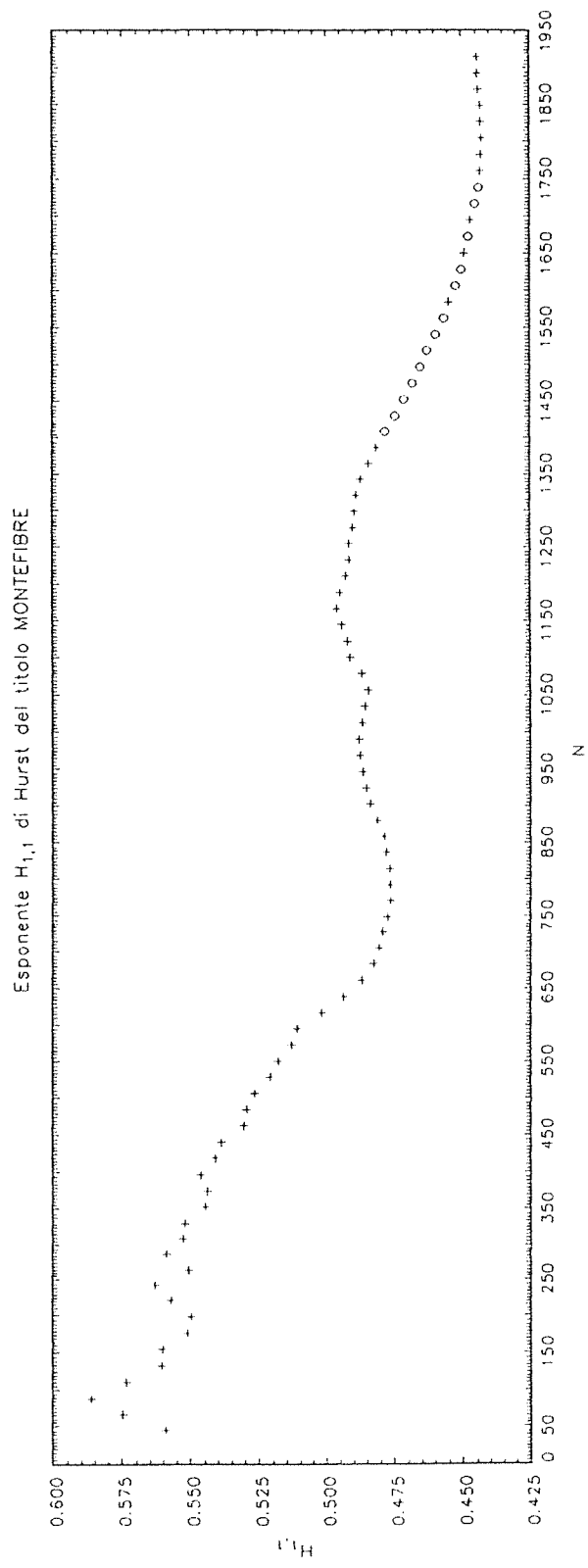
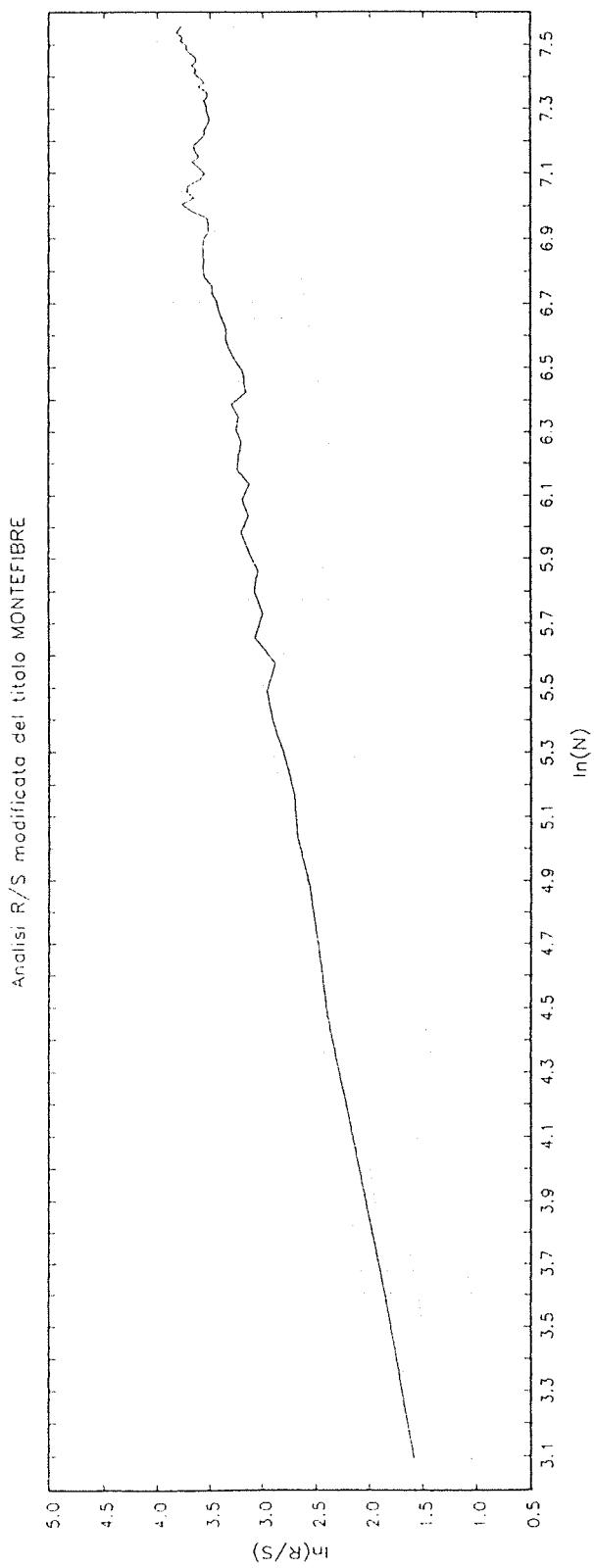


Figura 70

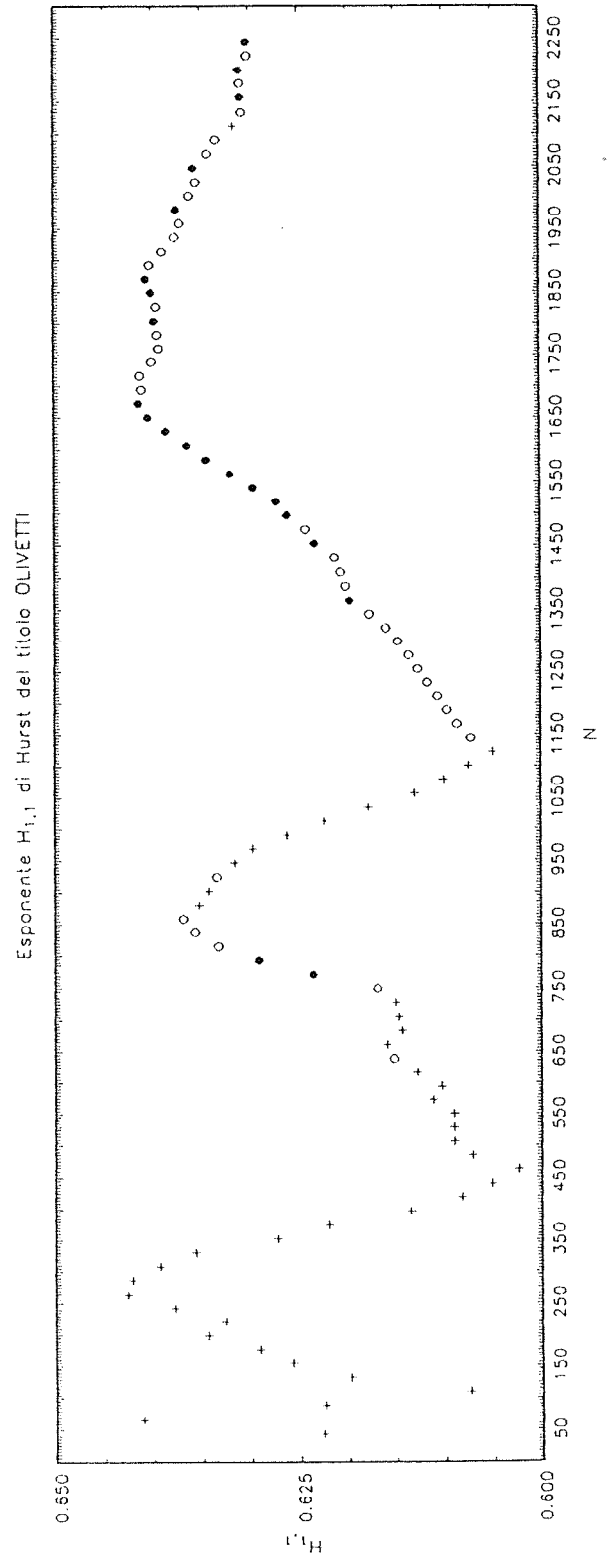
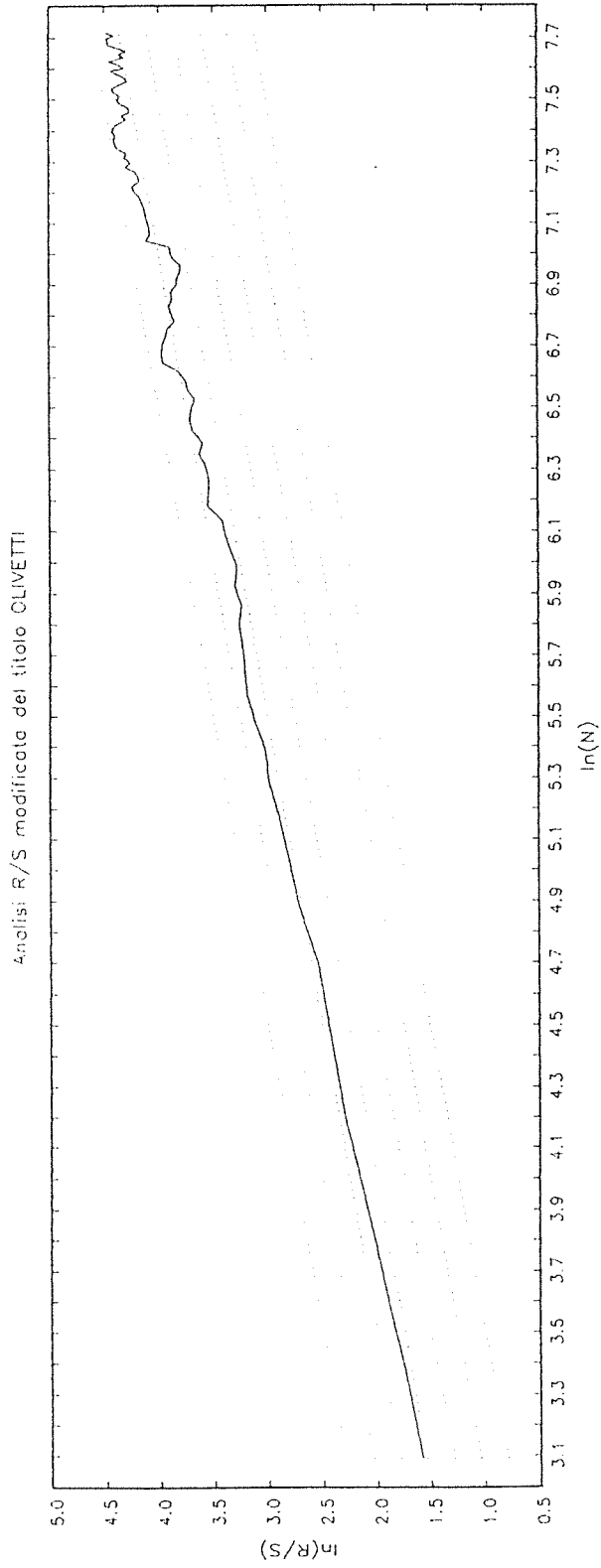


Figura 71

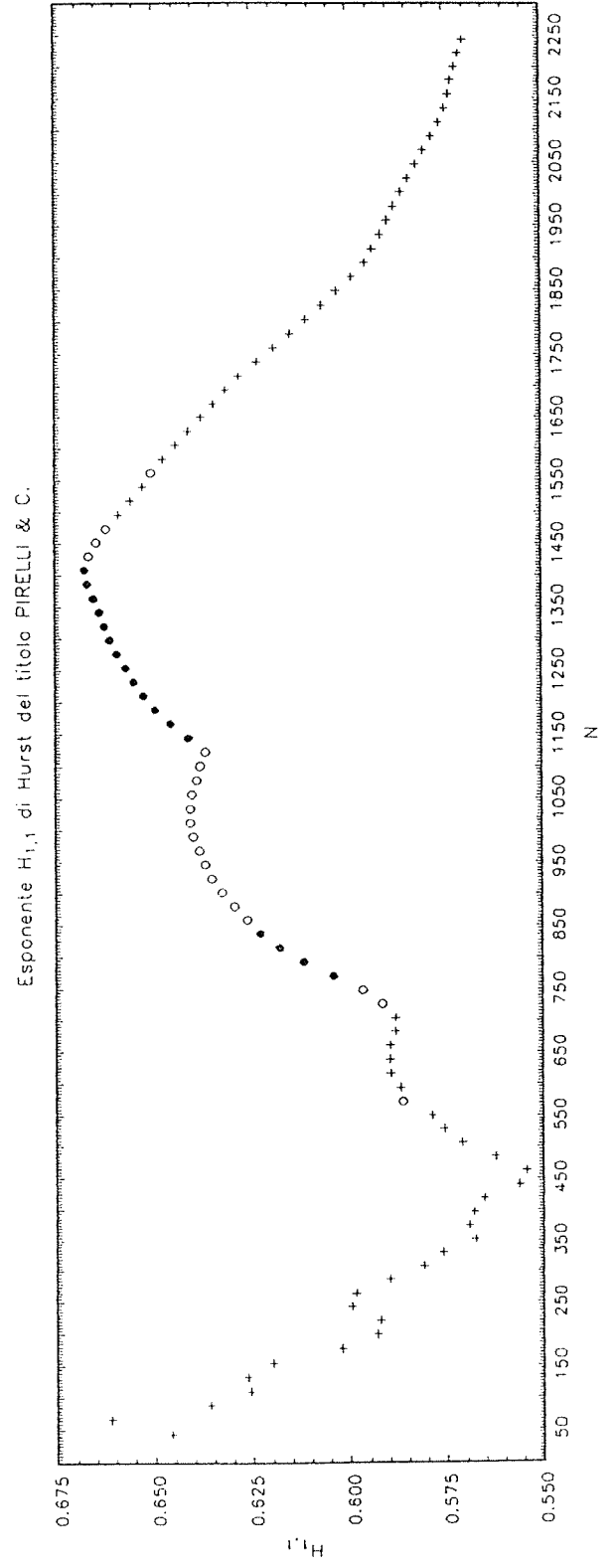
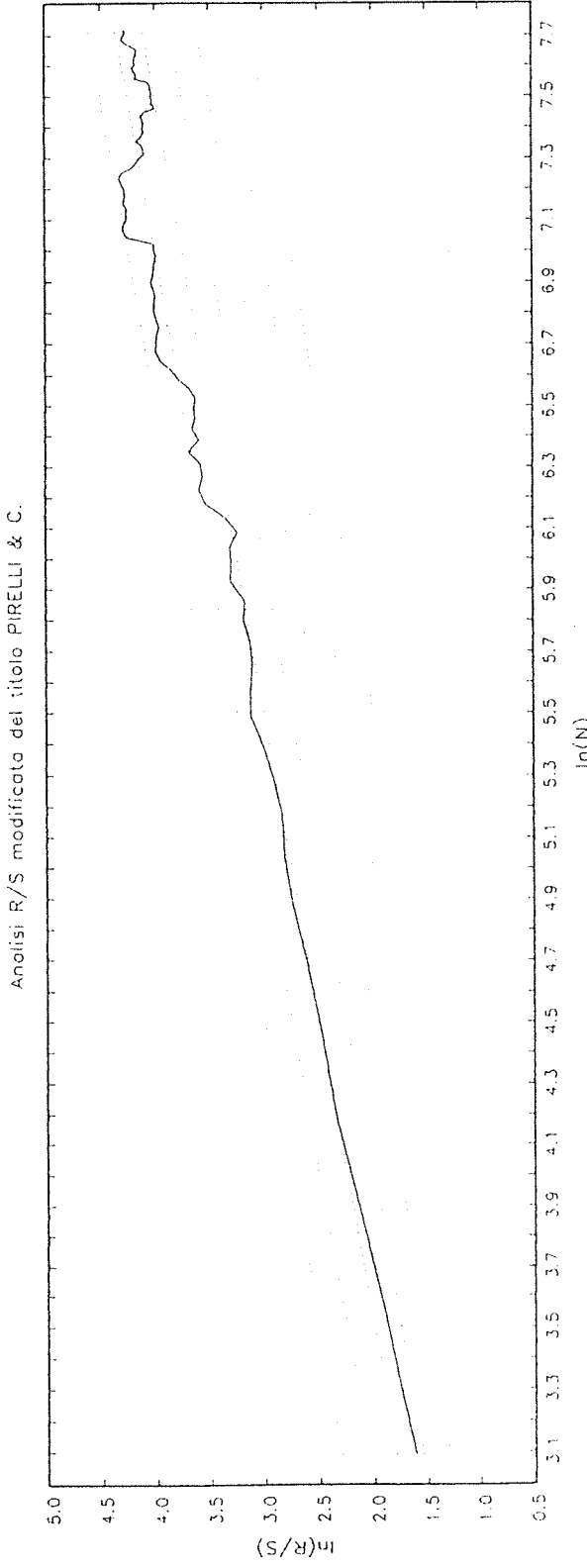


Figura 72

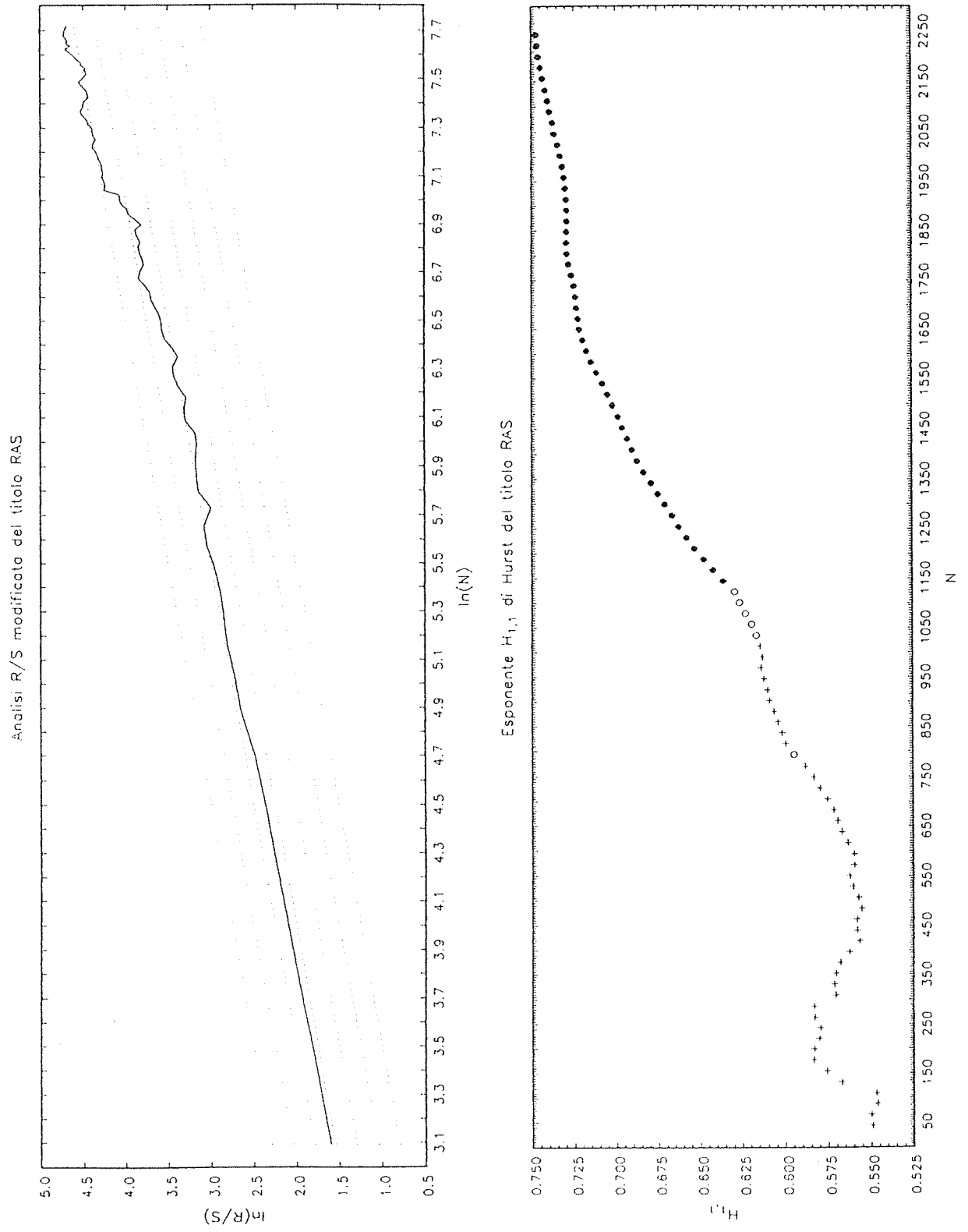




Figura 73

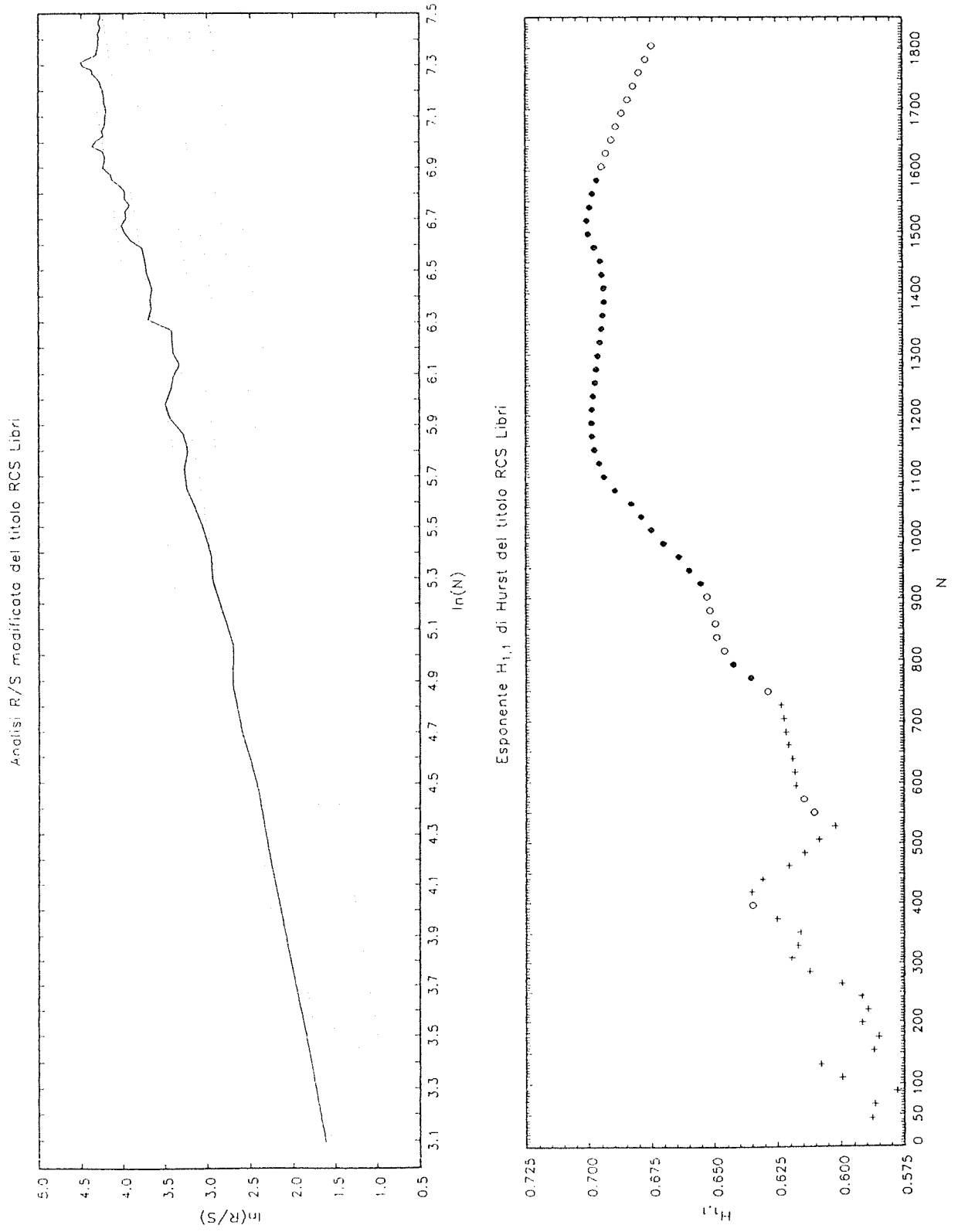


Figura 74

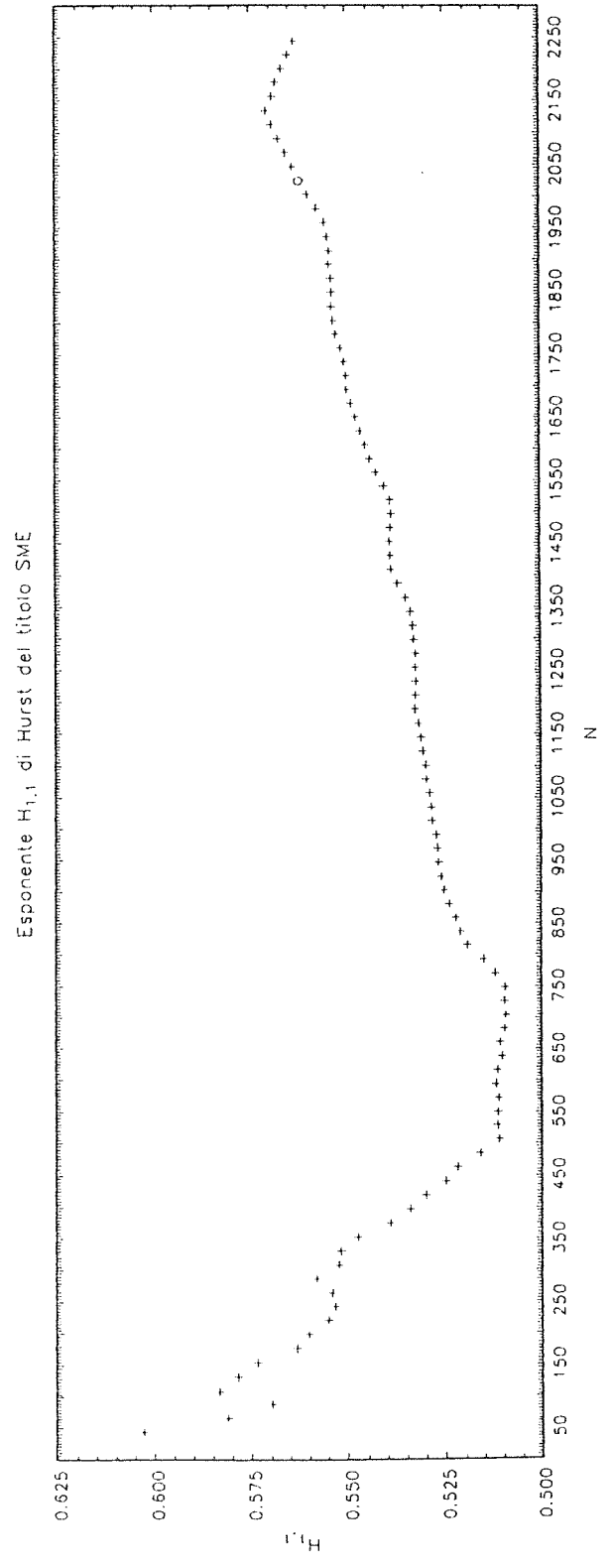
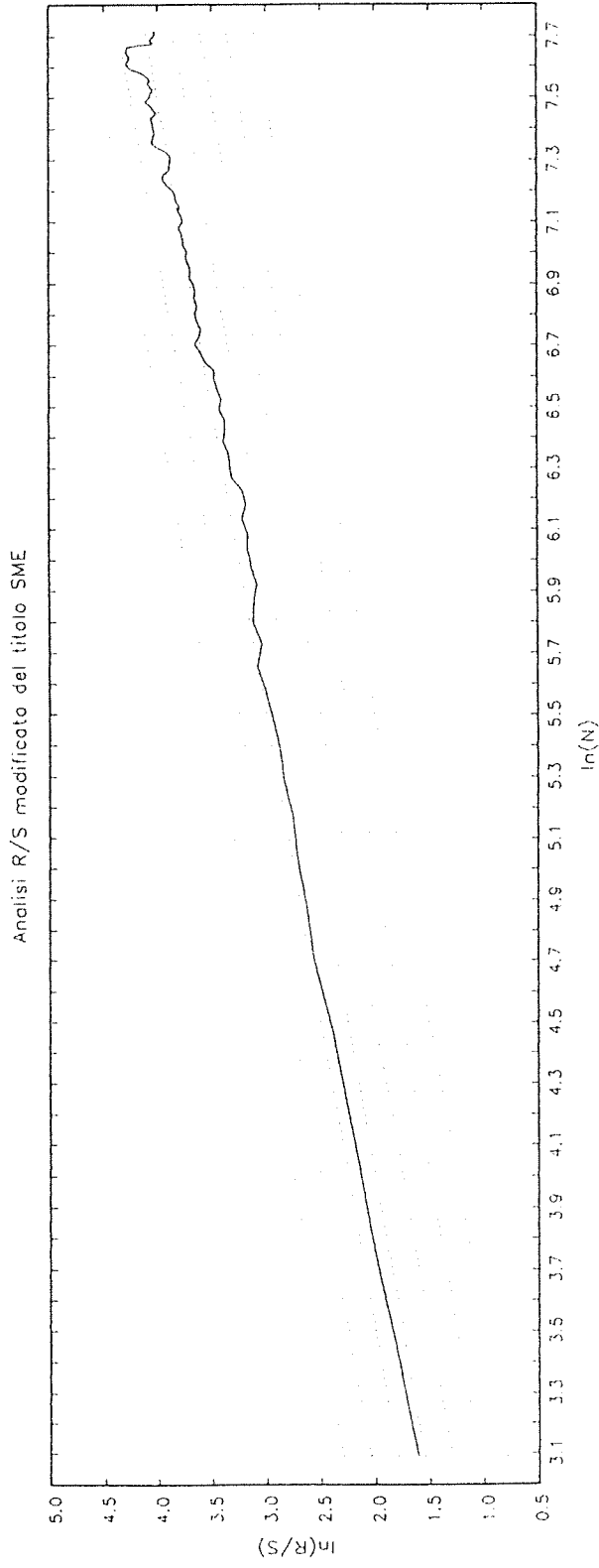


Figura 75

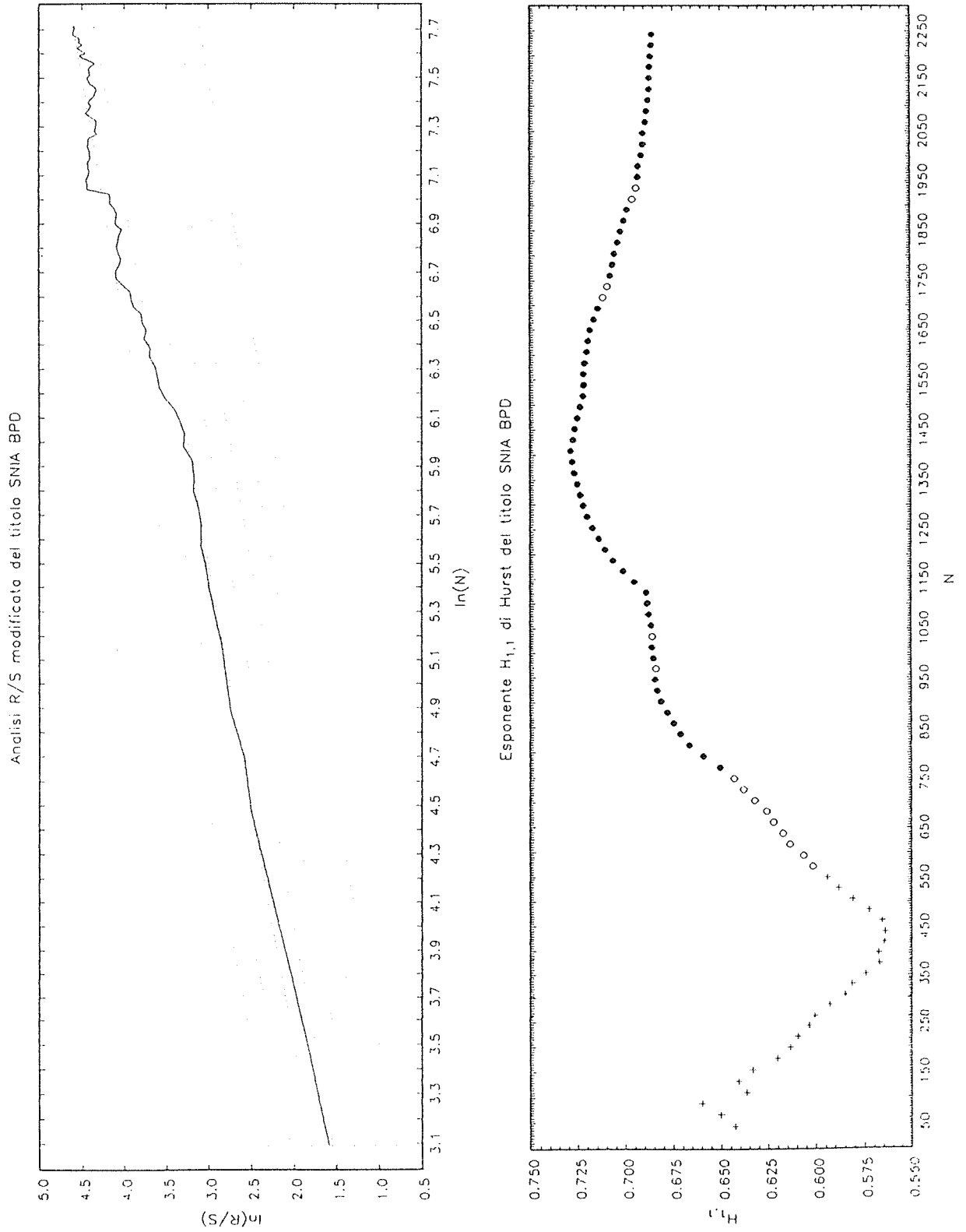


Figura 76

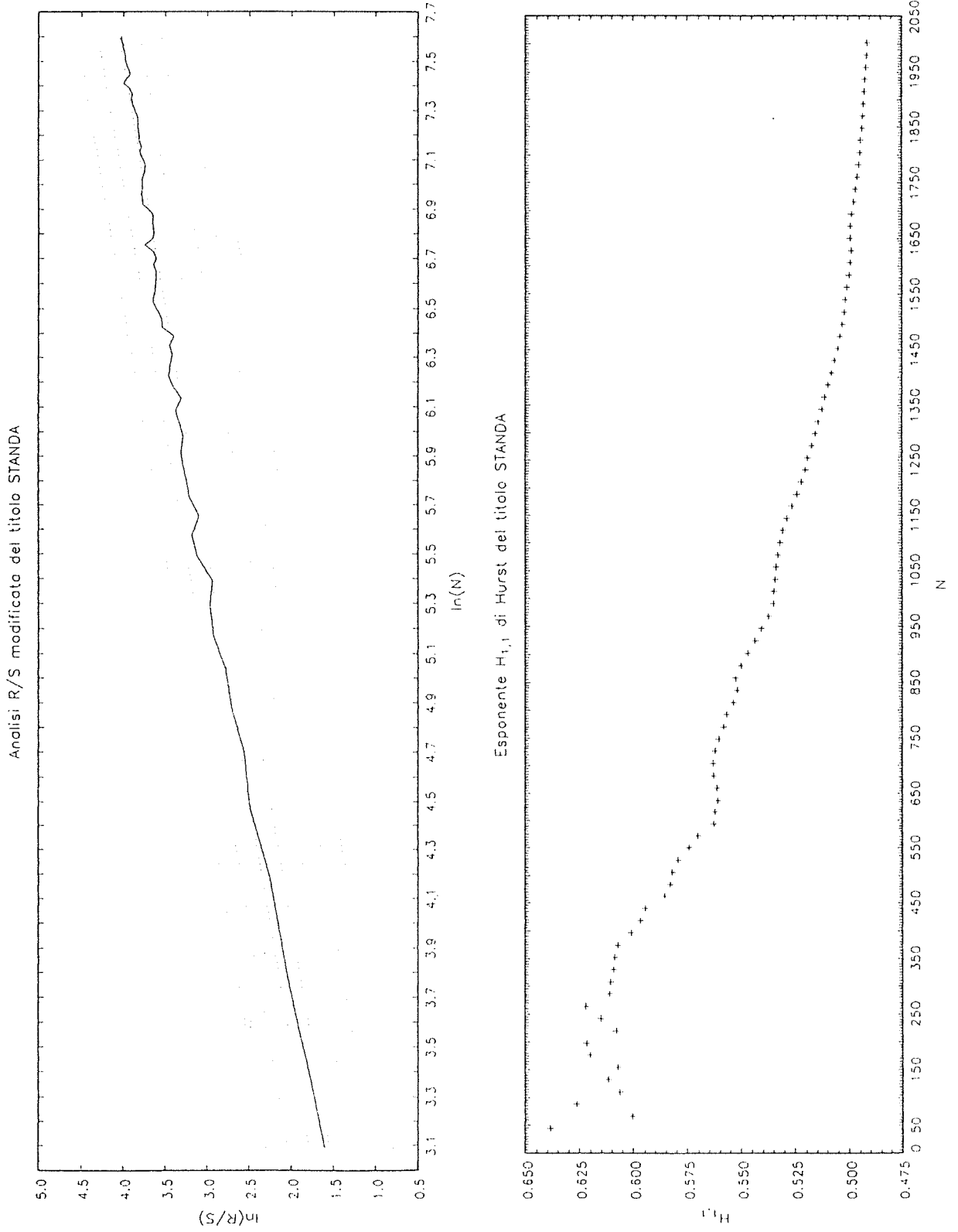


Figura 77

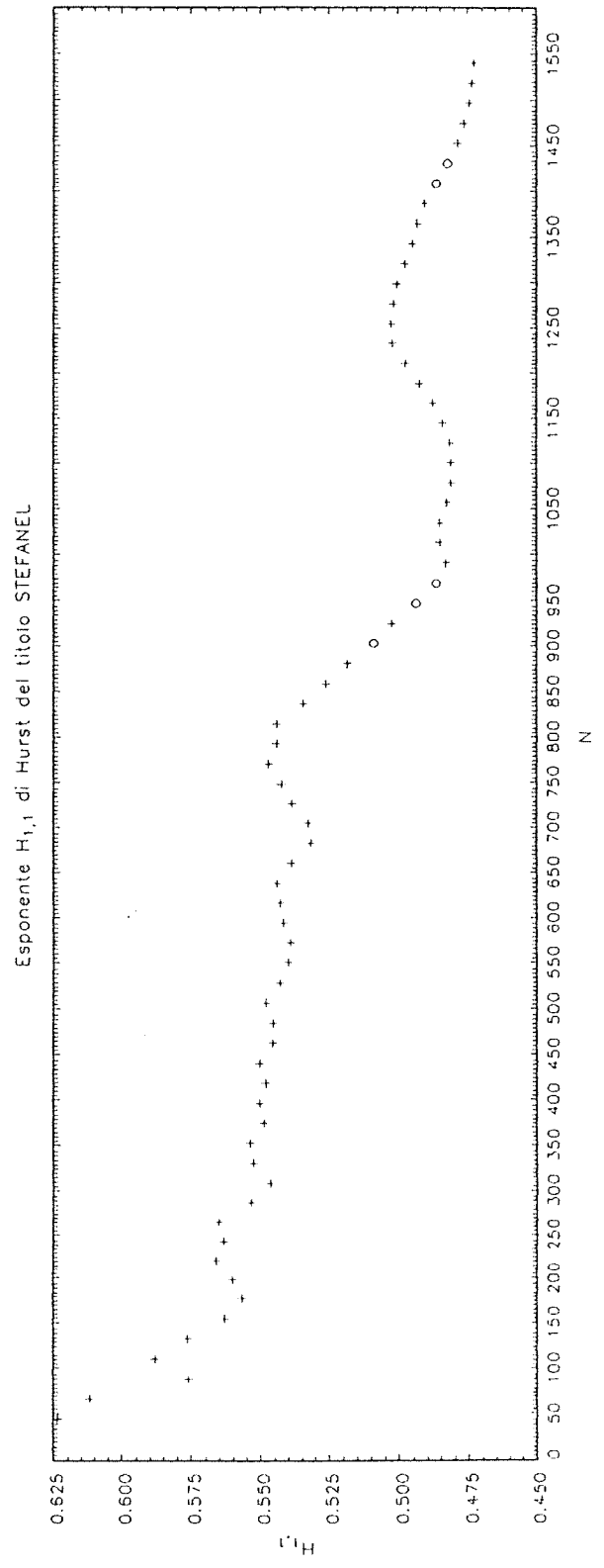
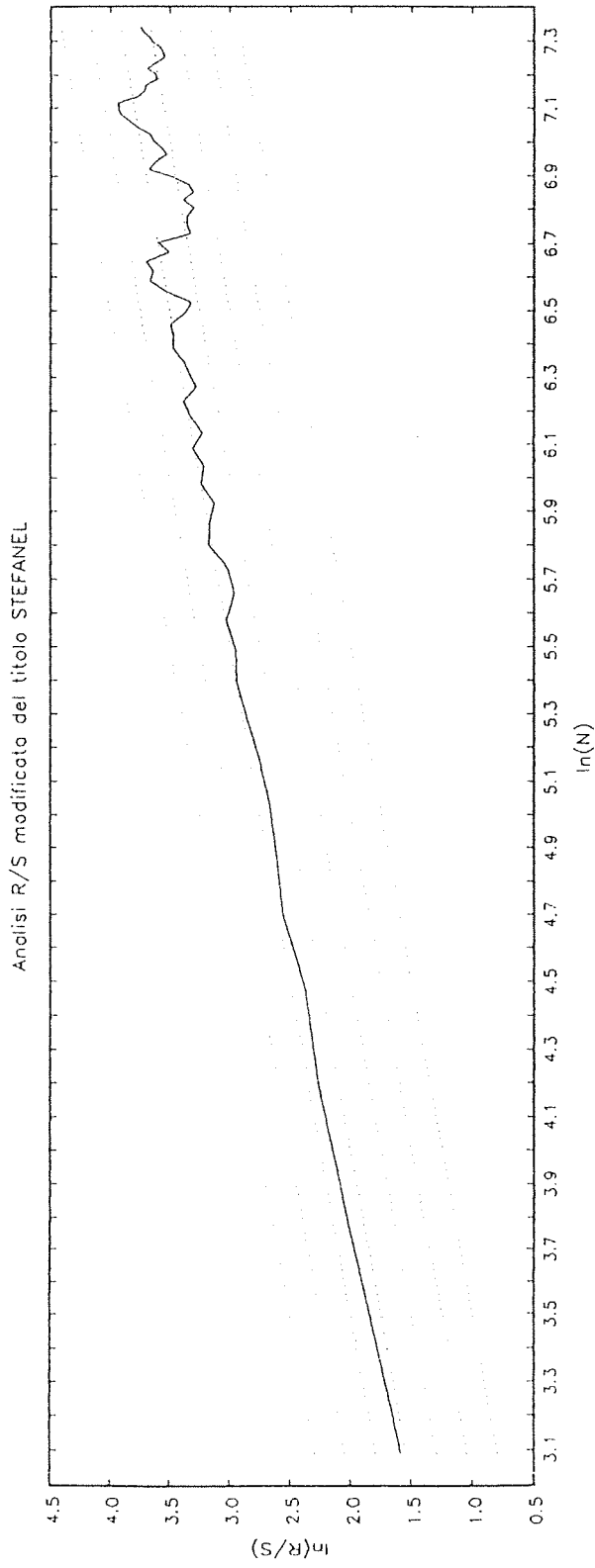


Figura 78

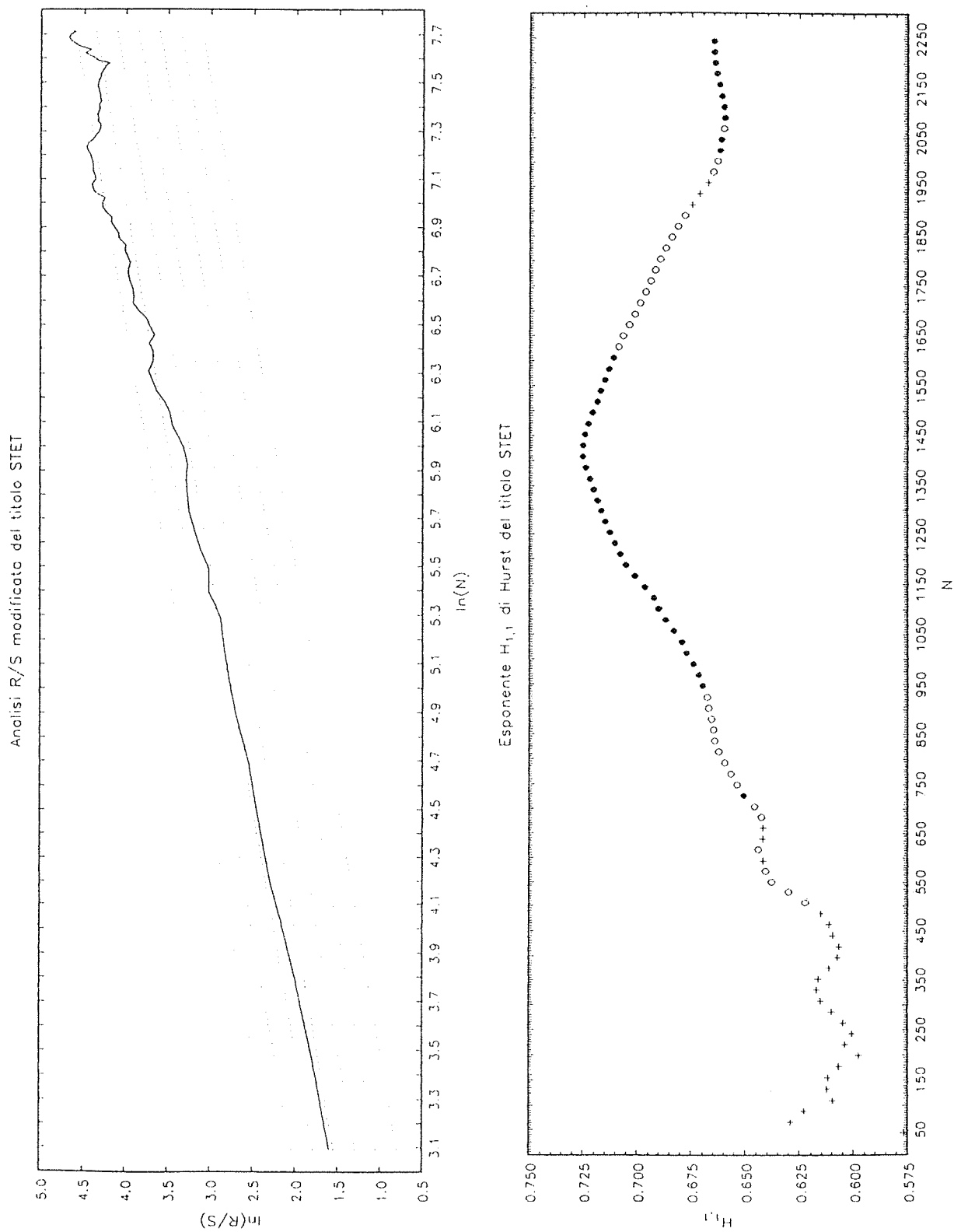
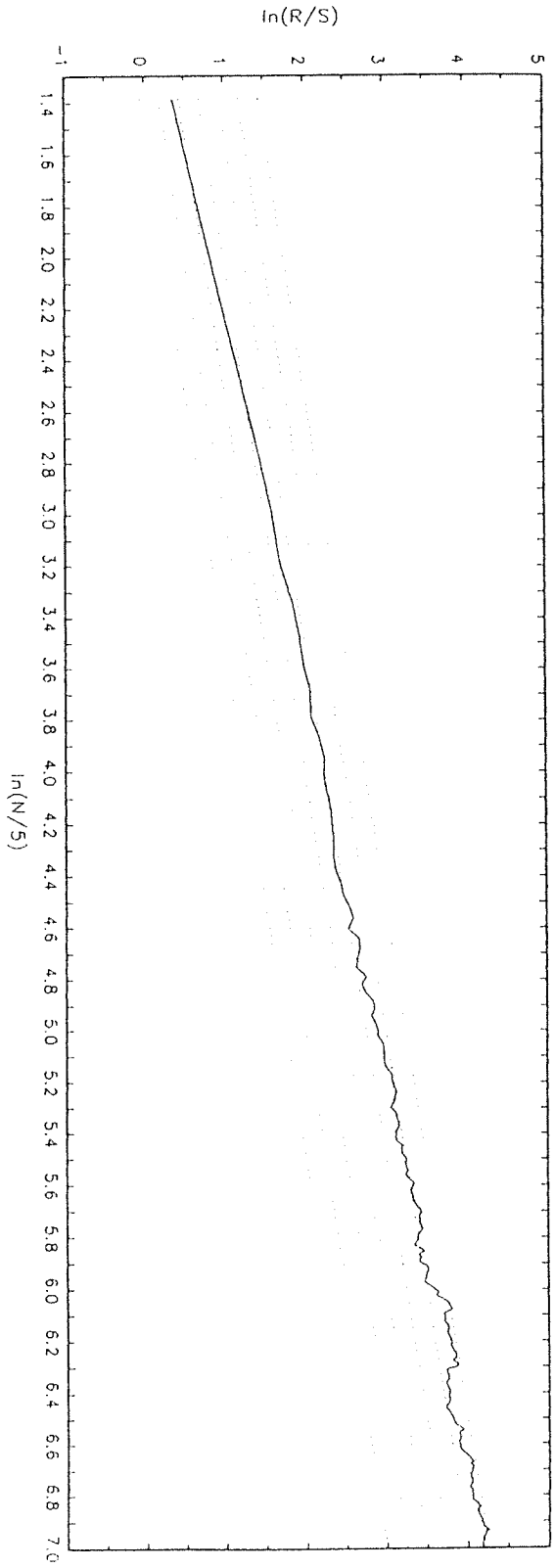


Figura 79

Analisi R/S classico dell'indice COMIT



Esponente  $H_{5,0}$  di Hurst dell'indice COMIT

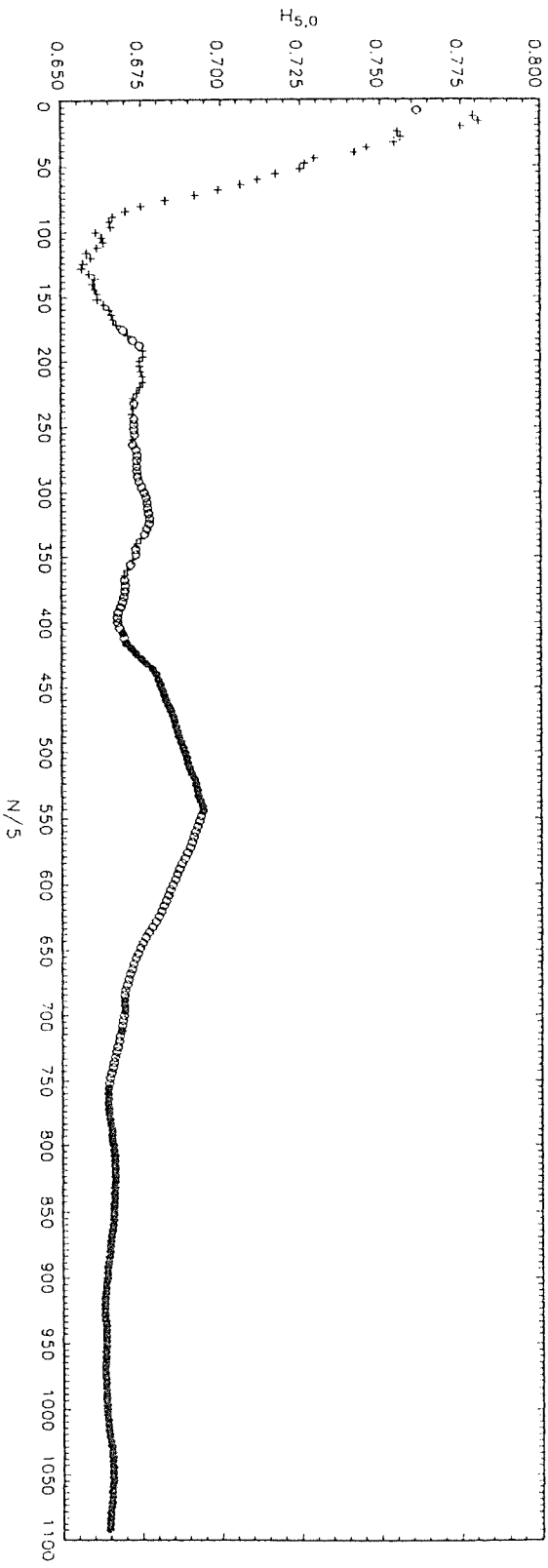


Figura 80

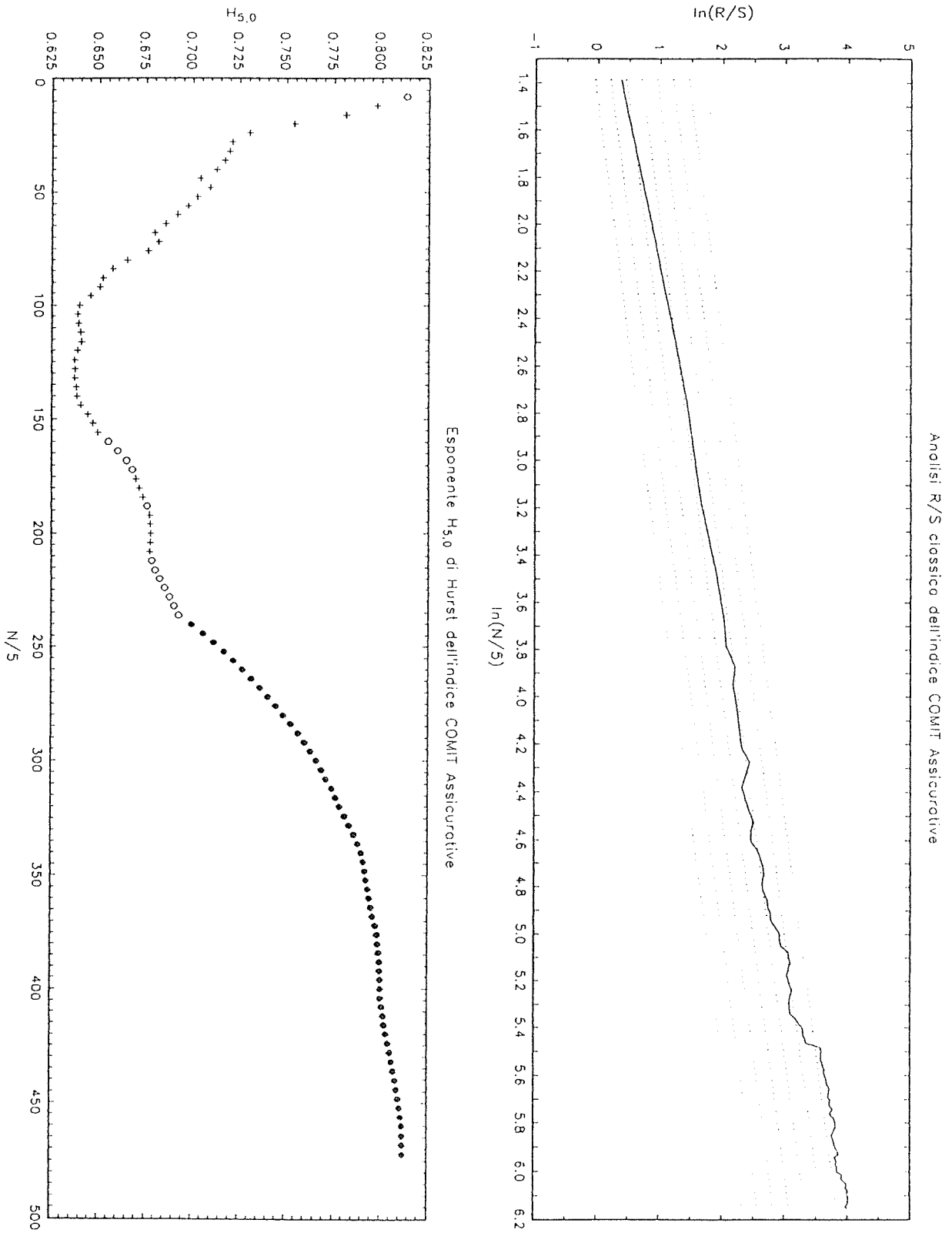




Figura 81

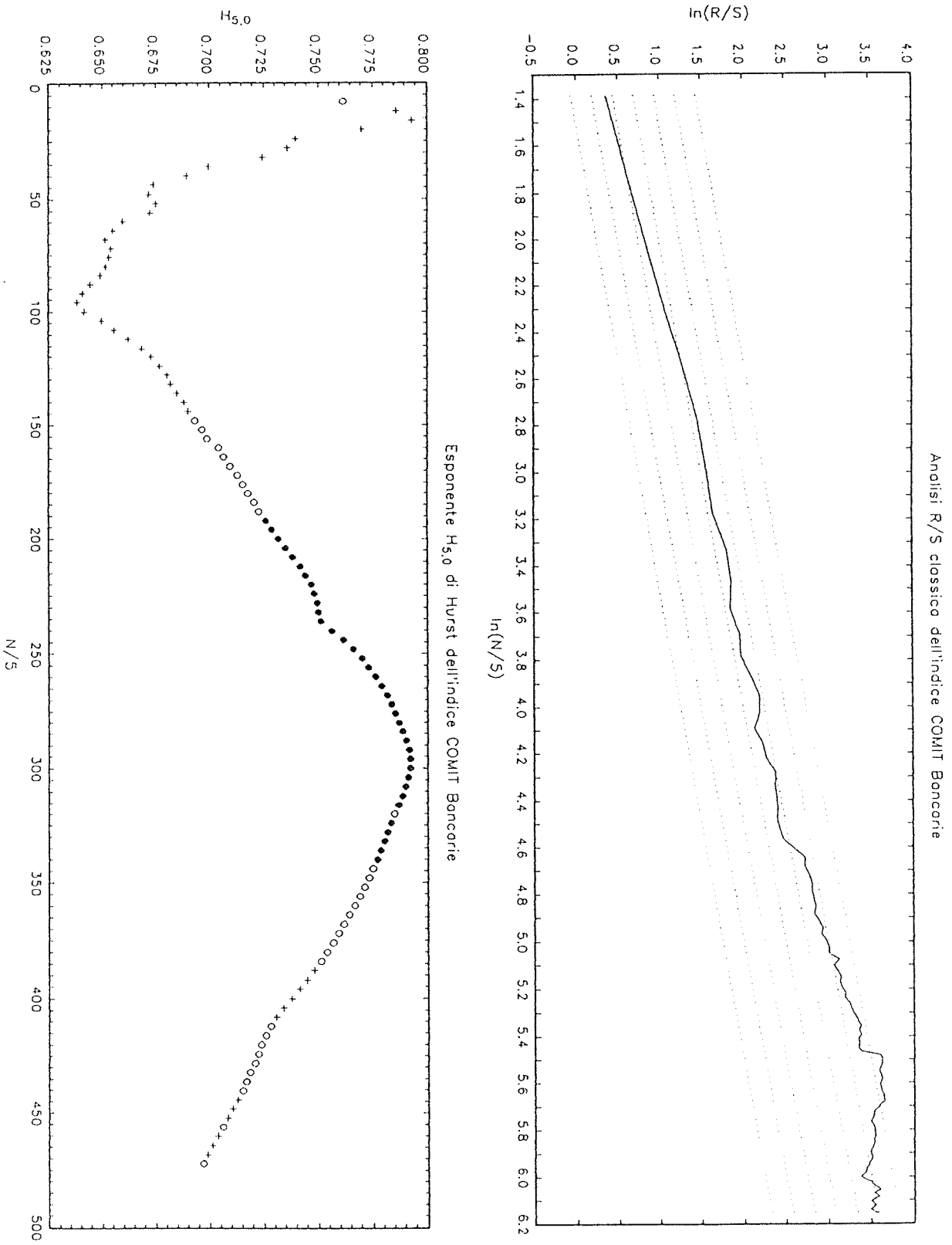


Figura 82

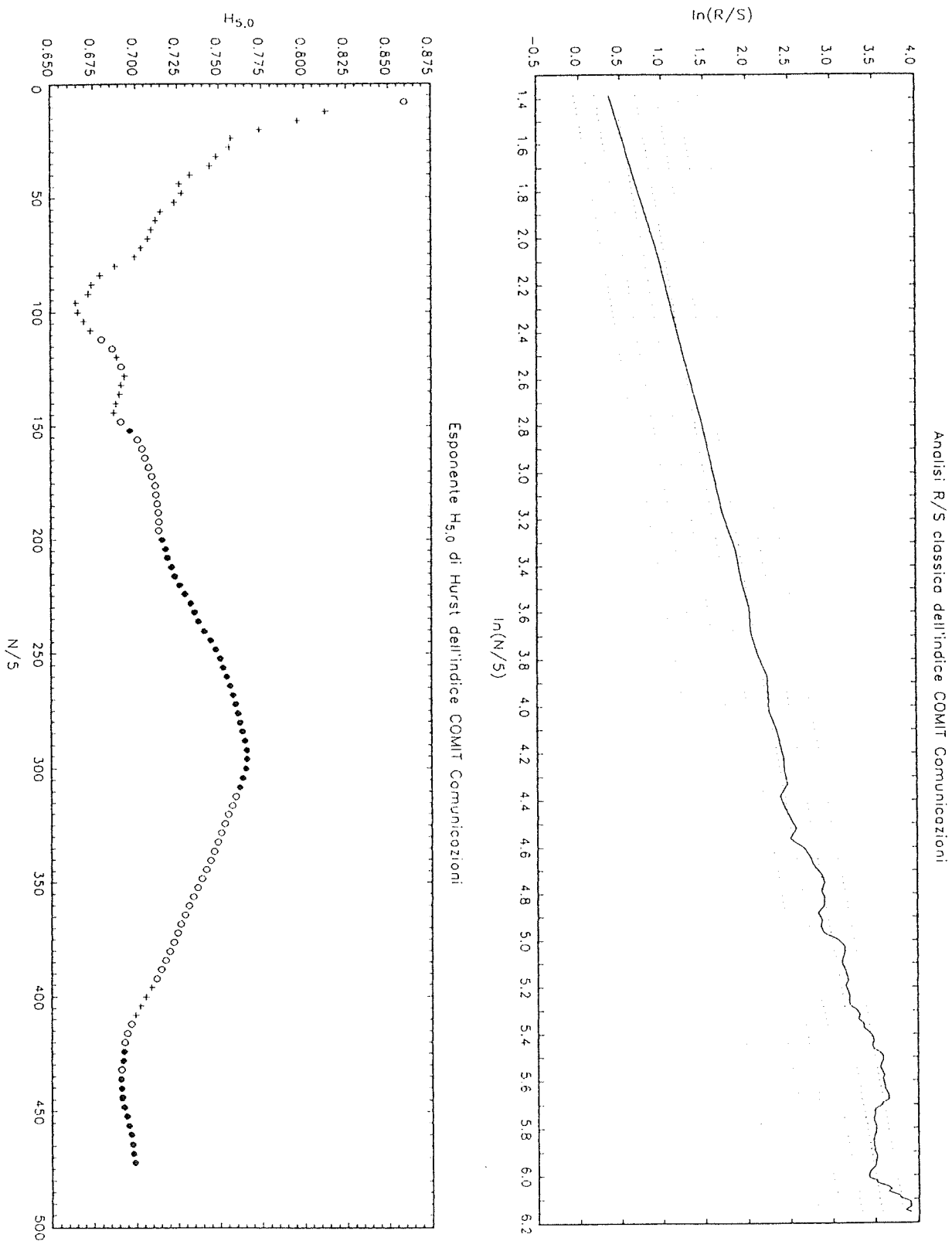


Figura 83

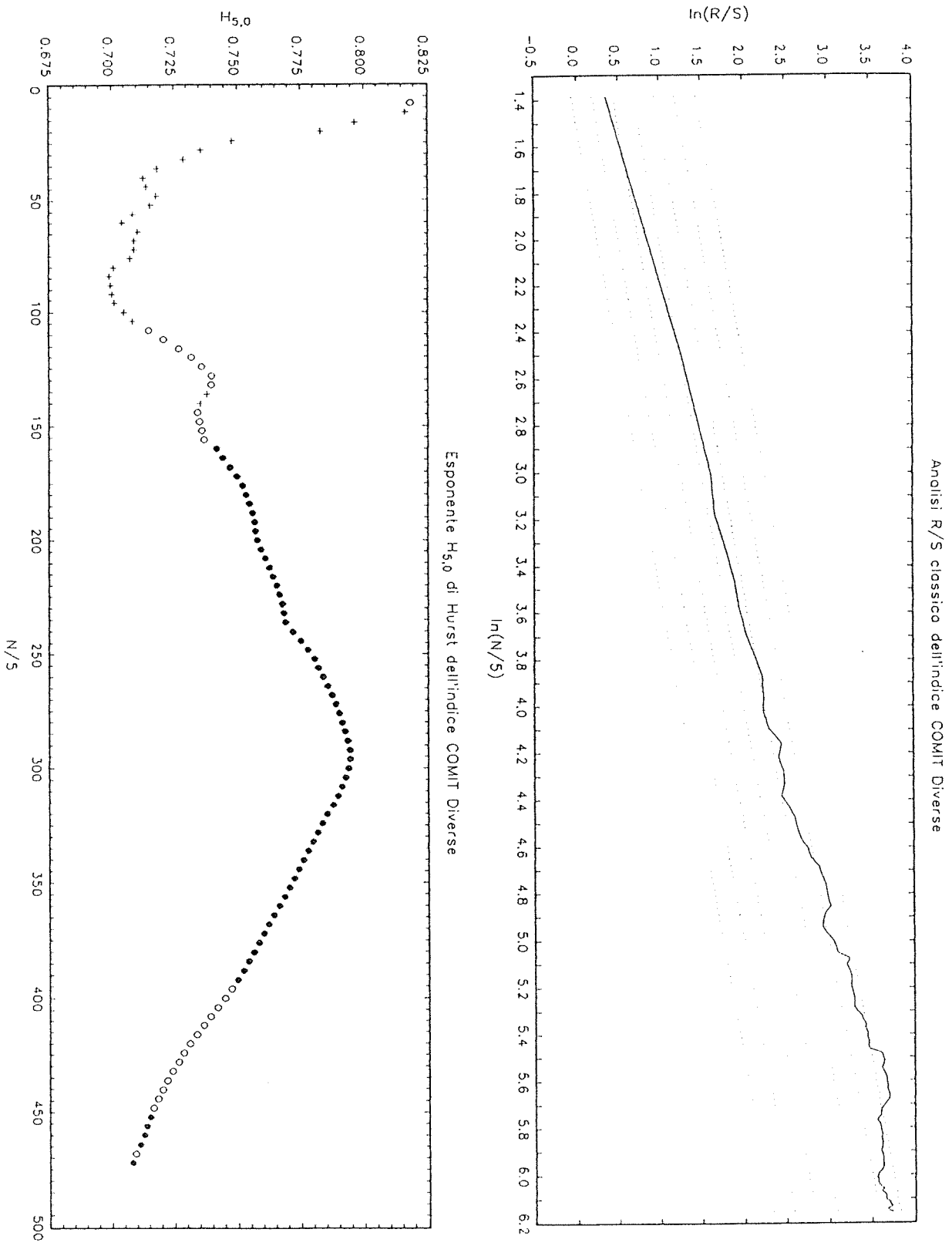


Figura 84

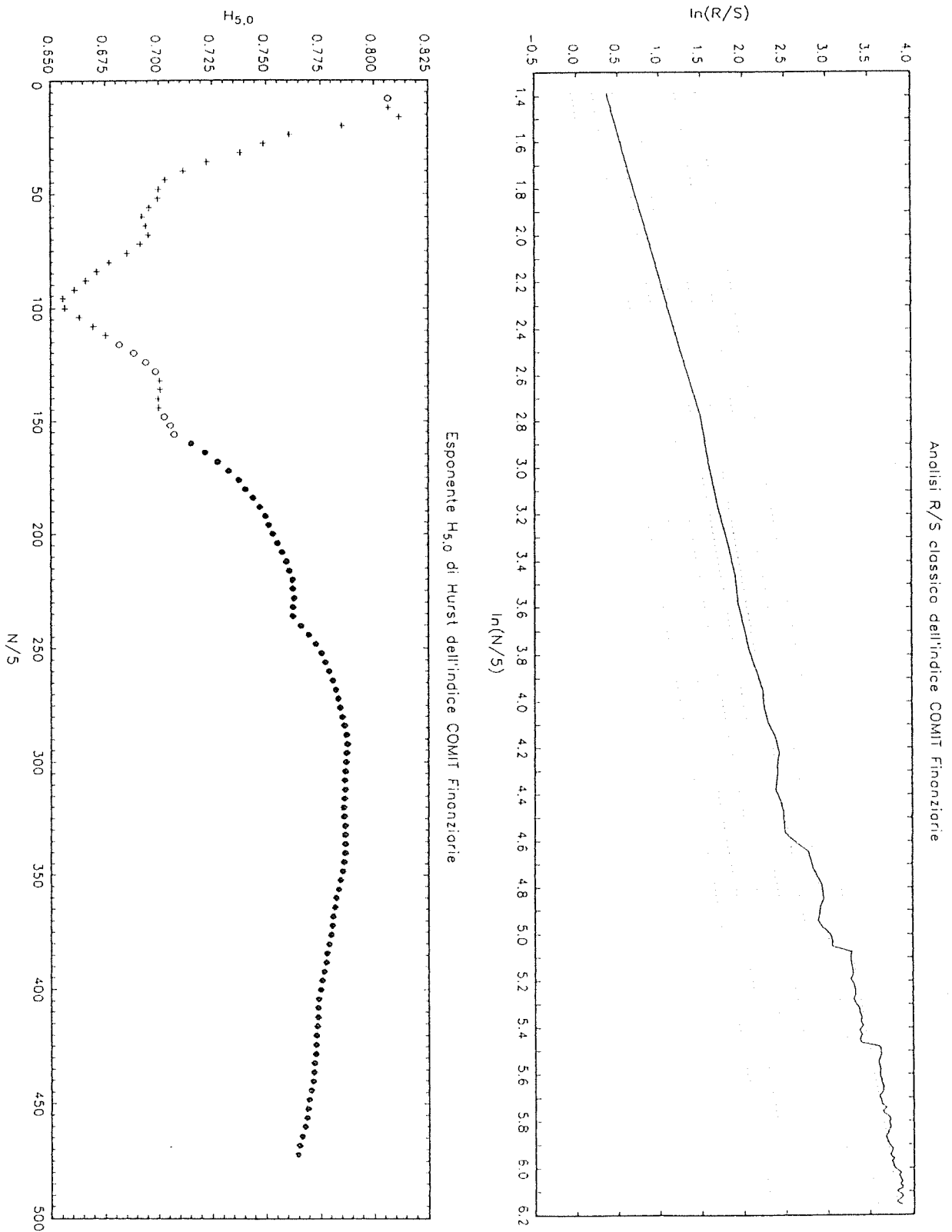


Figura 85

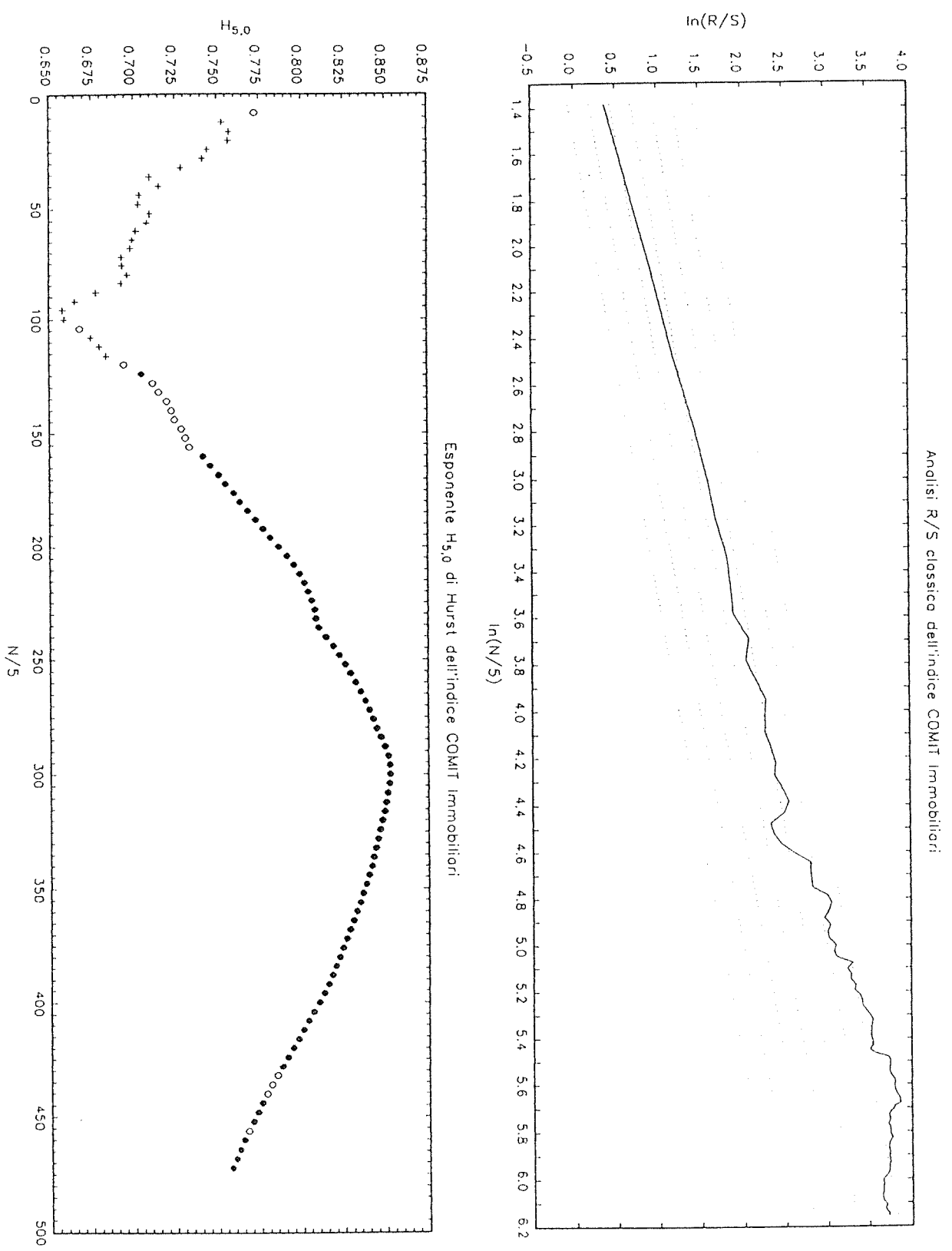


Figura 86

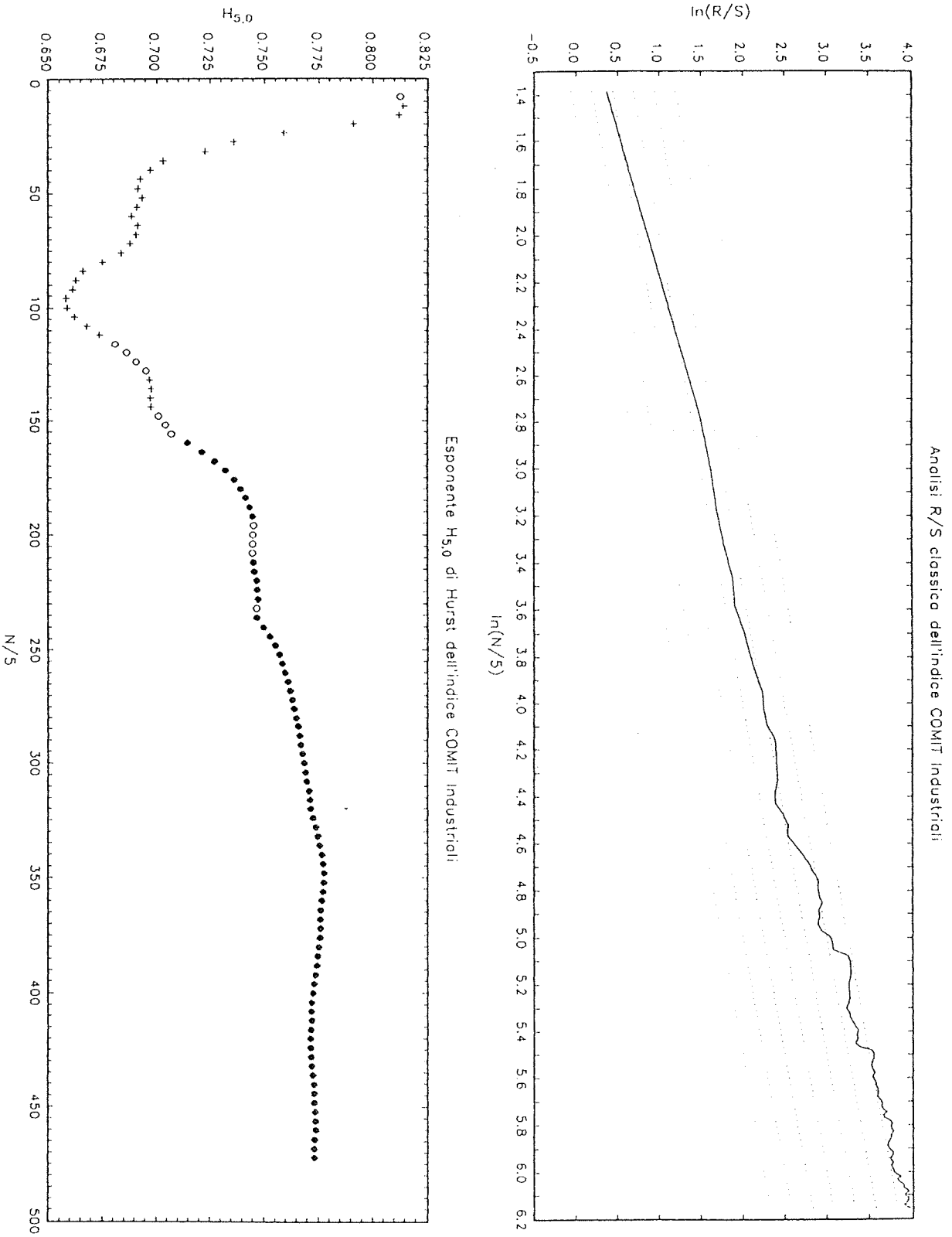


Figura 87

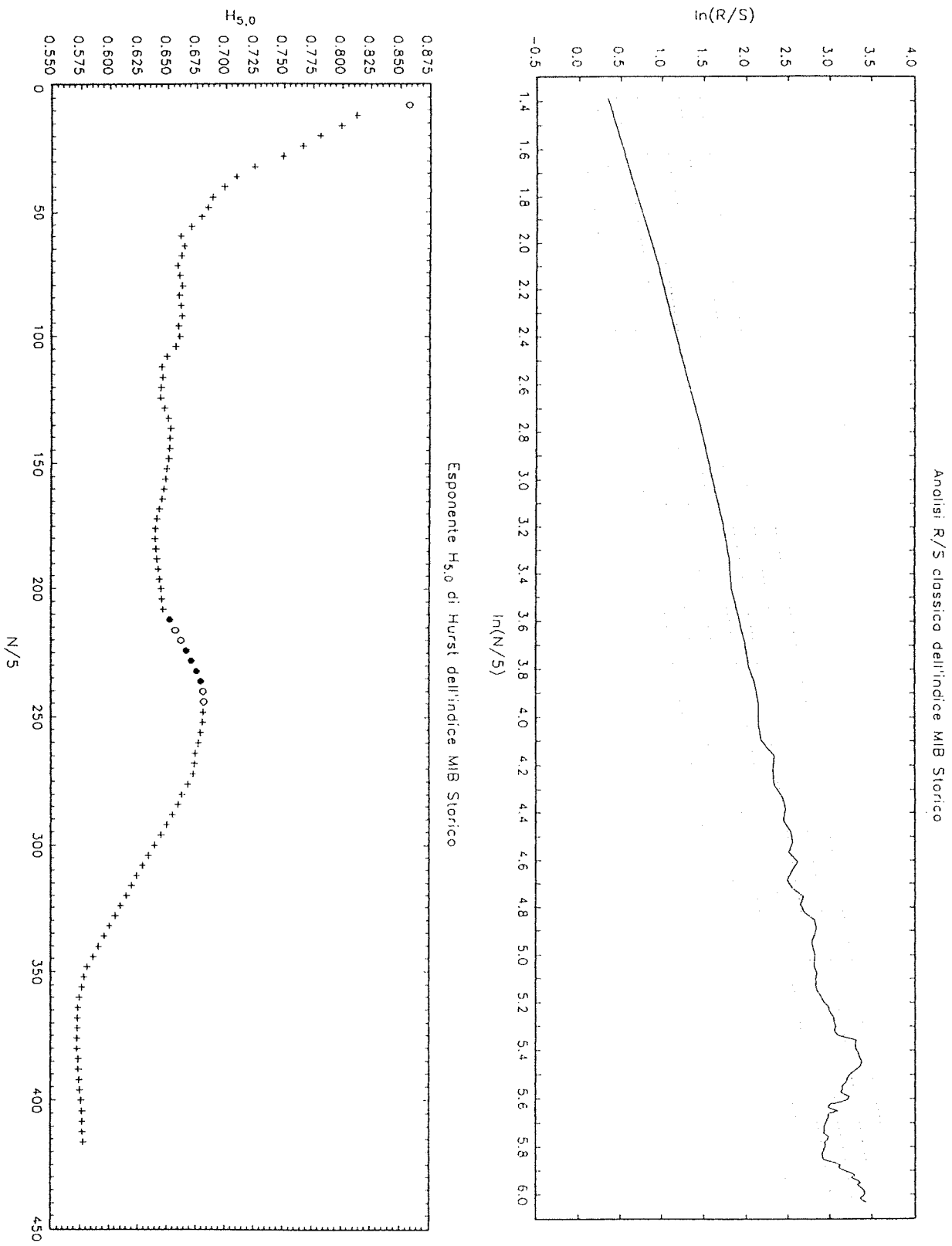






Figura 88

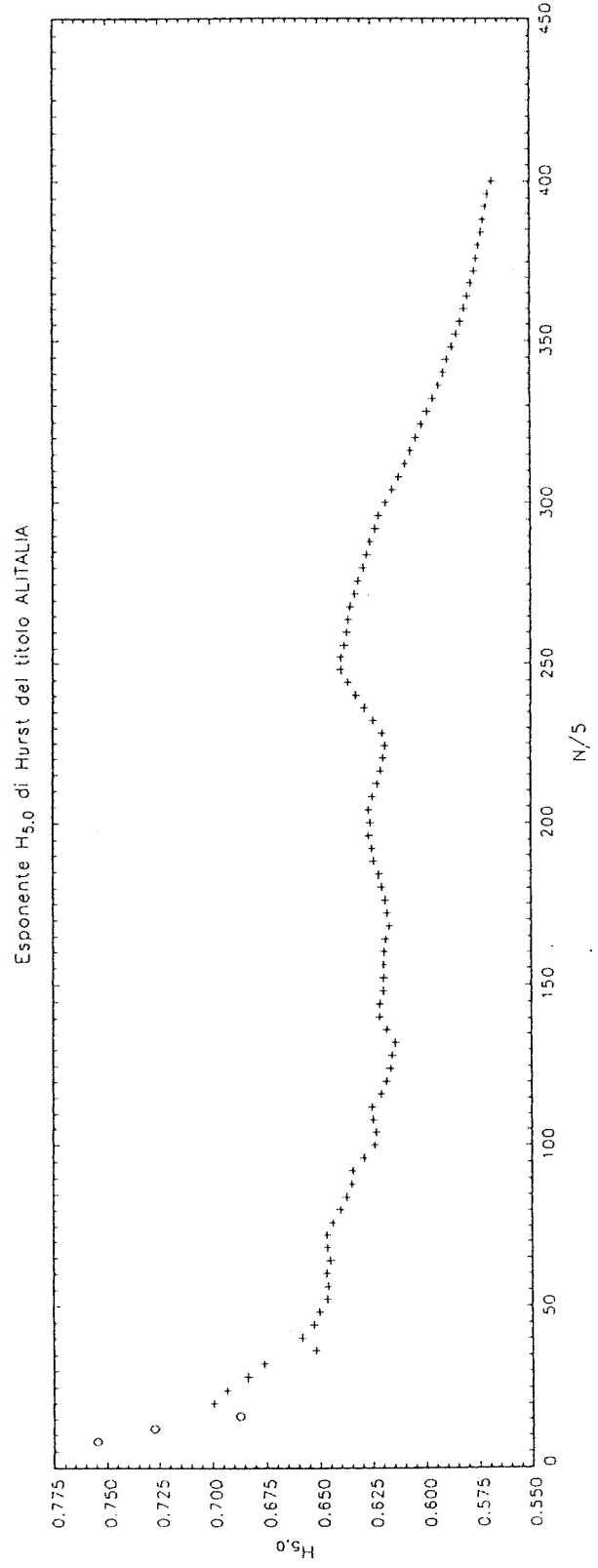
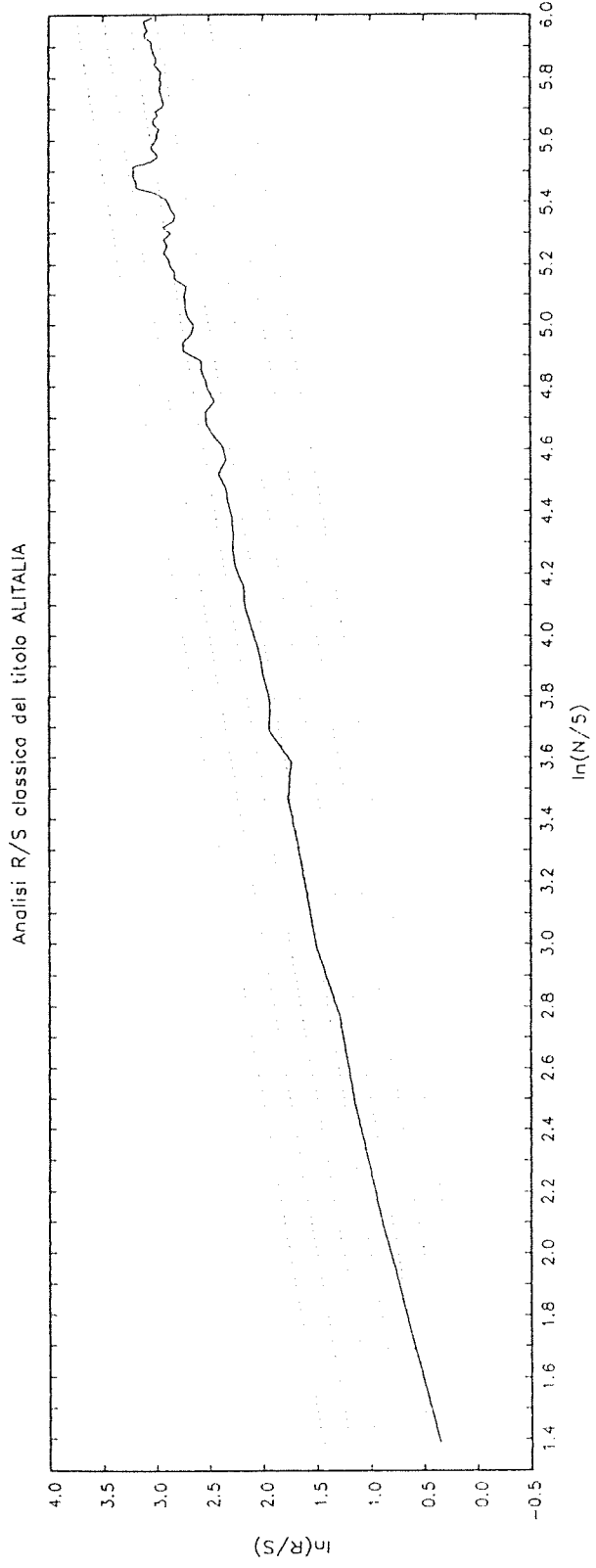


Figura 89

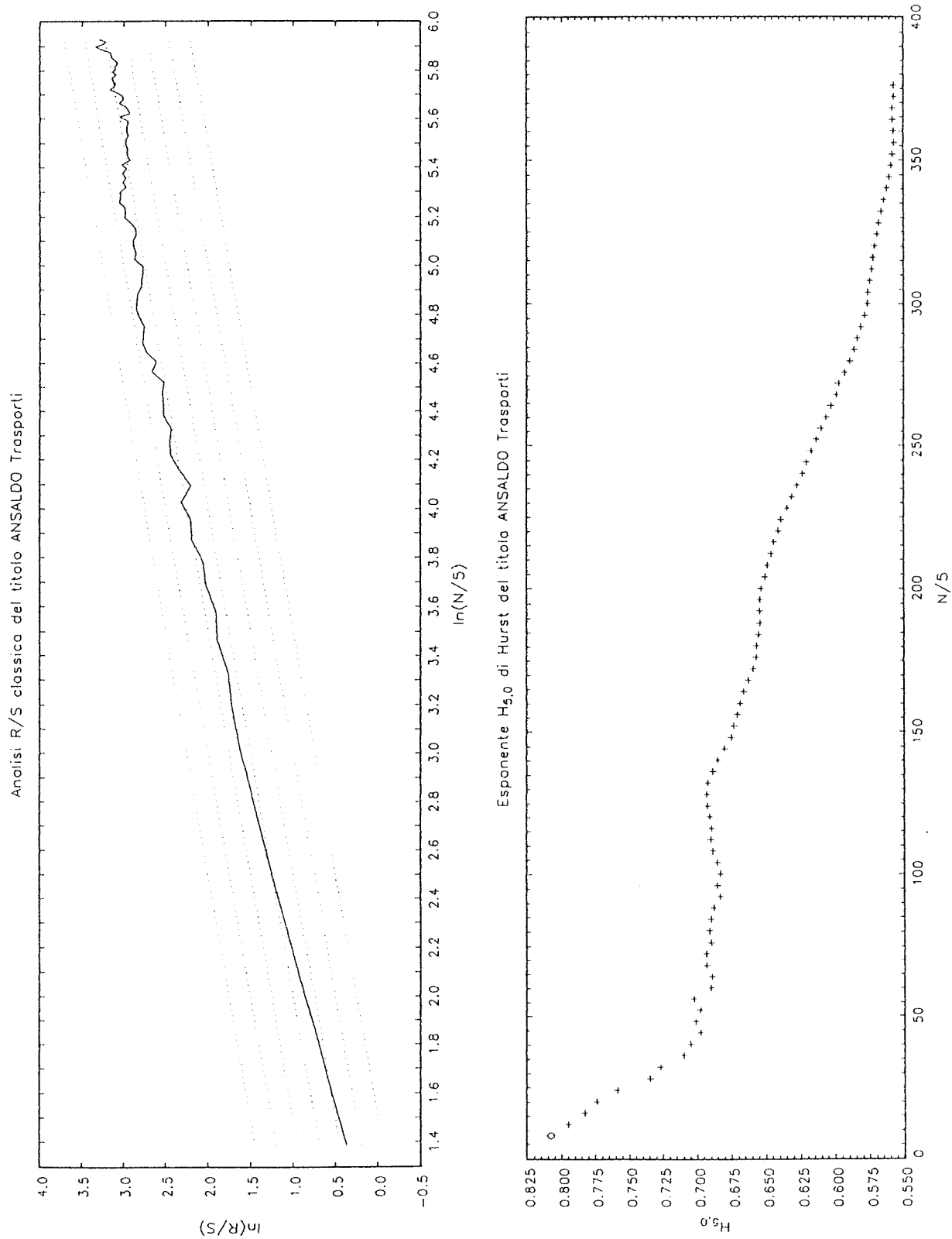


Figura 90

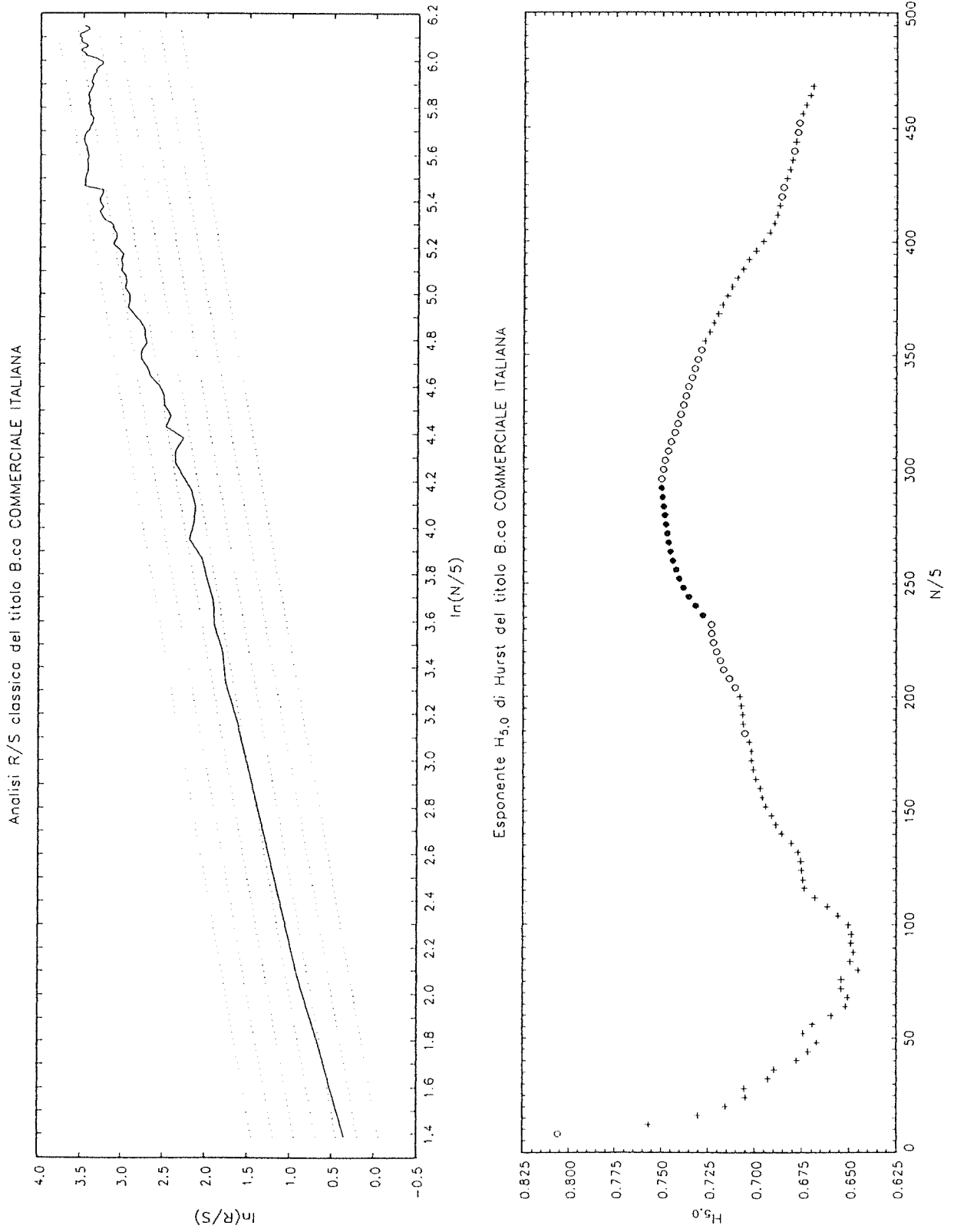


Figura 91

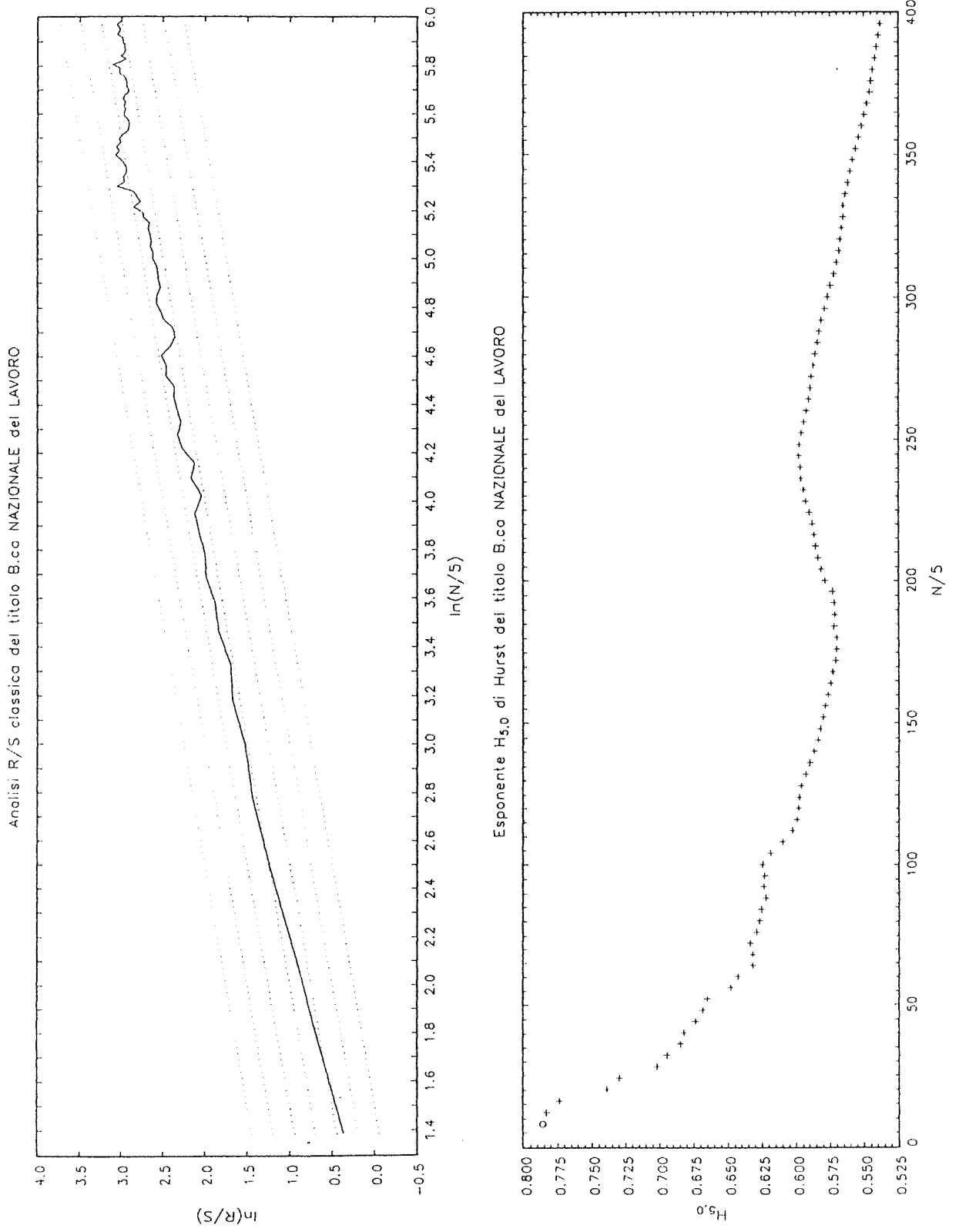


Figura 92

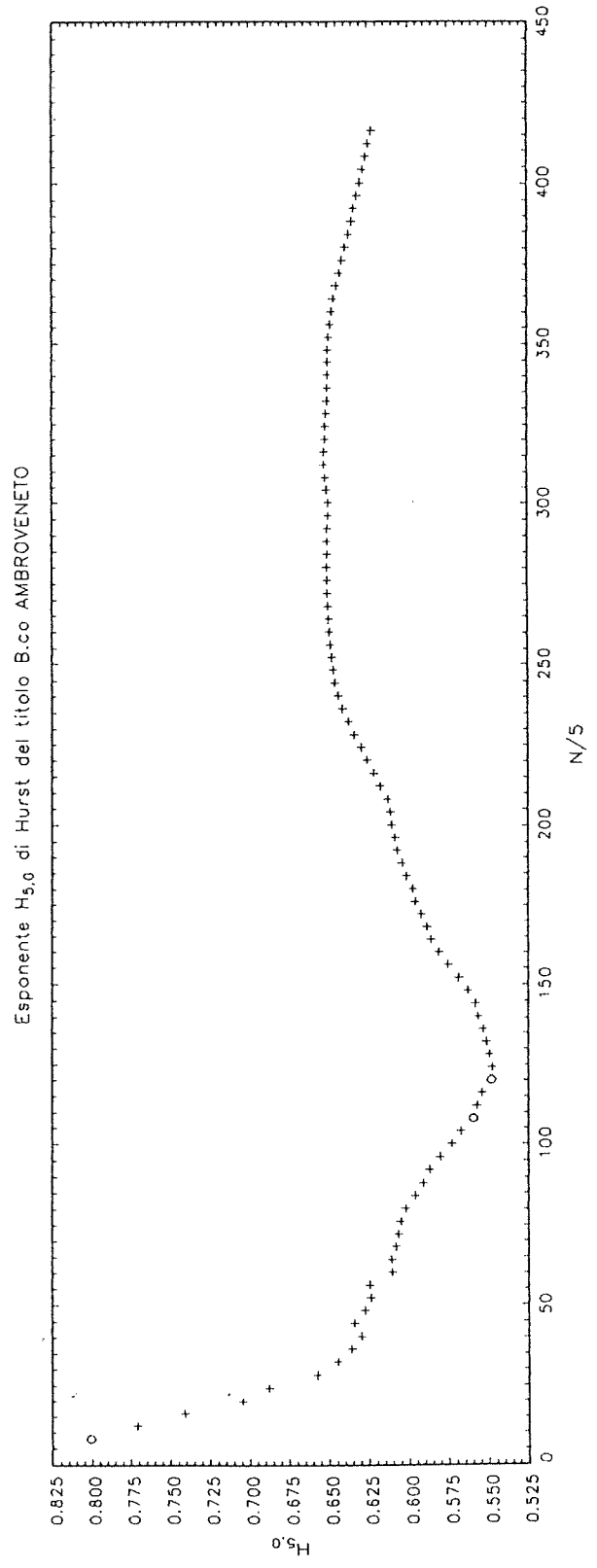
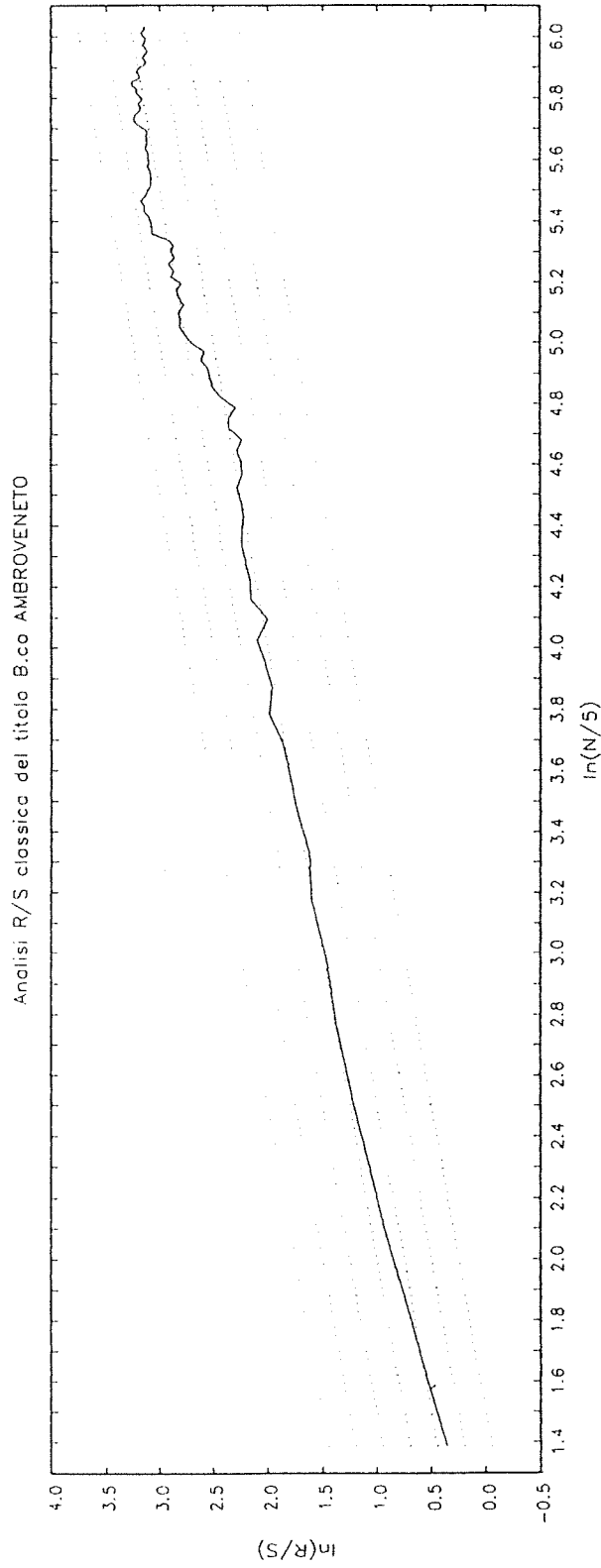


Figura 93

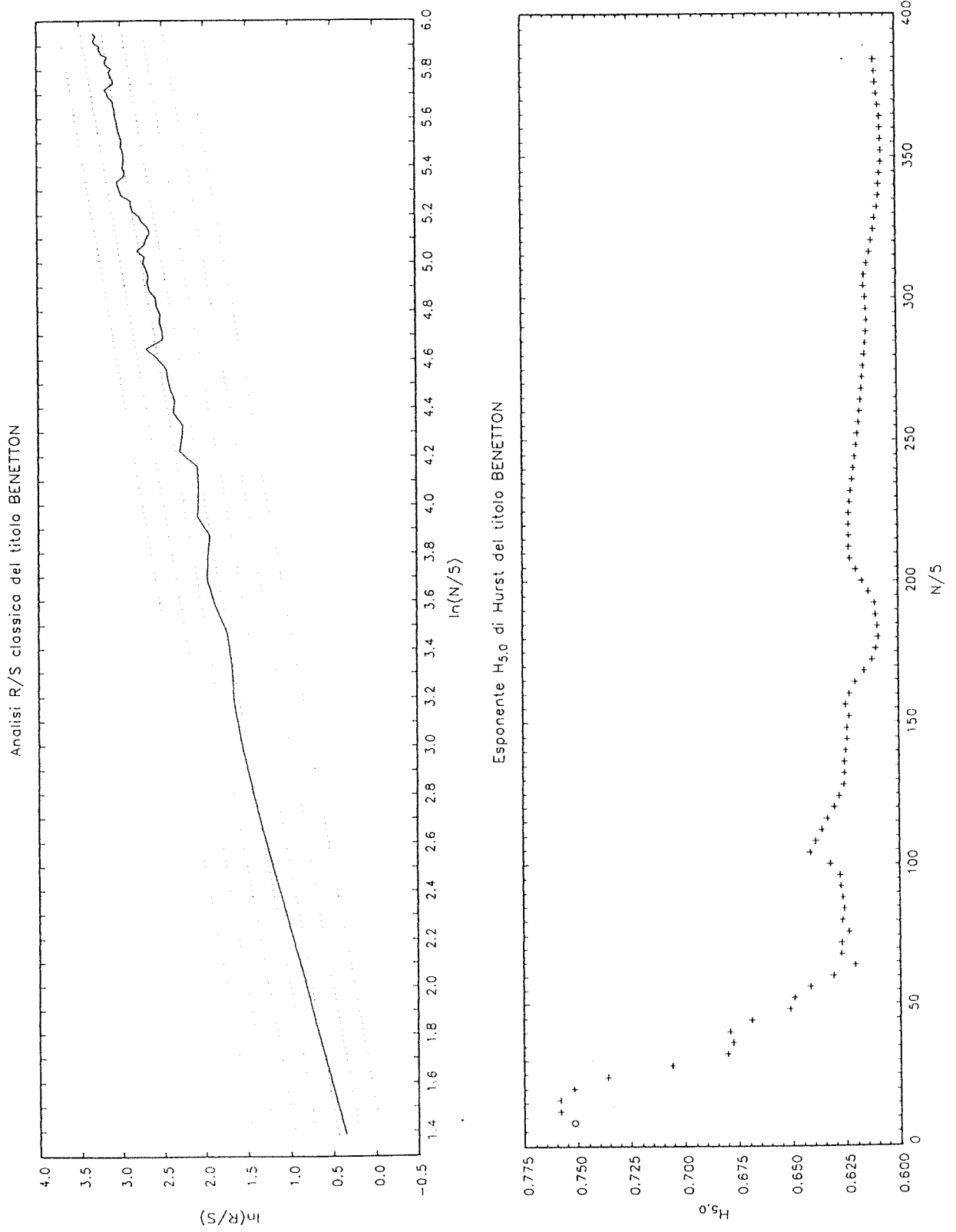


Figura 94

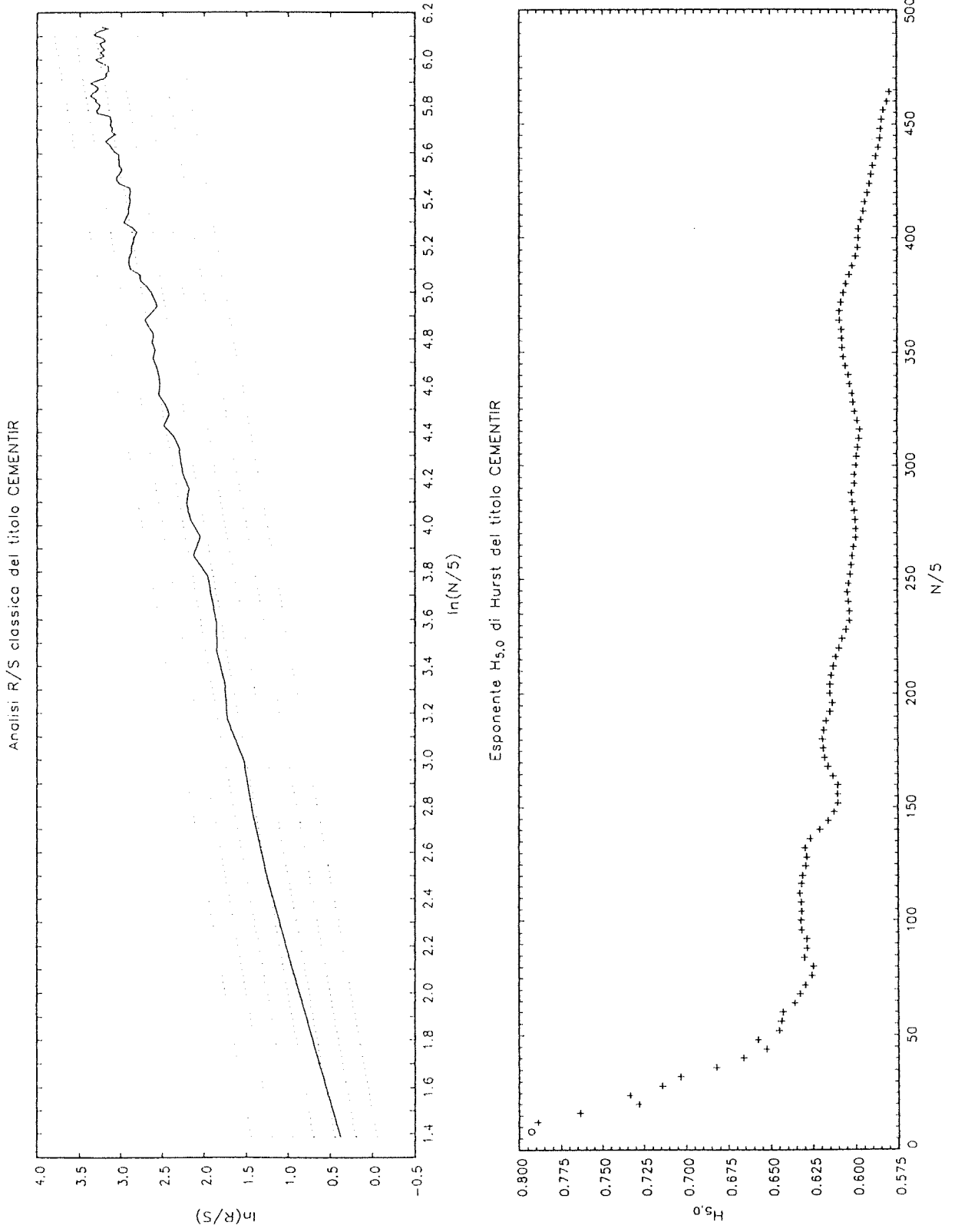


Figura 95

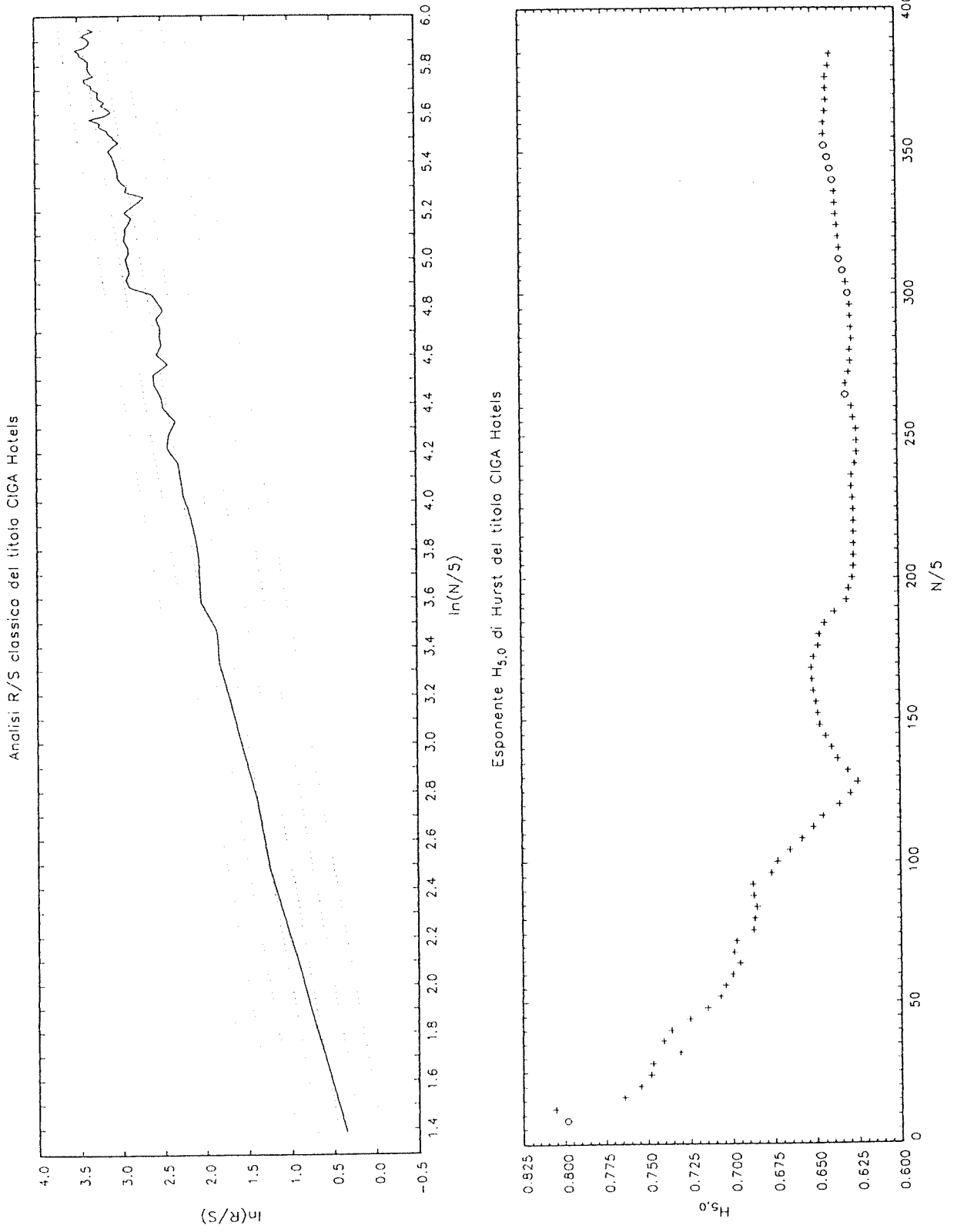




Figura 96

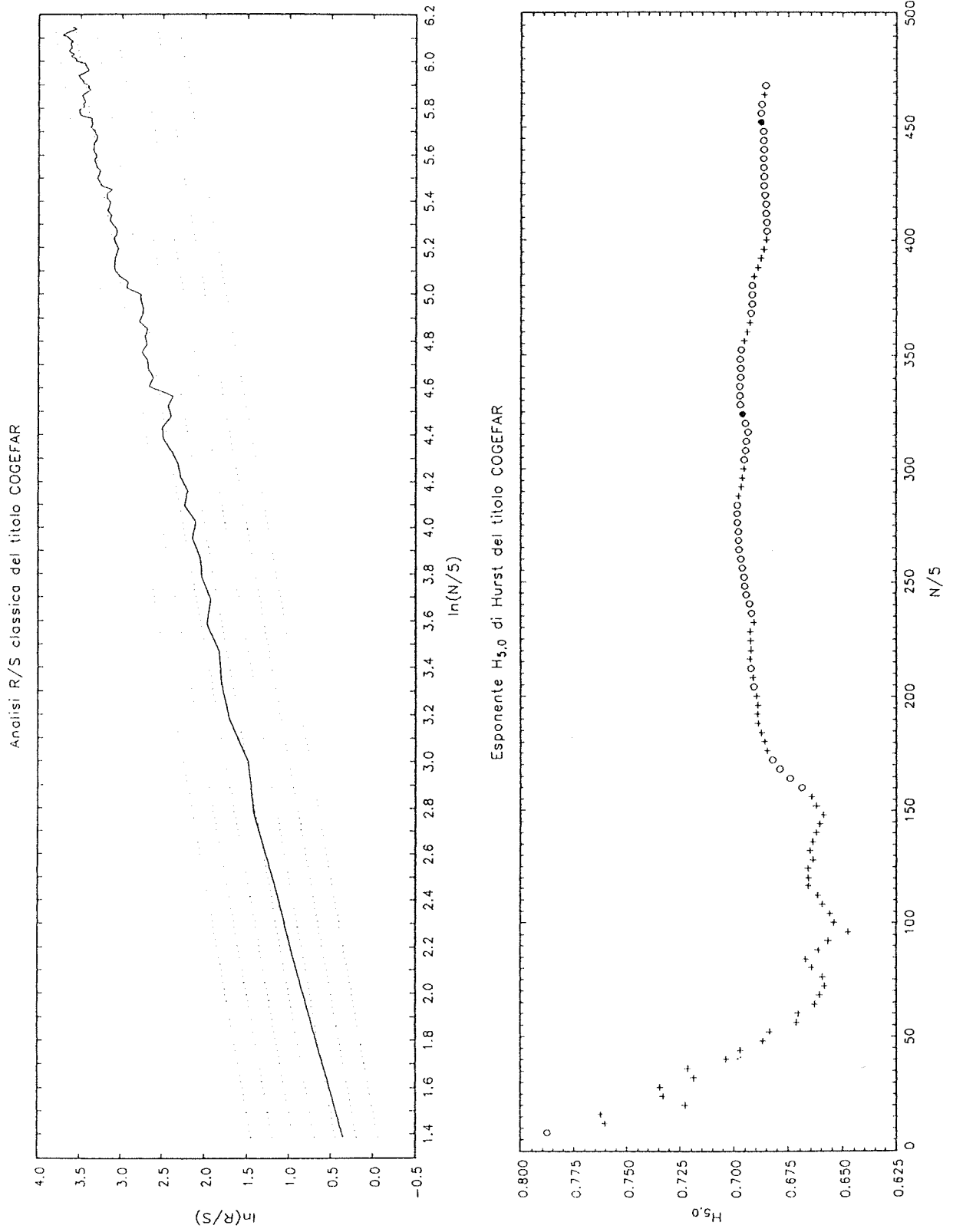


Figura 97

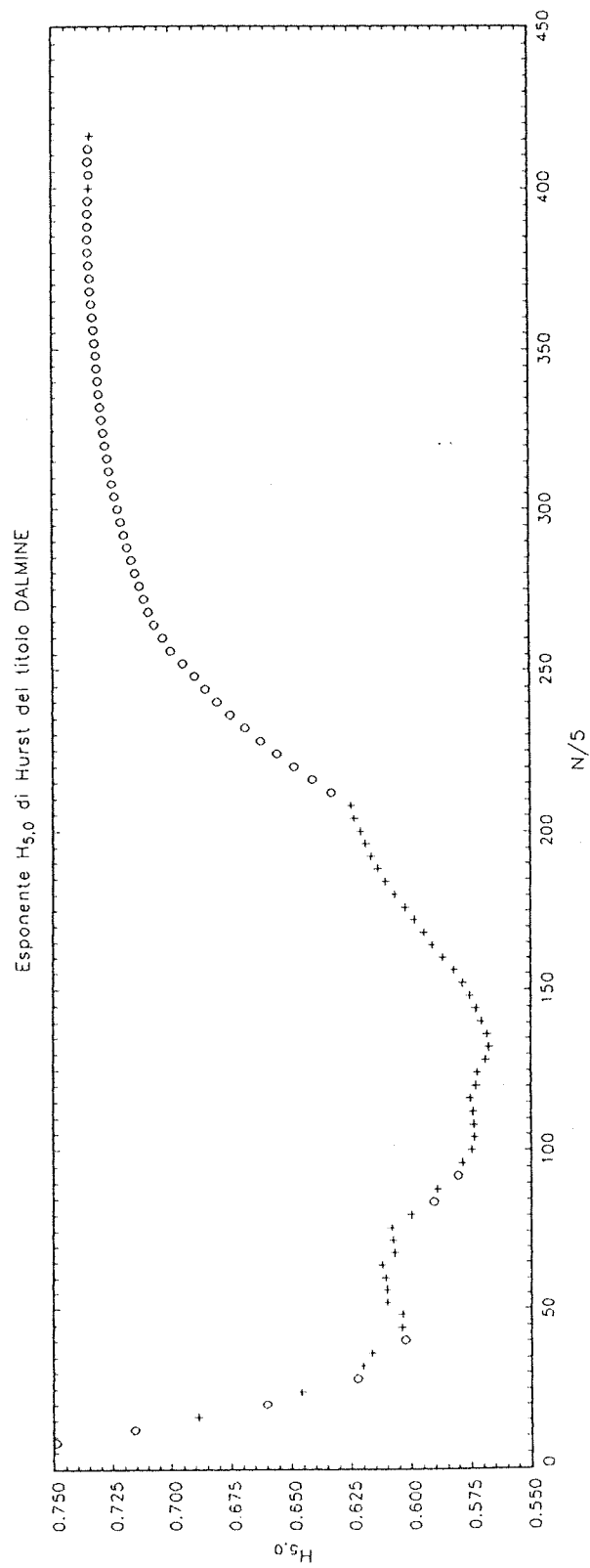
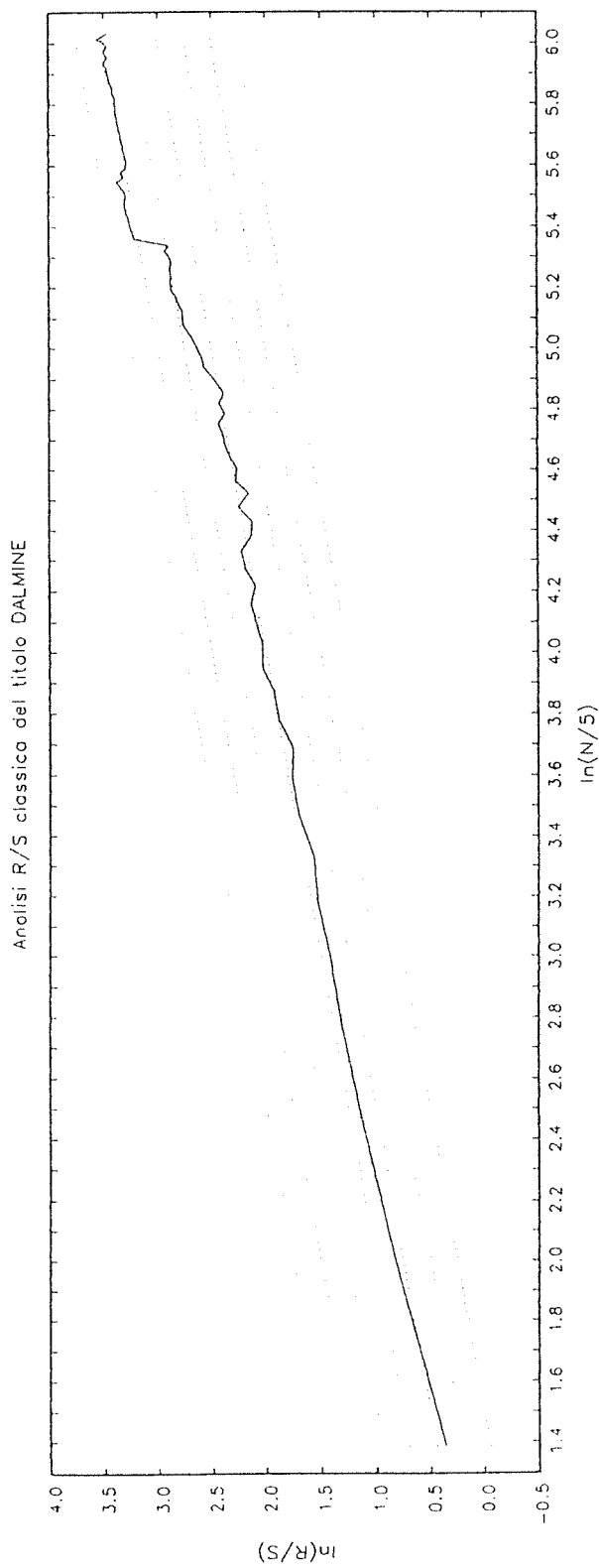


Figura 98

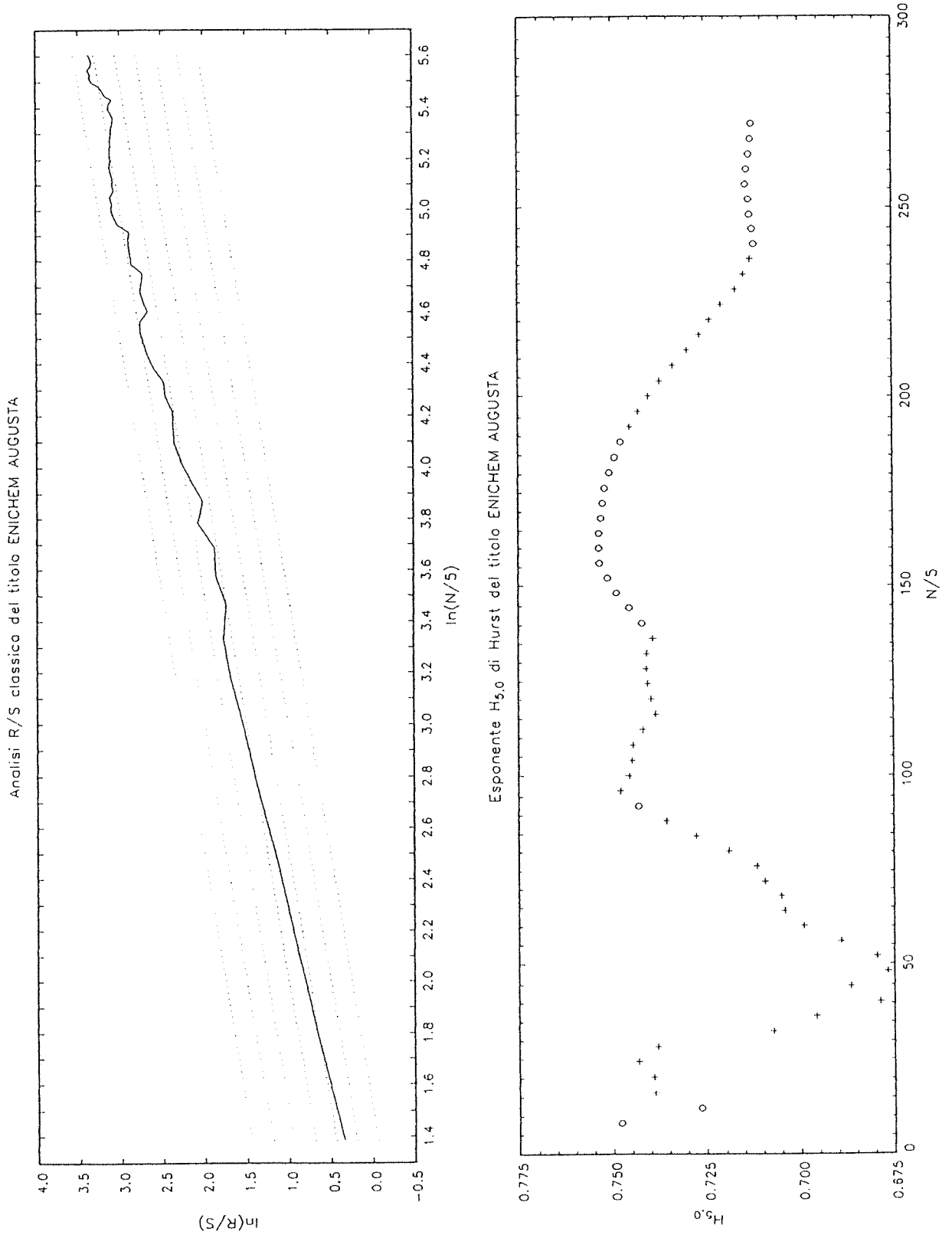


Figura 99

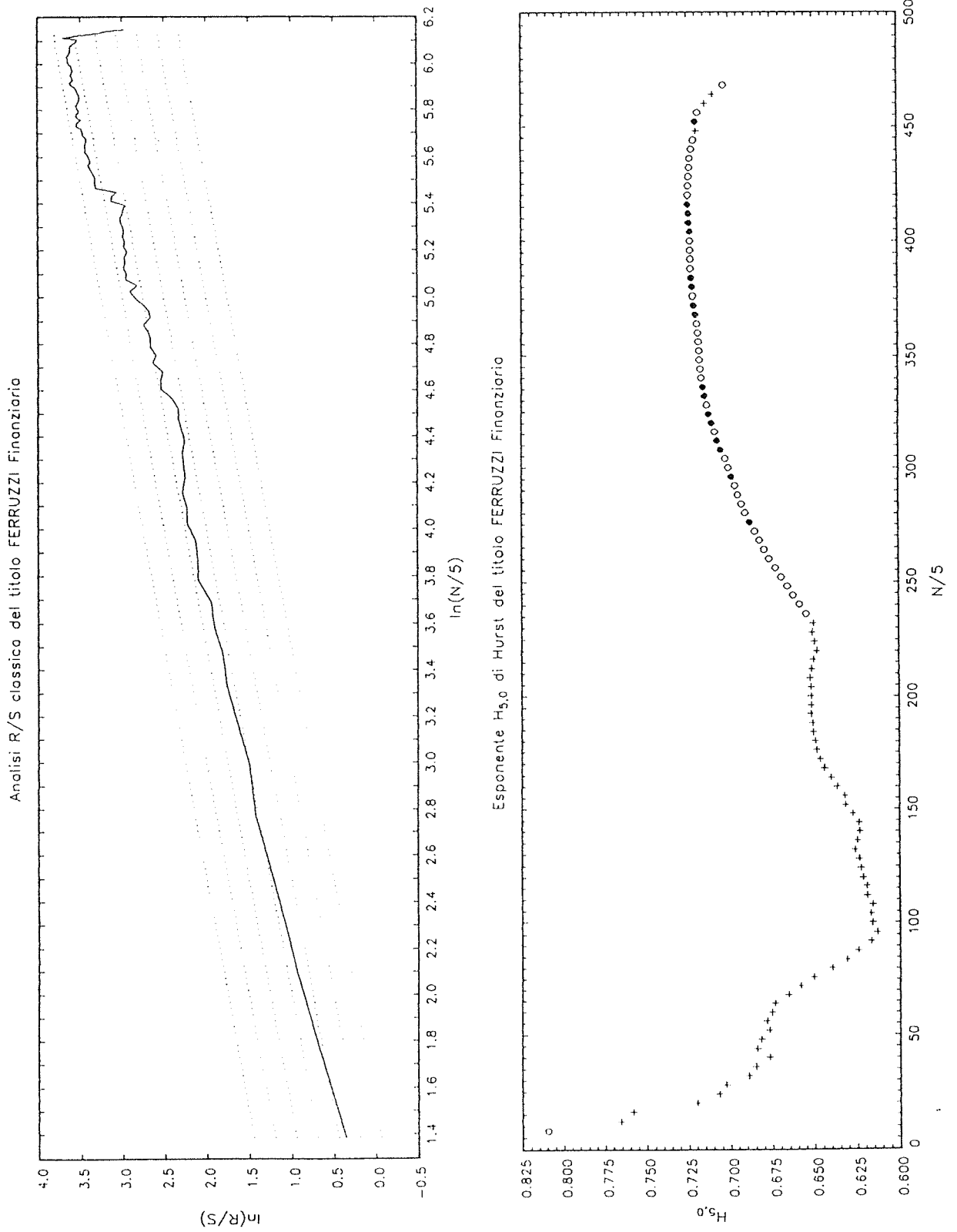


Figura 100

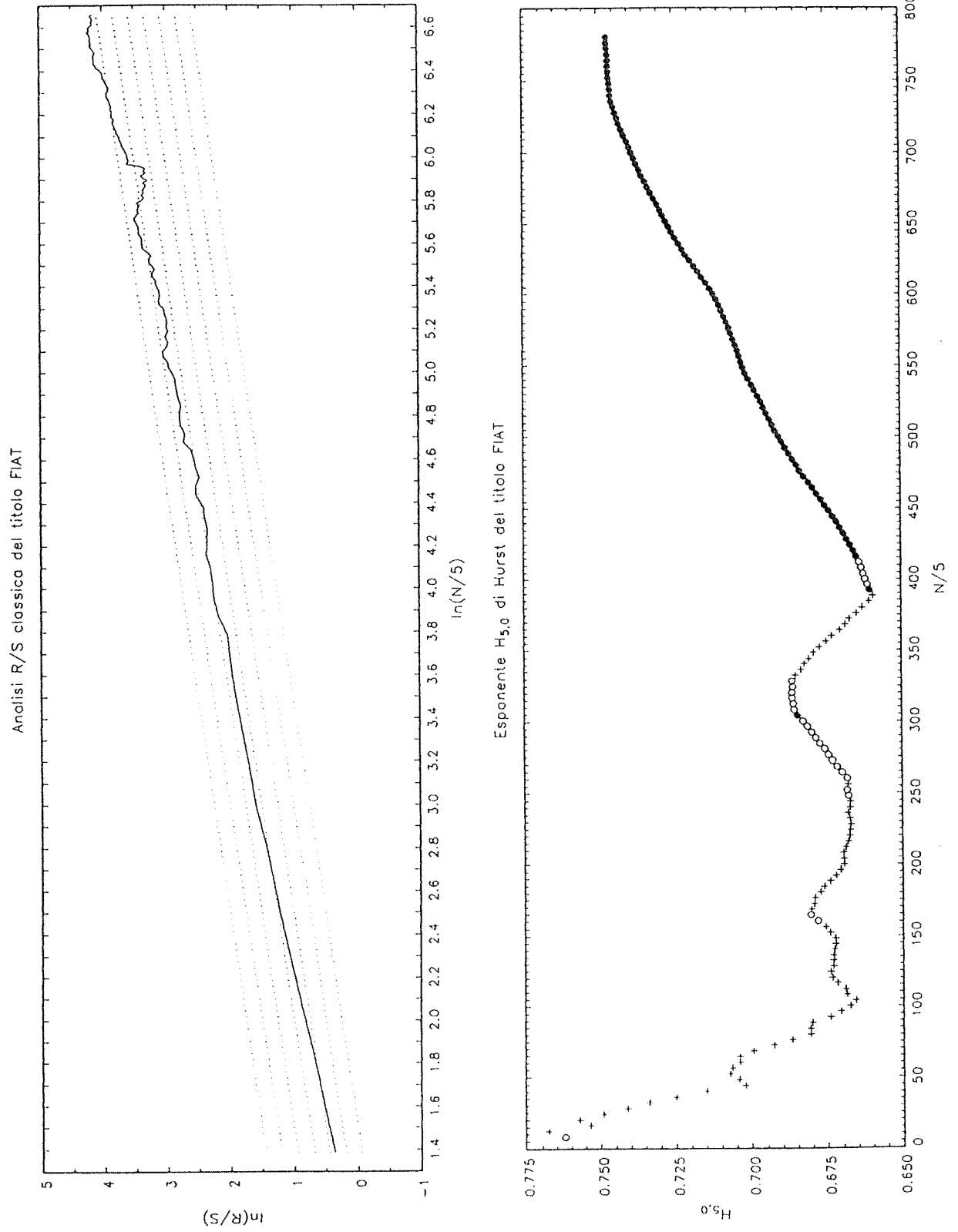


Figura 101

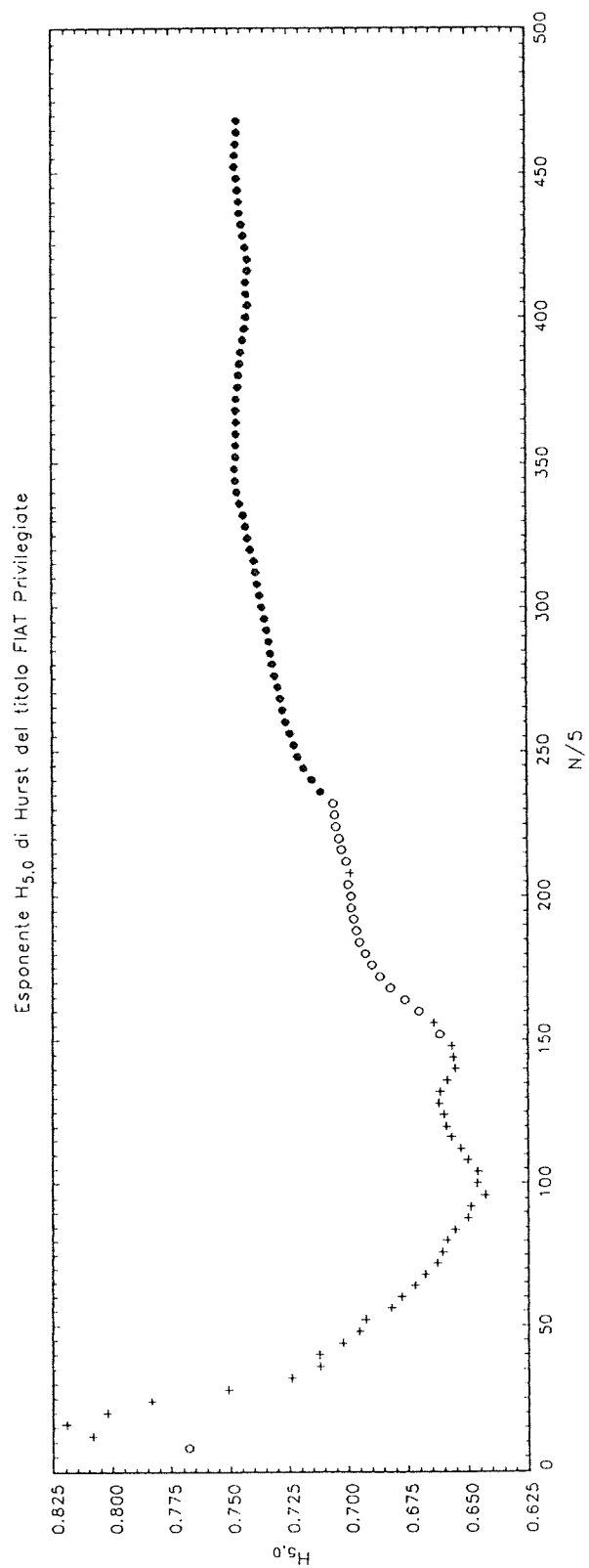
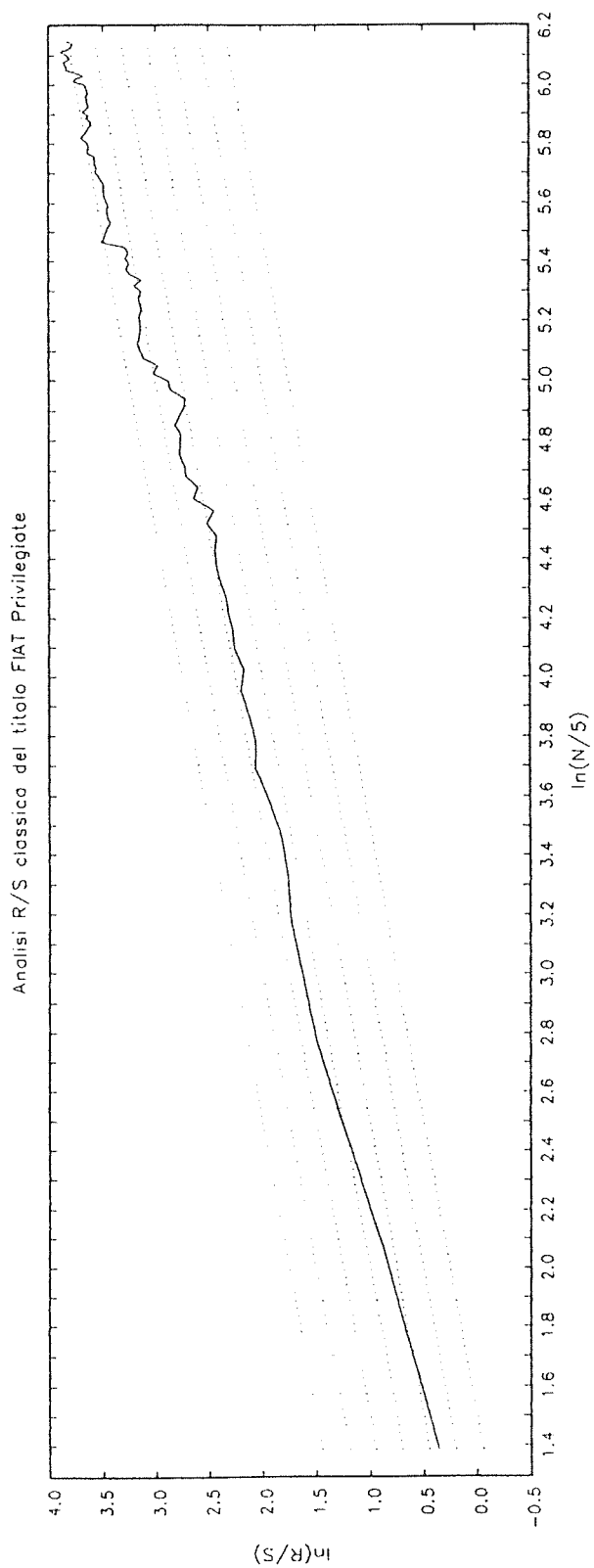


Figura 102

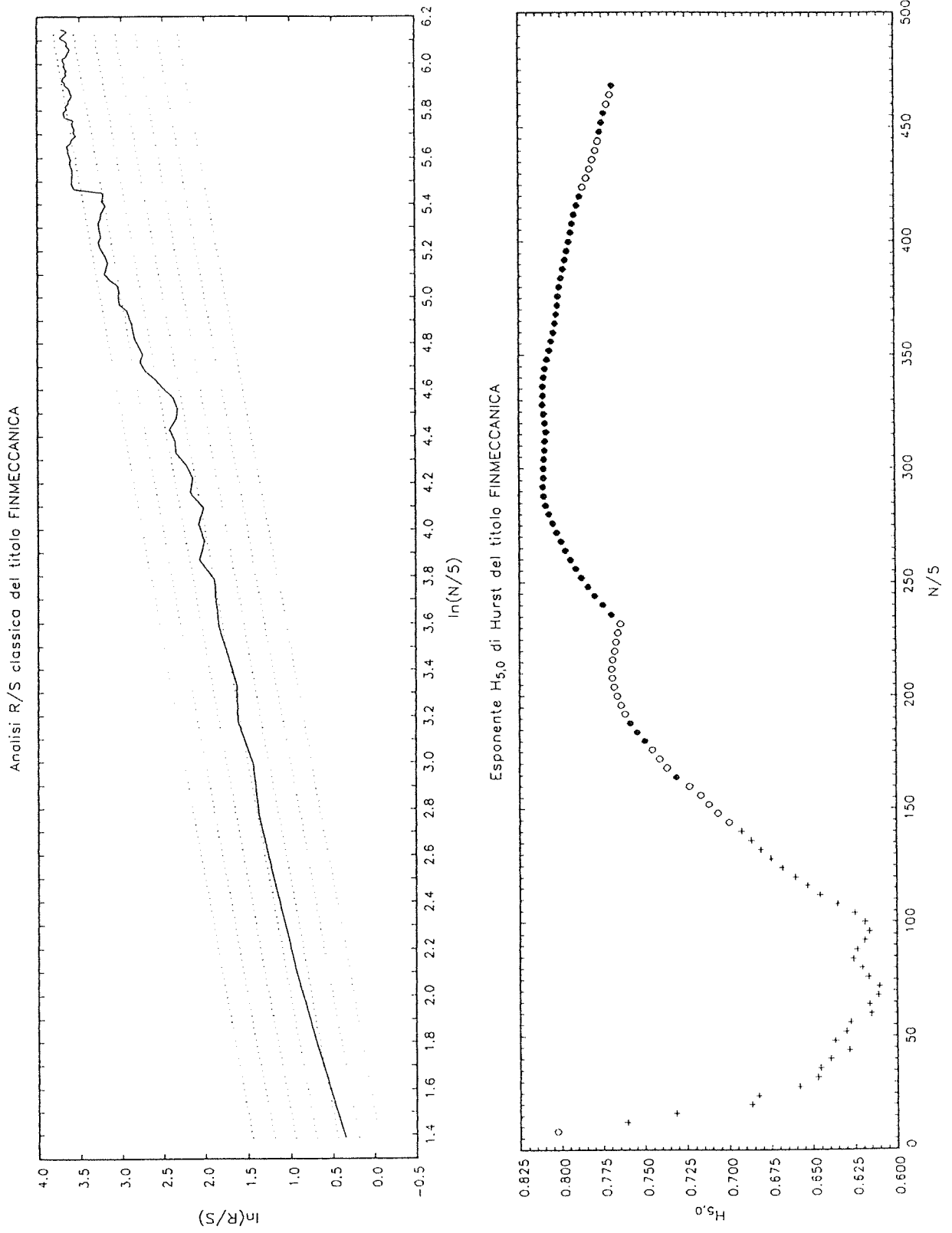


Figura 103

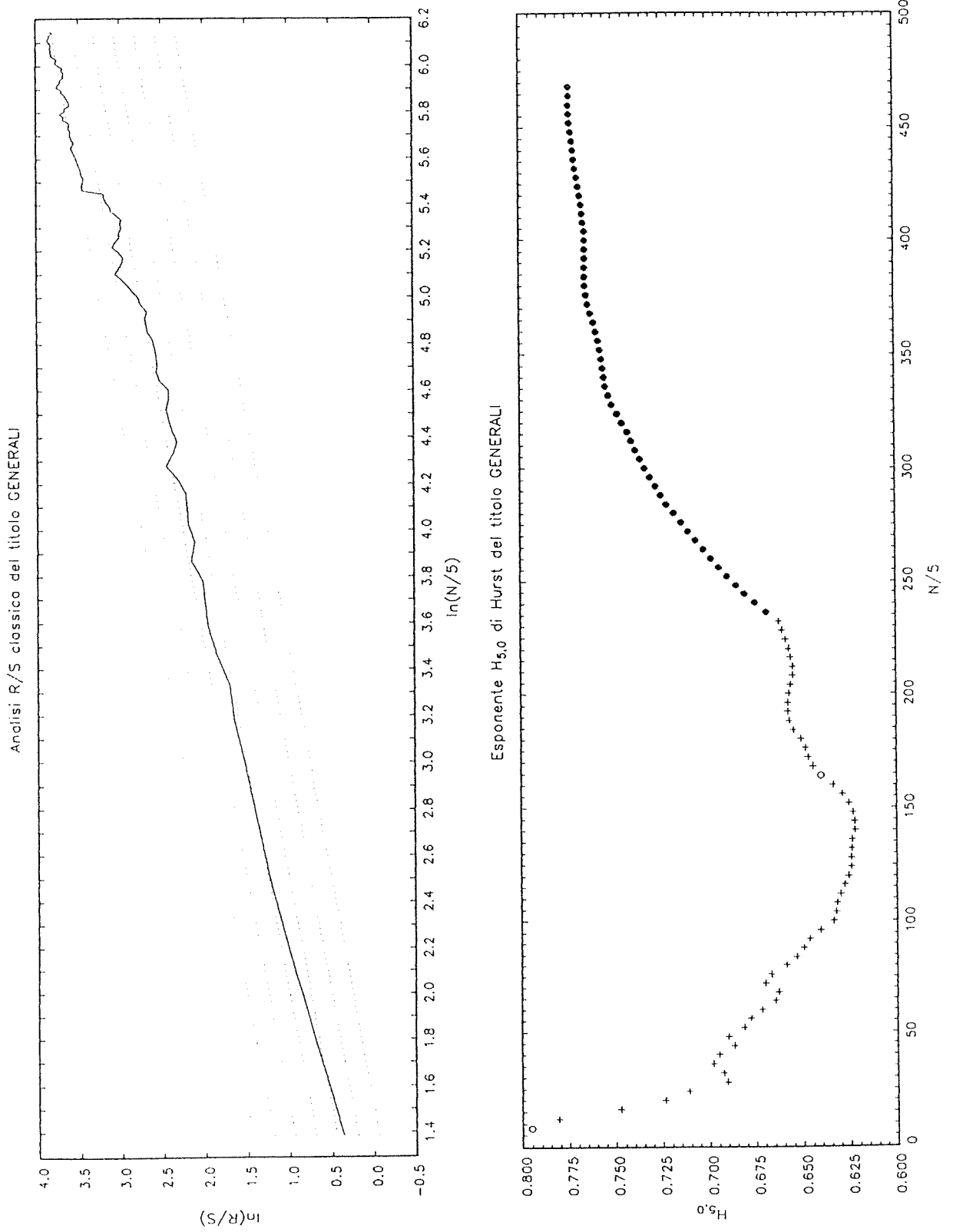




Figura 104

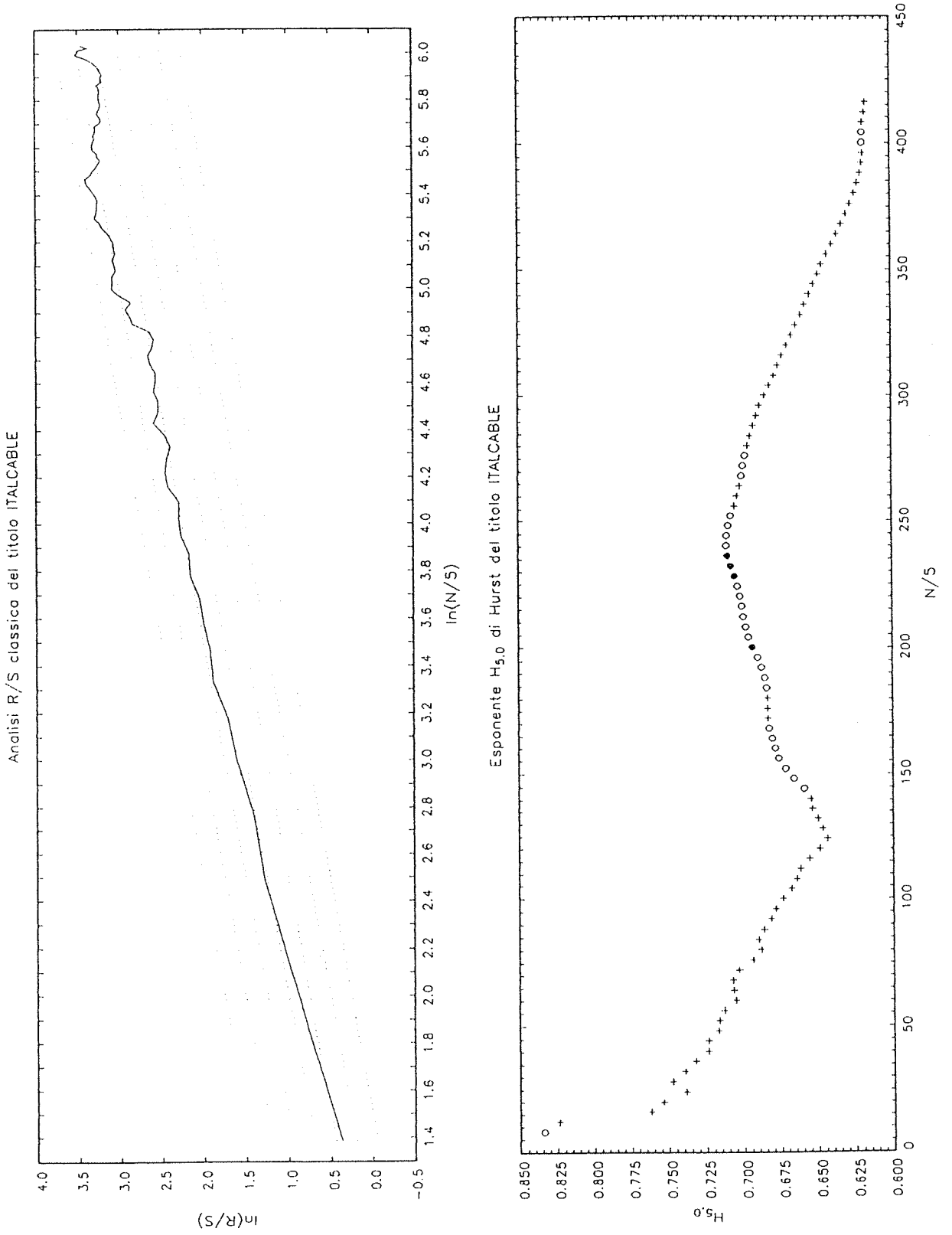


Figura 105

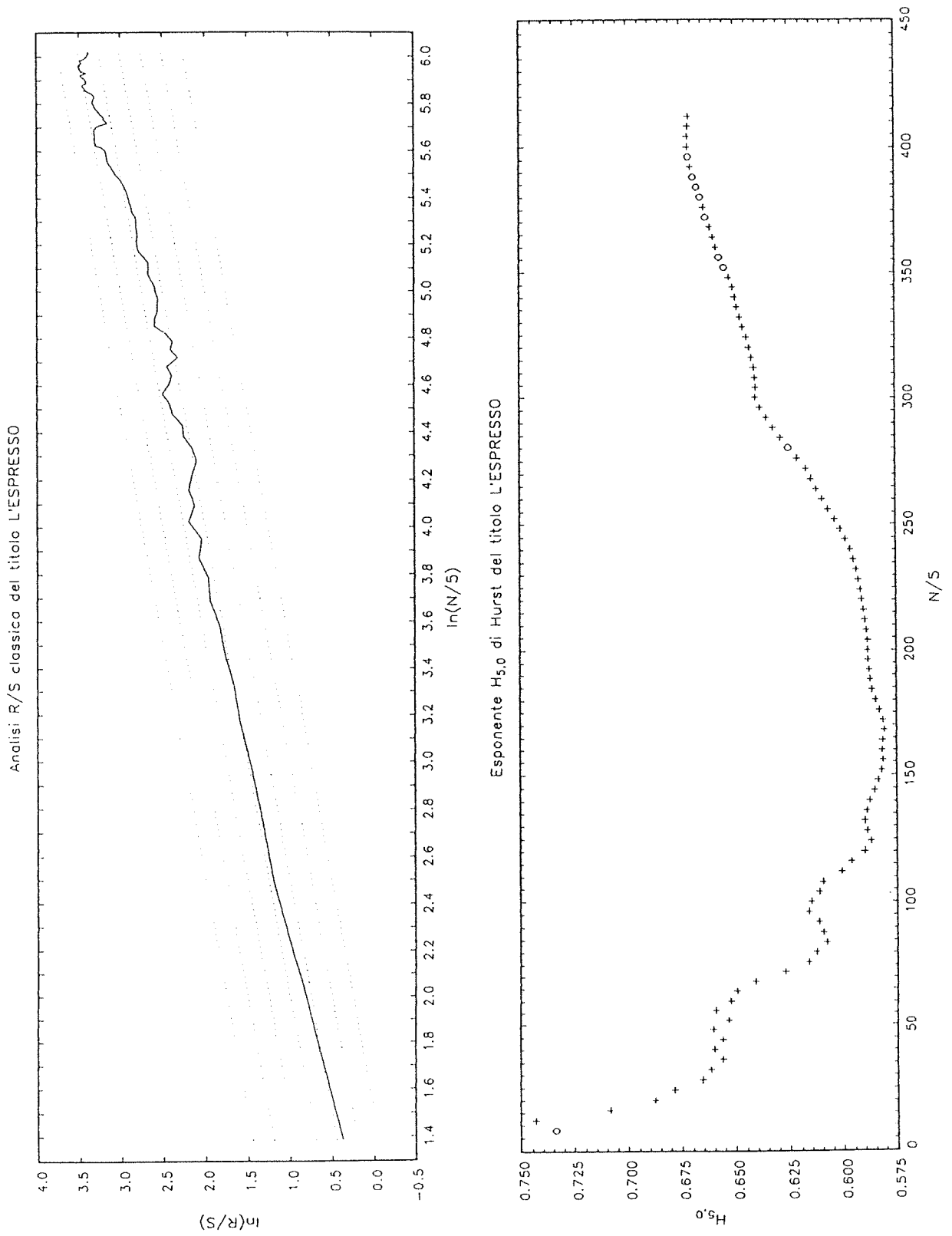


Figura 106

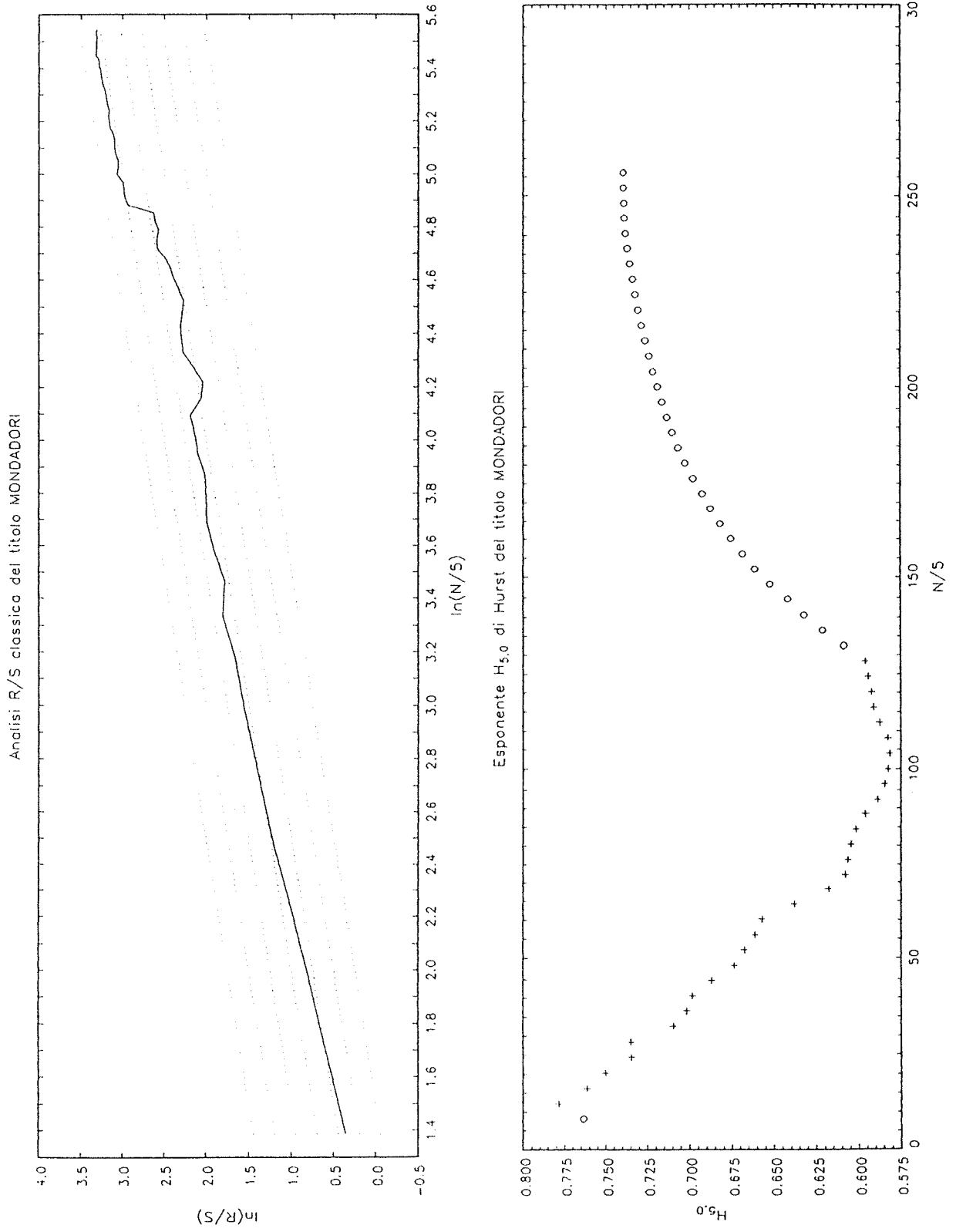


Figura 107

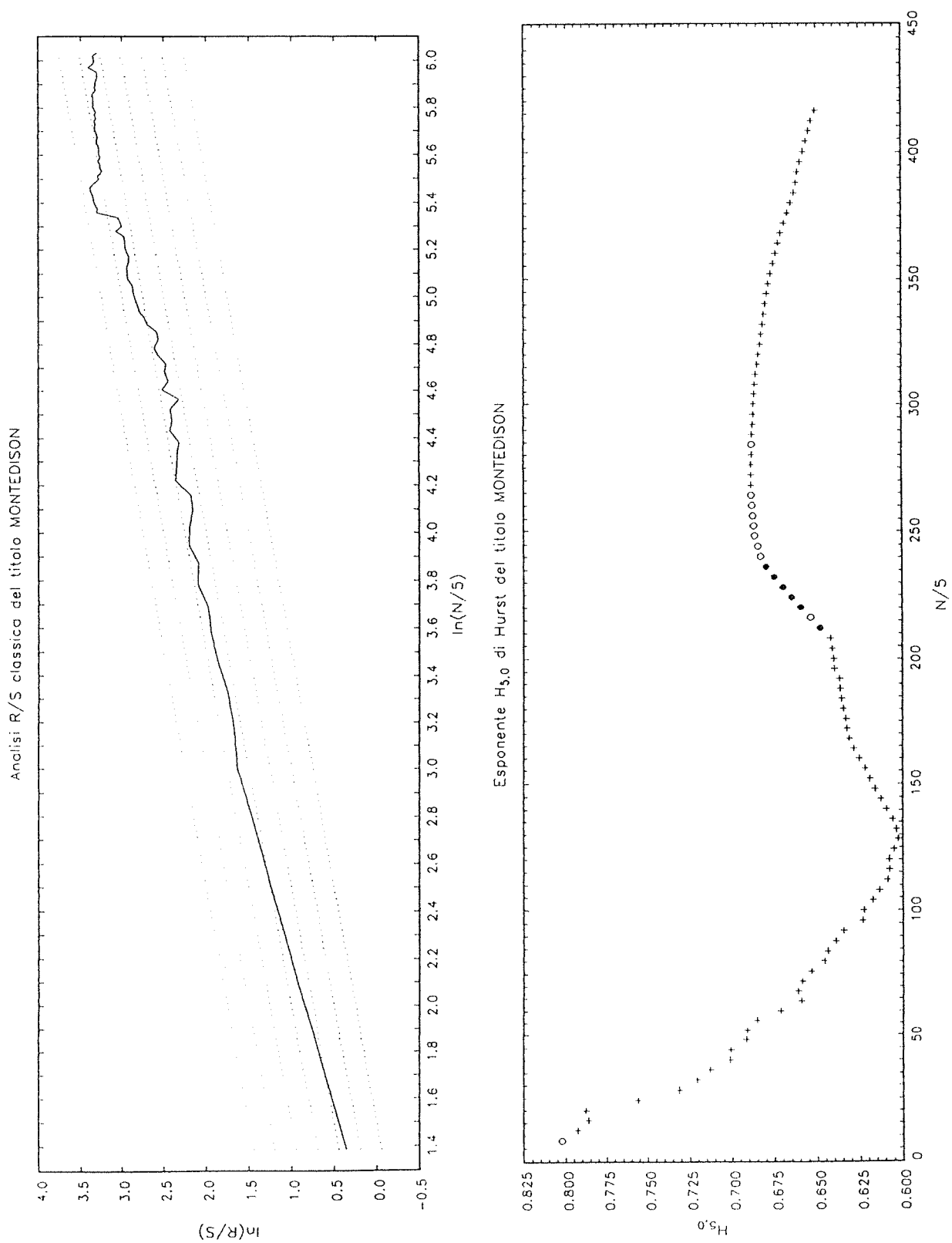


Figura 108

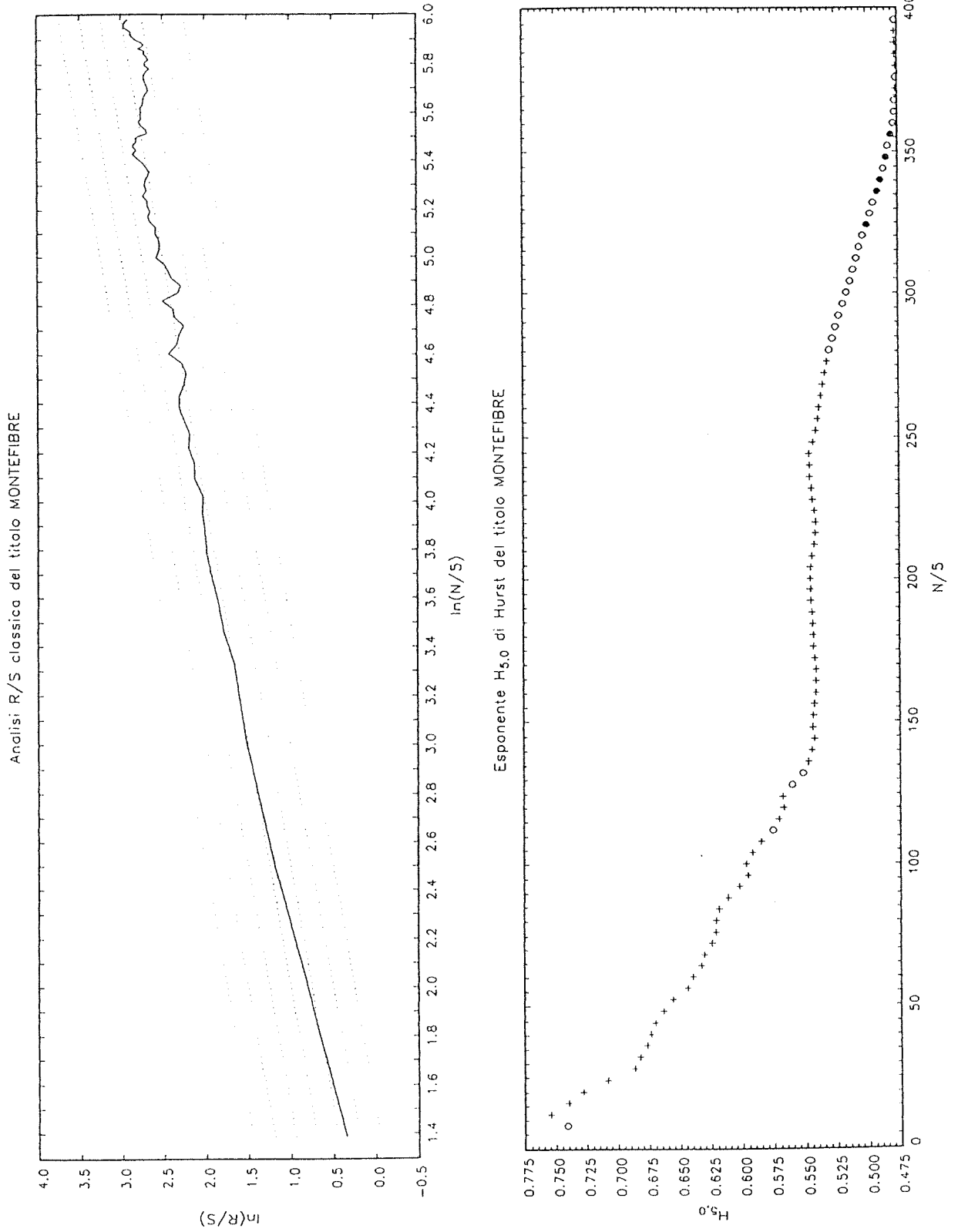


Figura 109

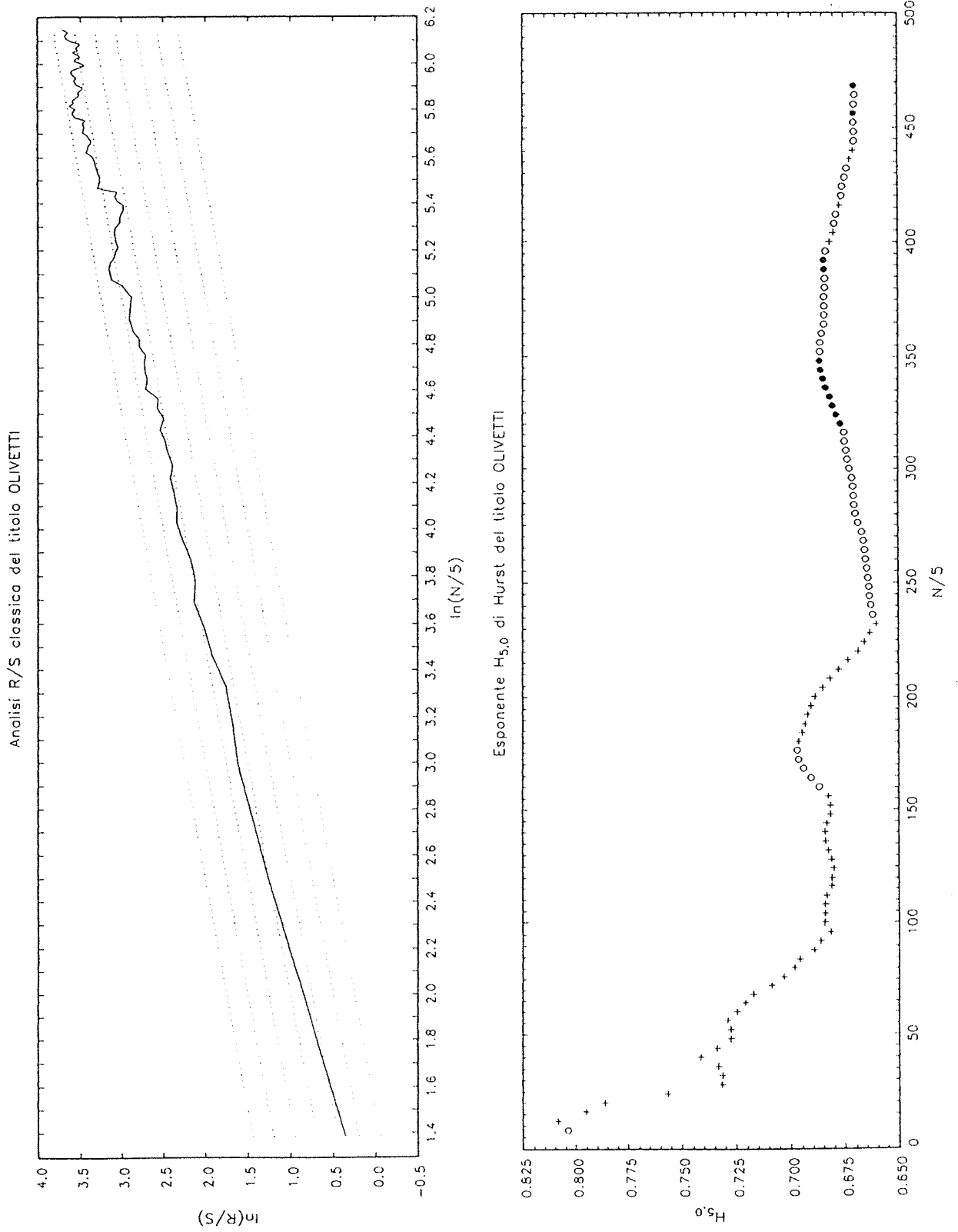


Figura 110

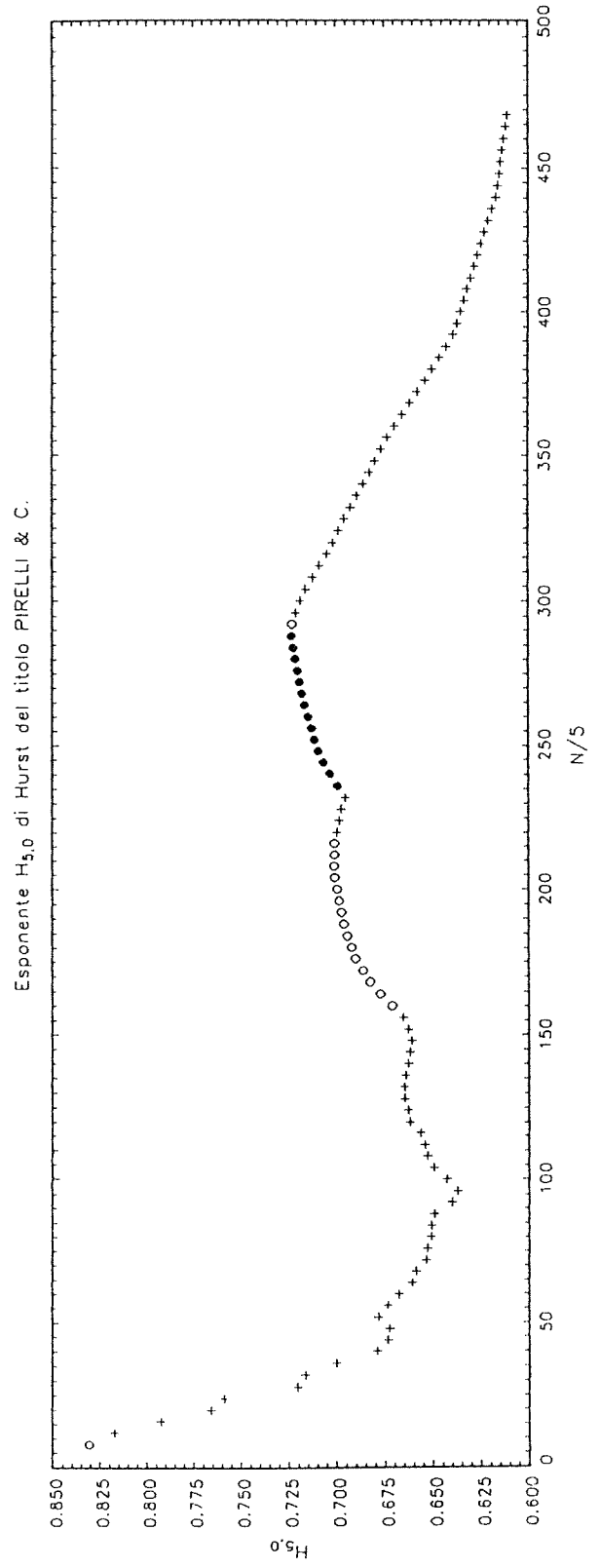
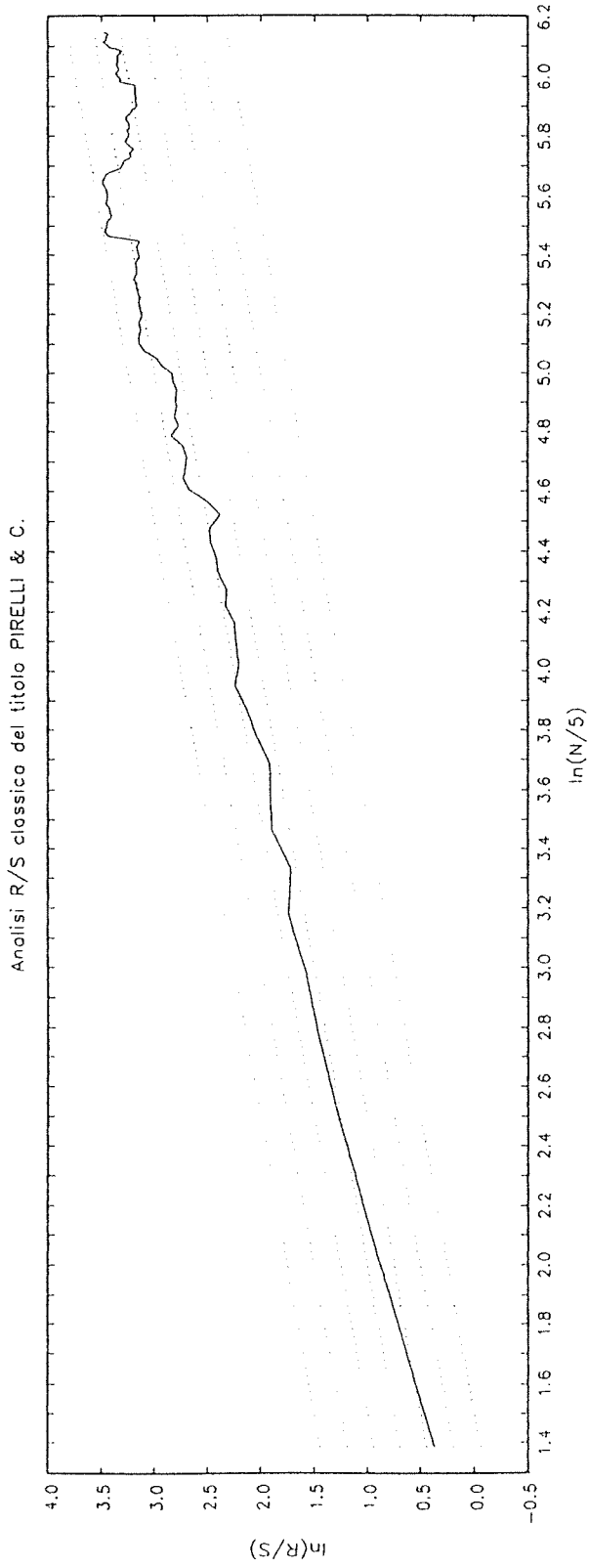


Figura 111

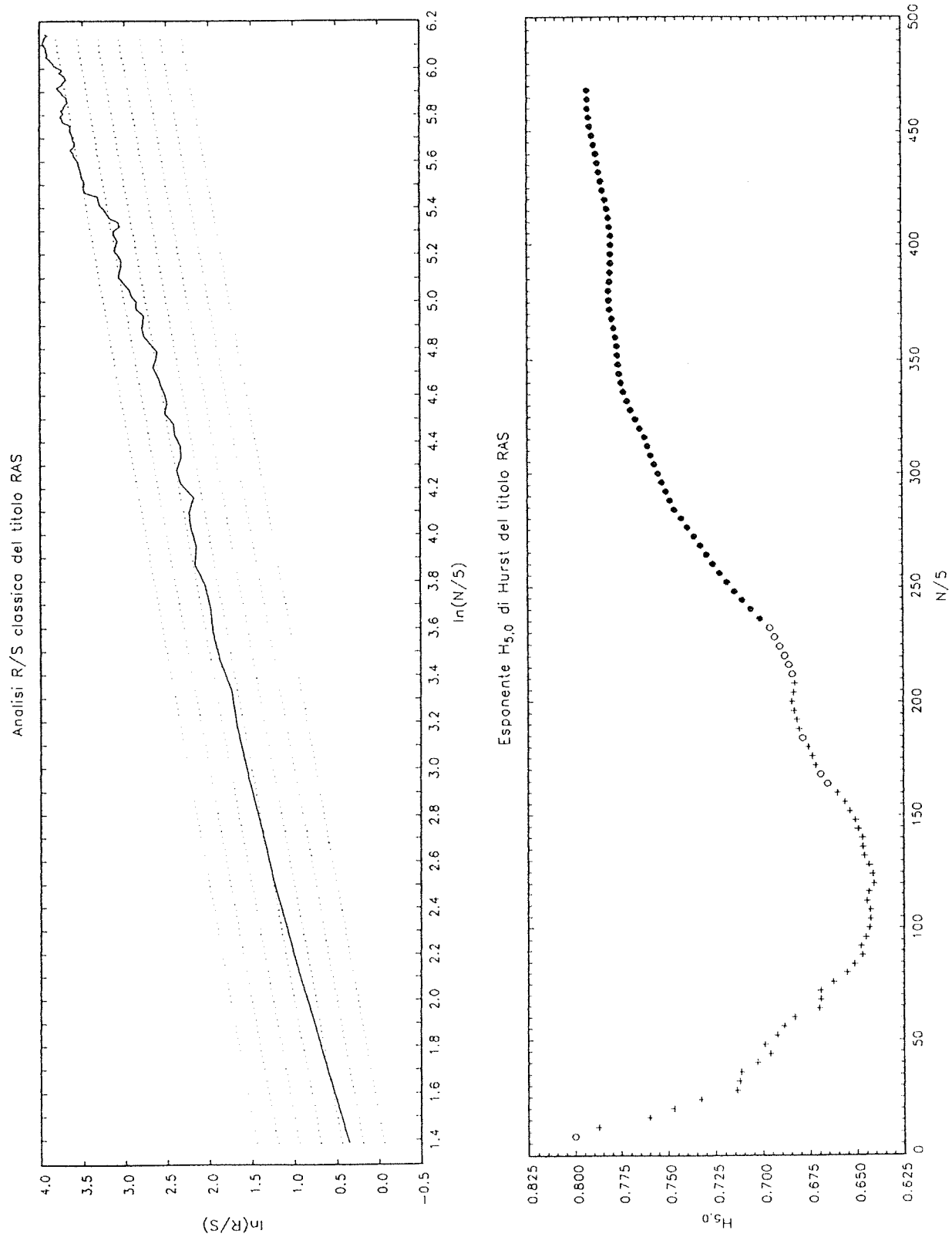




Figura 112

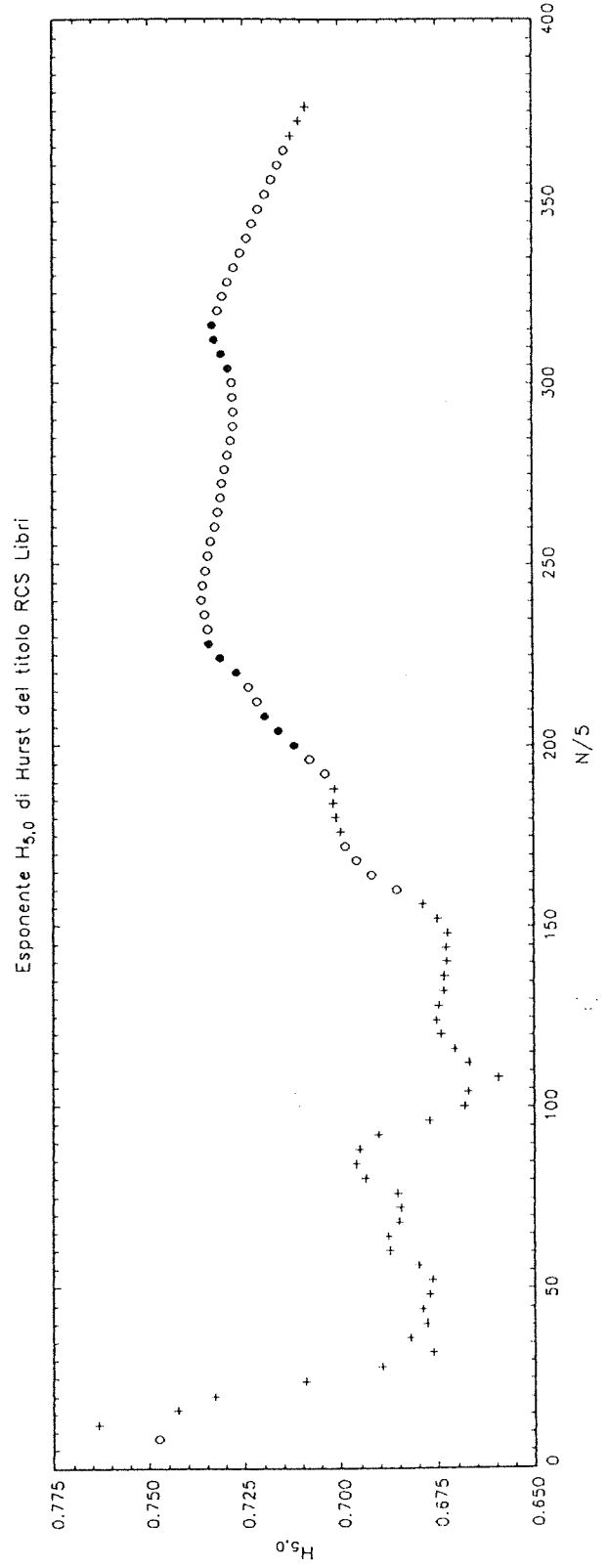
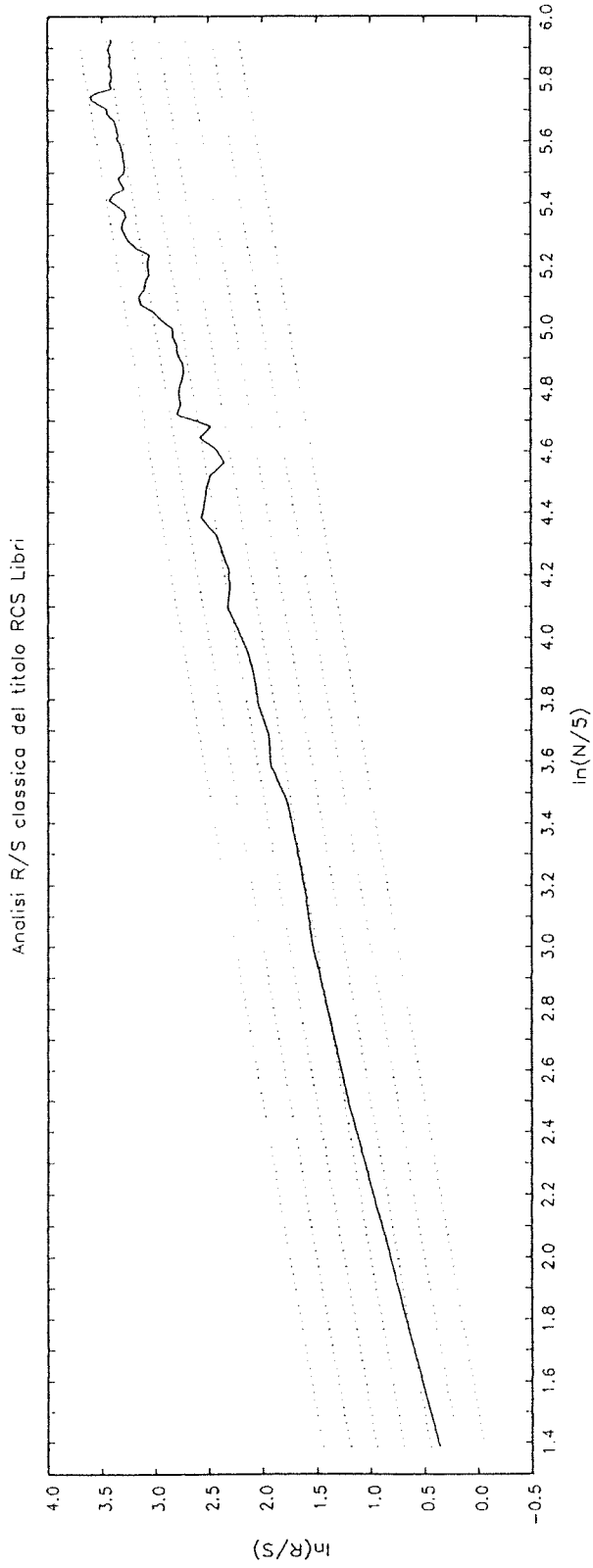


Figura 113

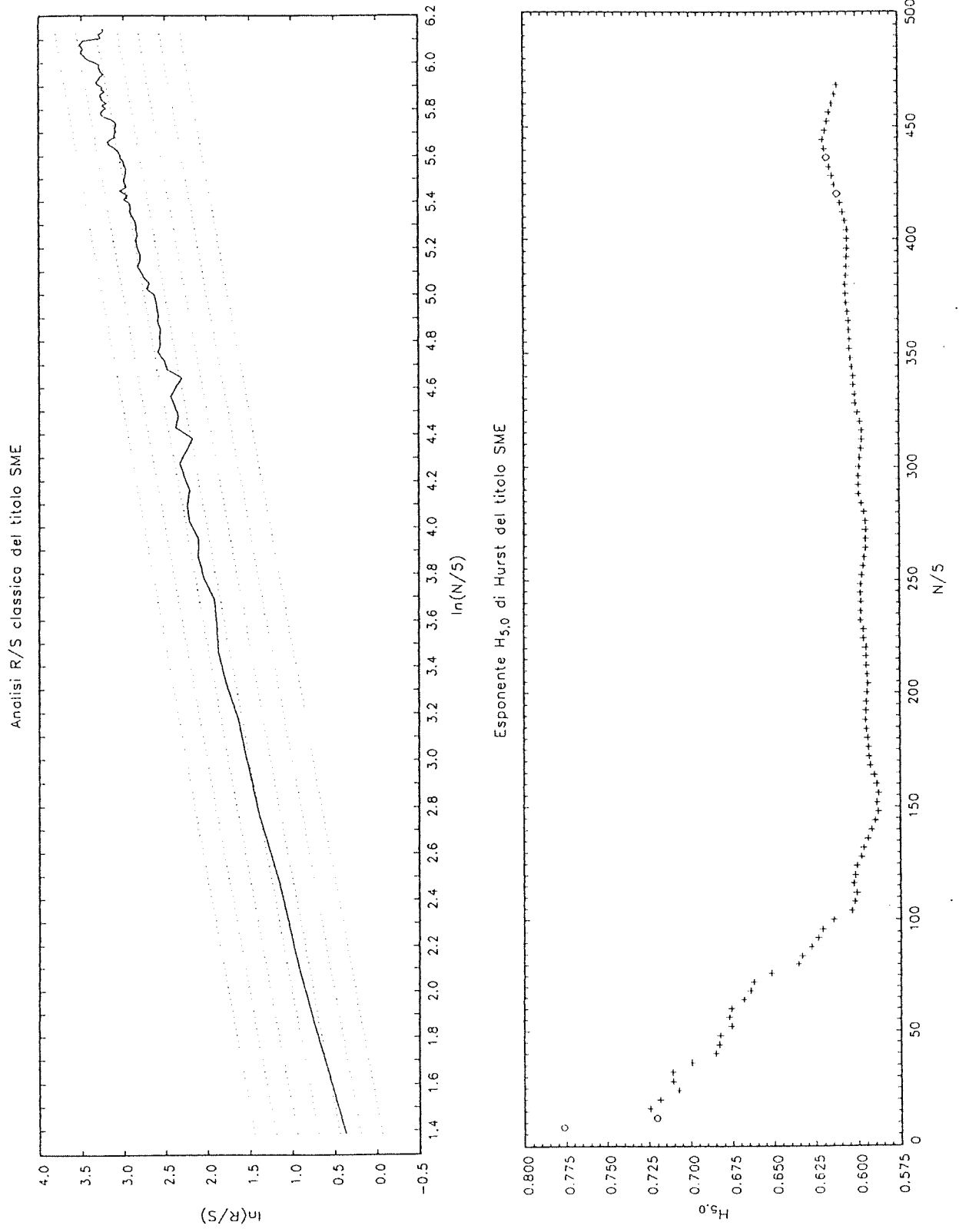


Figura 114

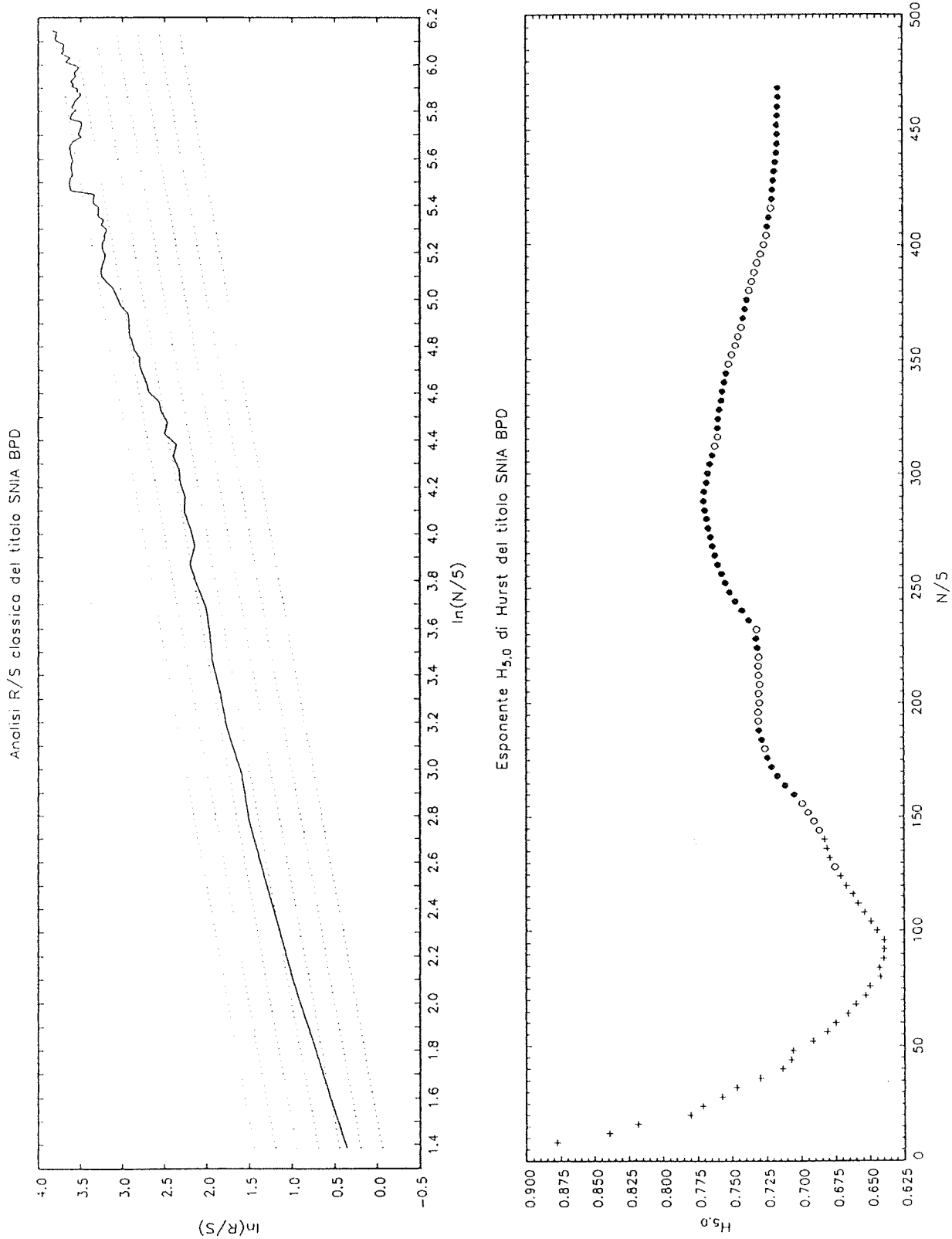


Figura 115

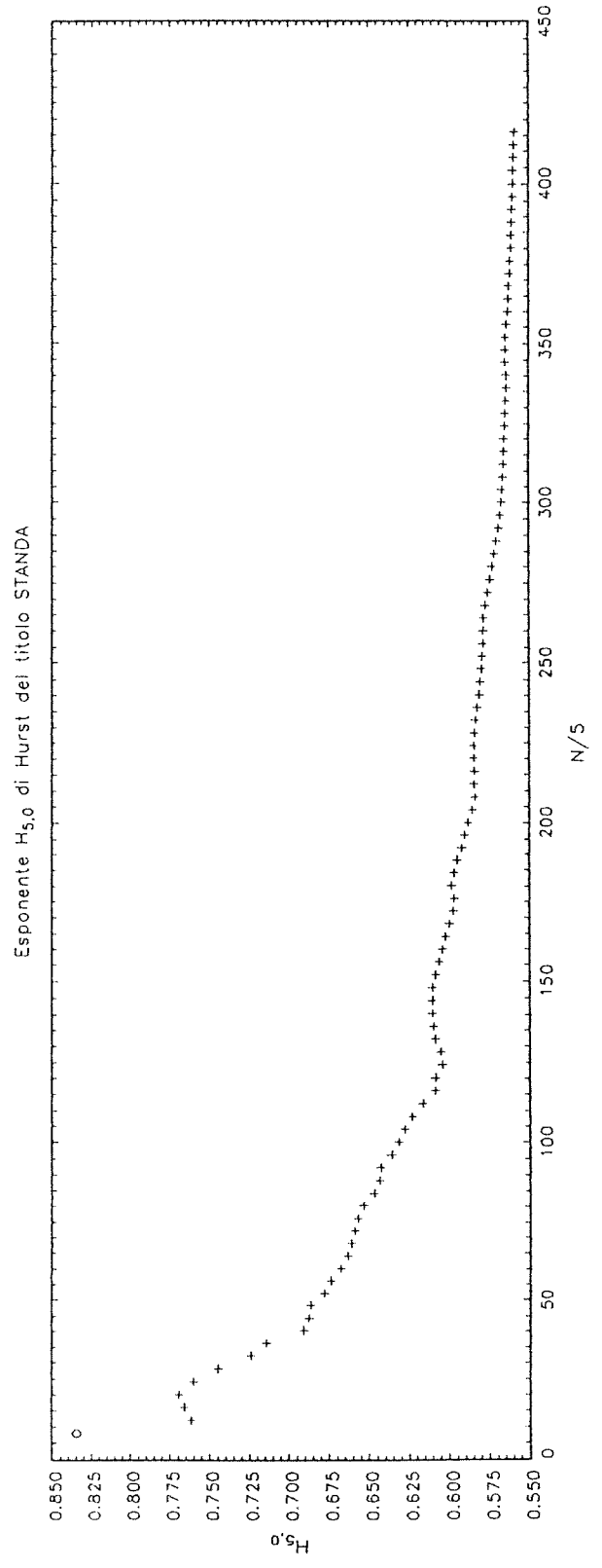
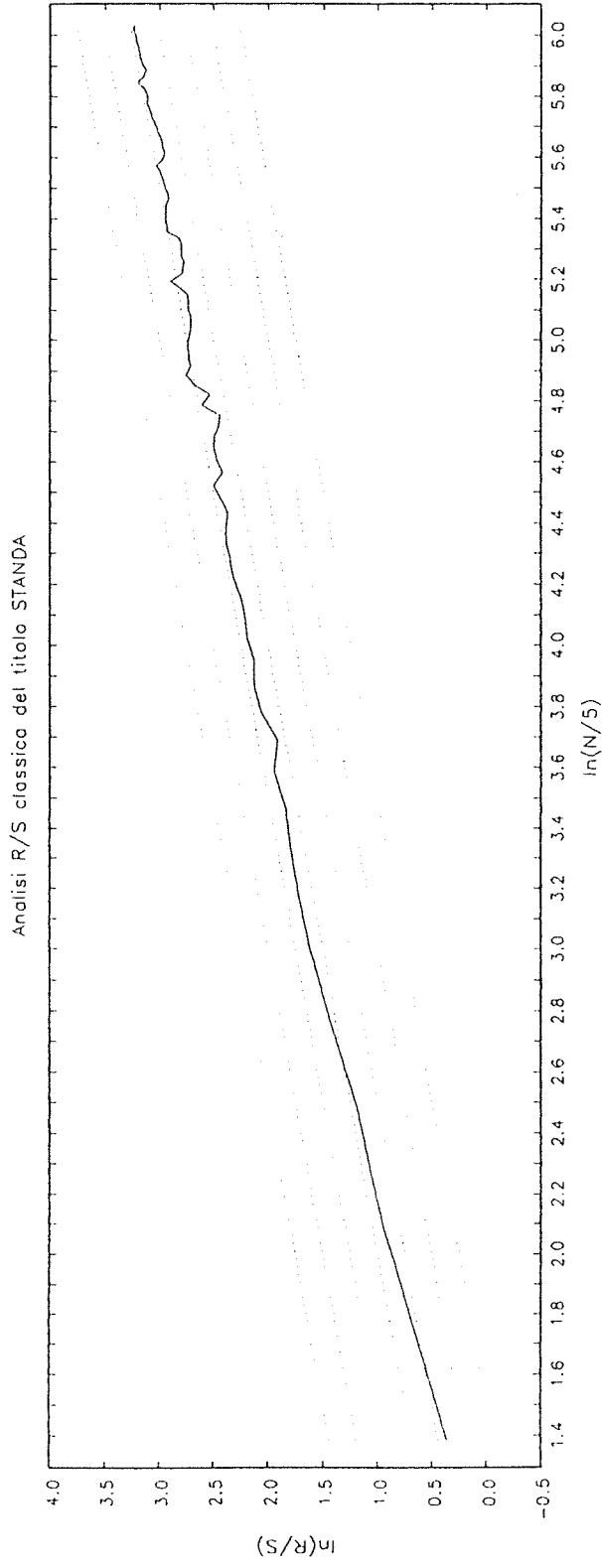


Figura 116

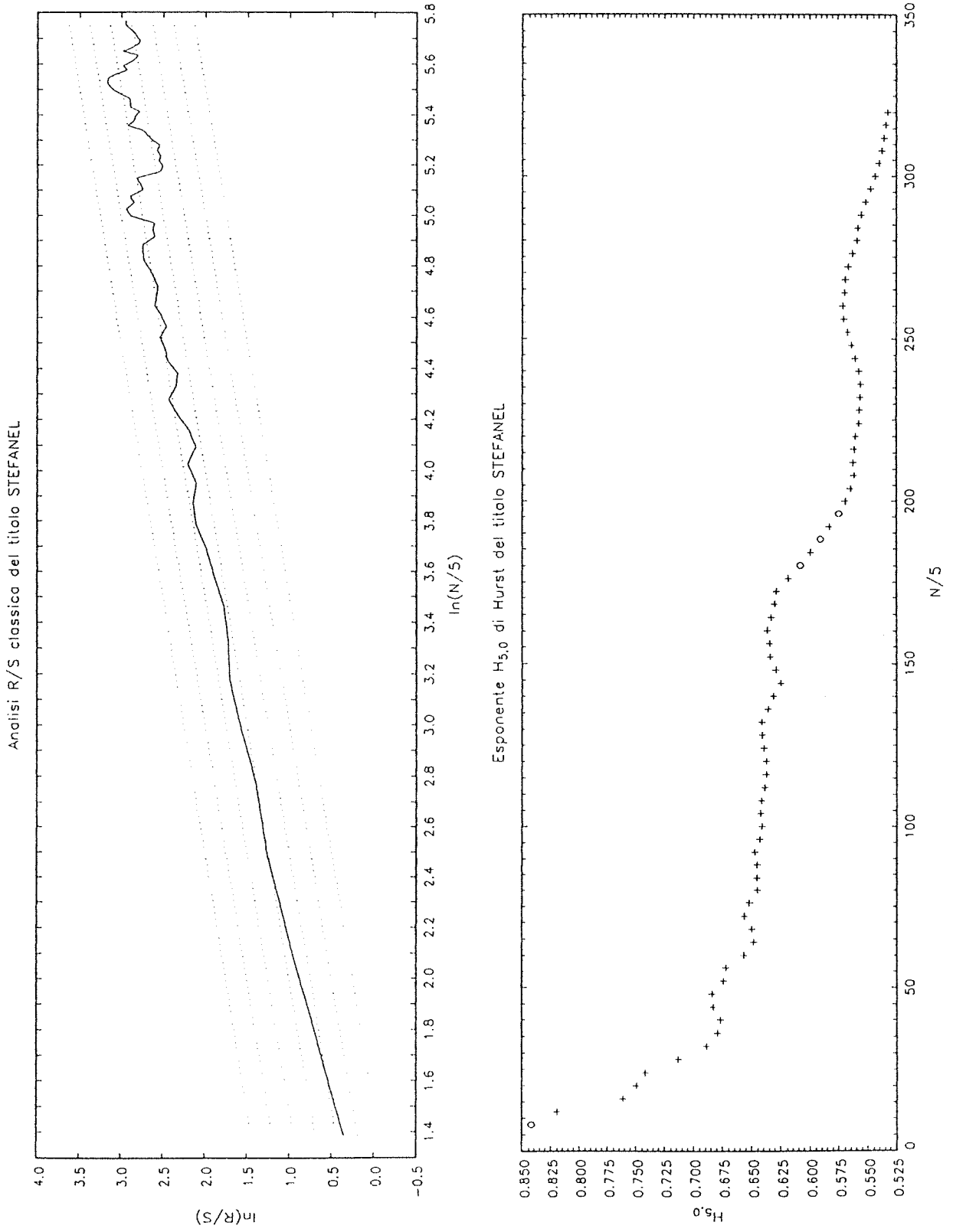


Figura 117

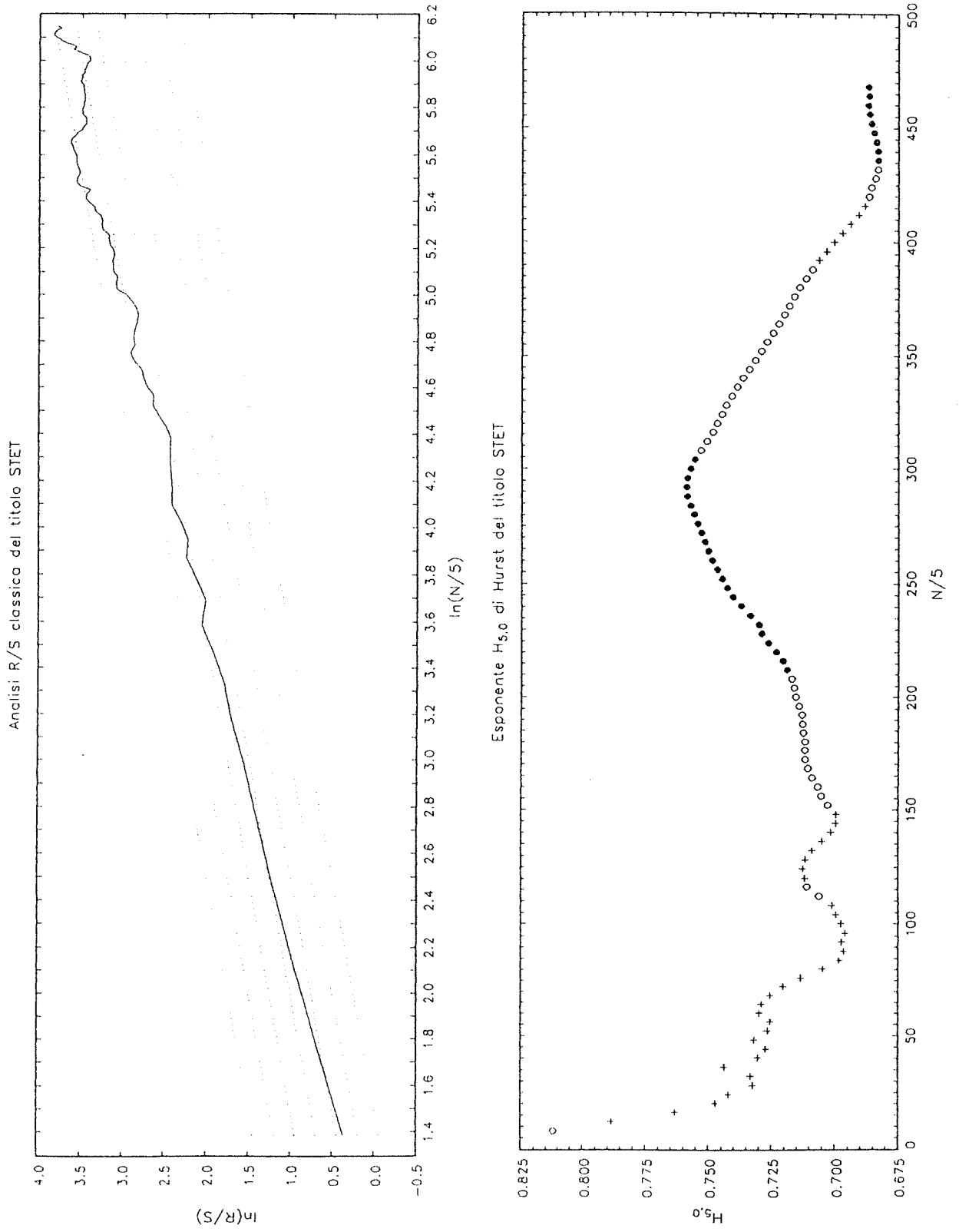


Figura 118

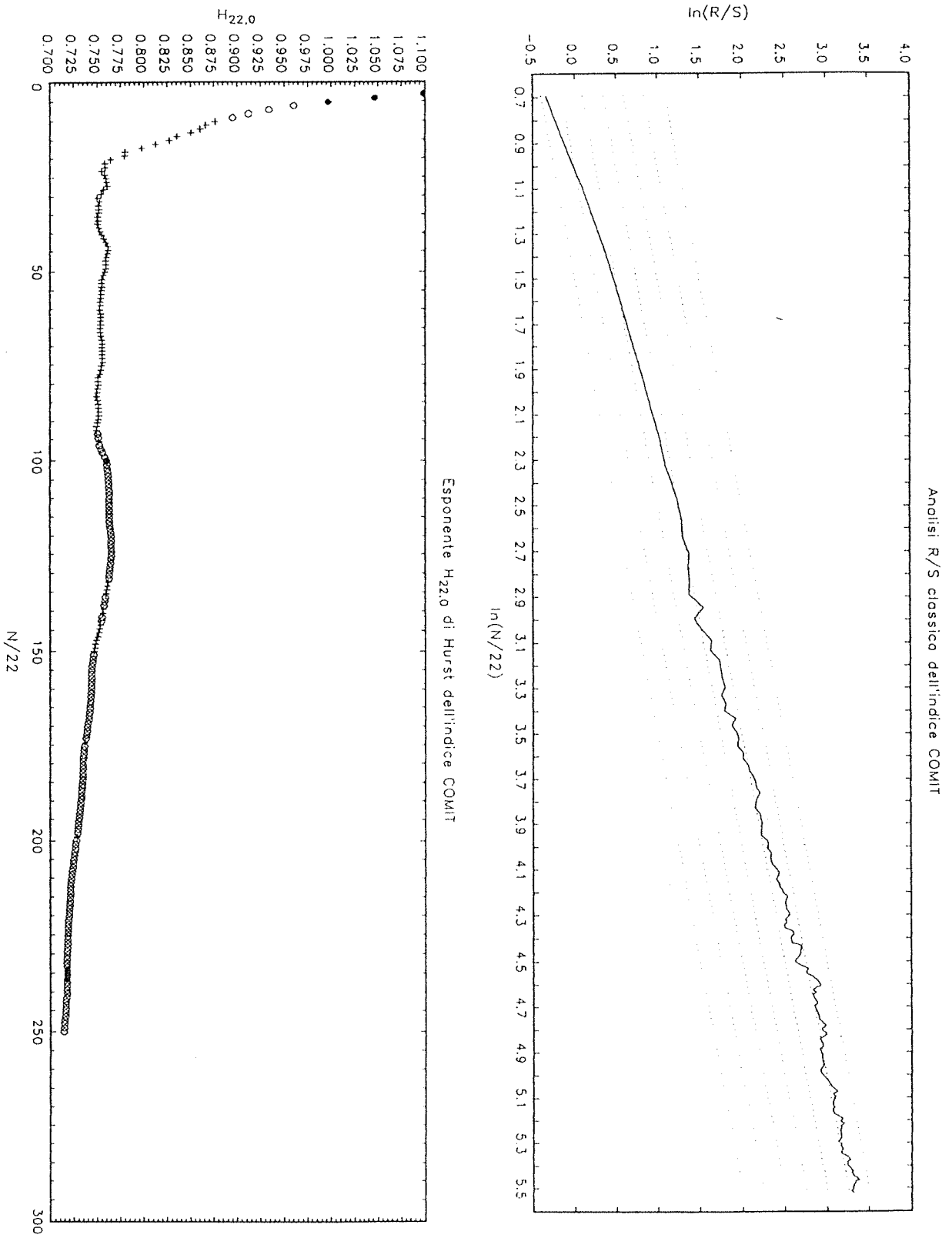


Figura 119

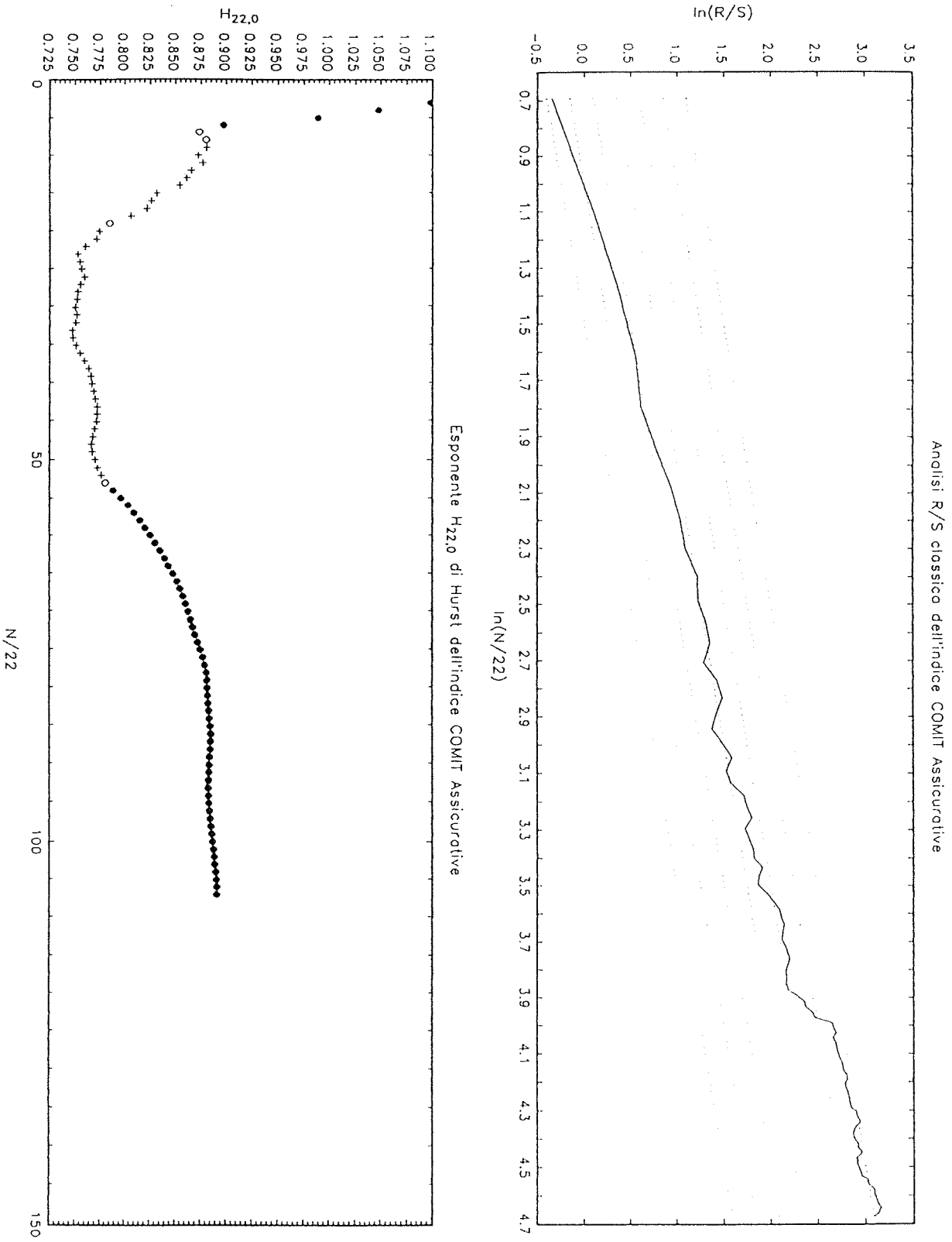




Figura 120

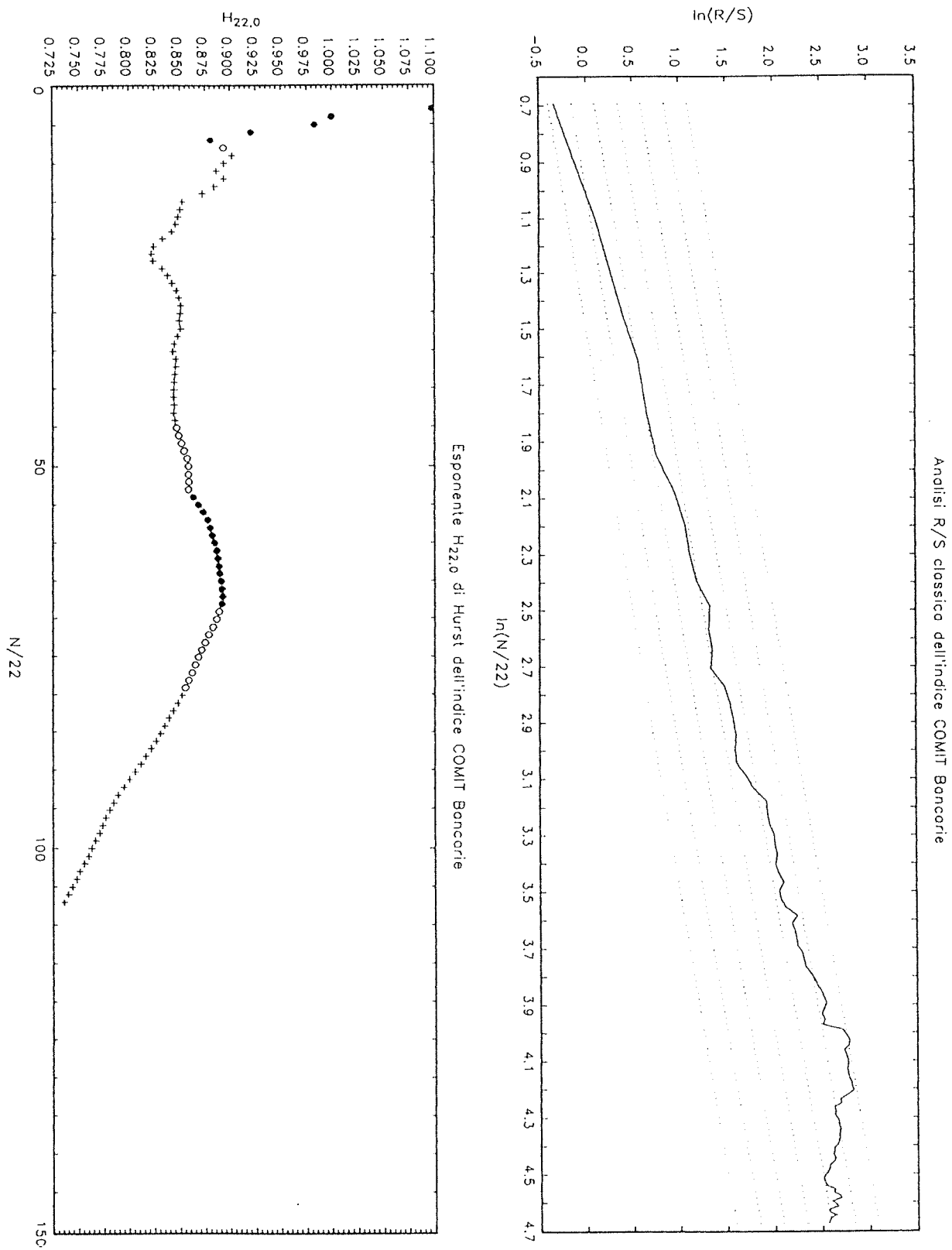


Figura 121

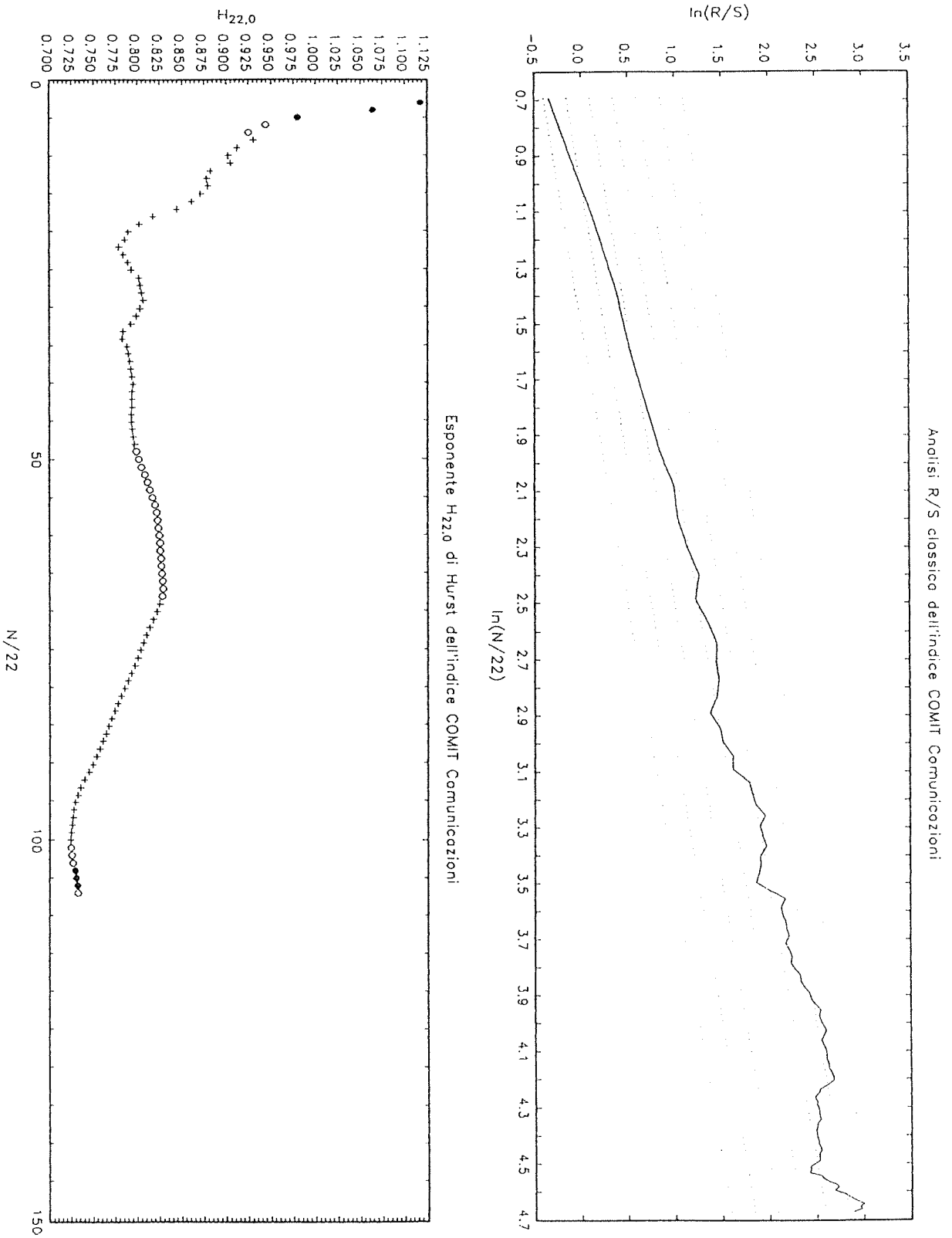


Figura 122

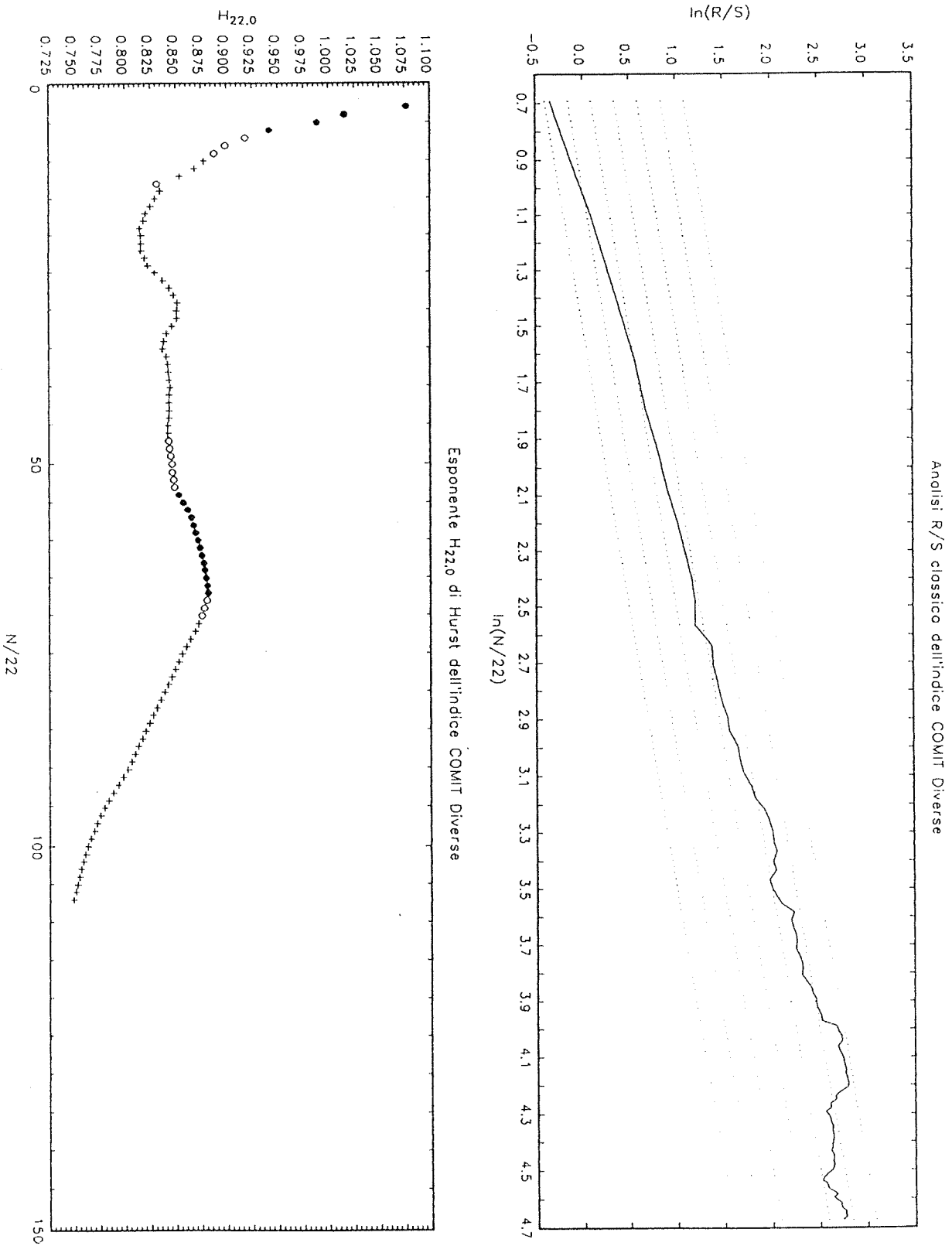


Figura 123

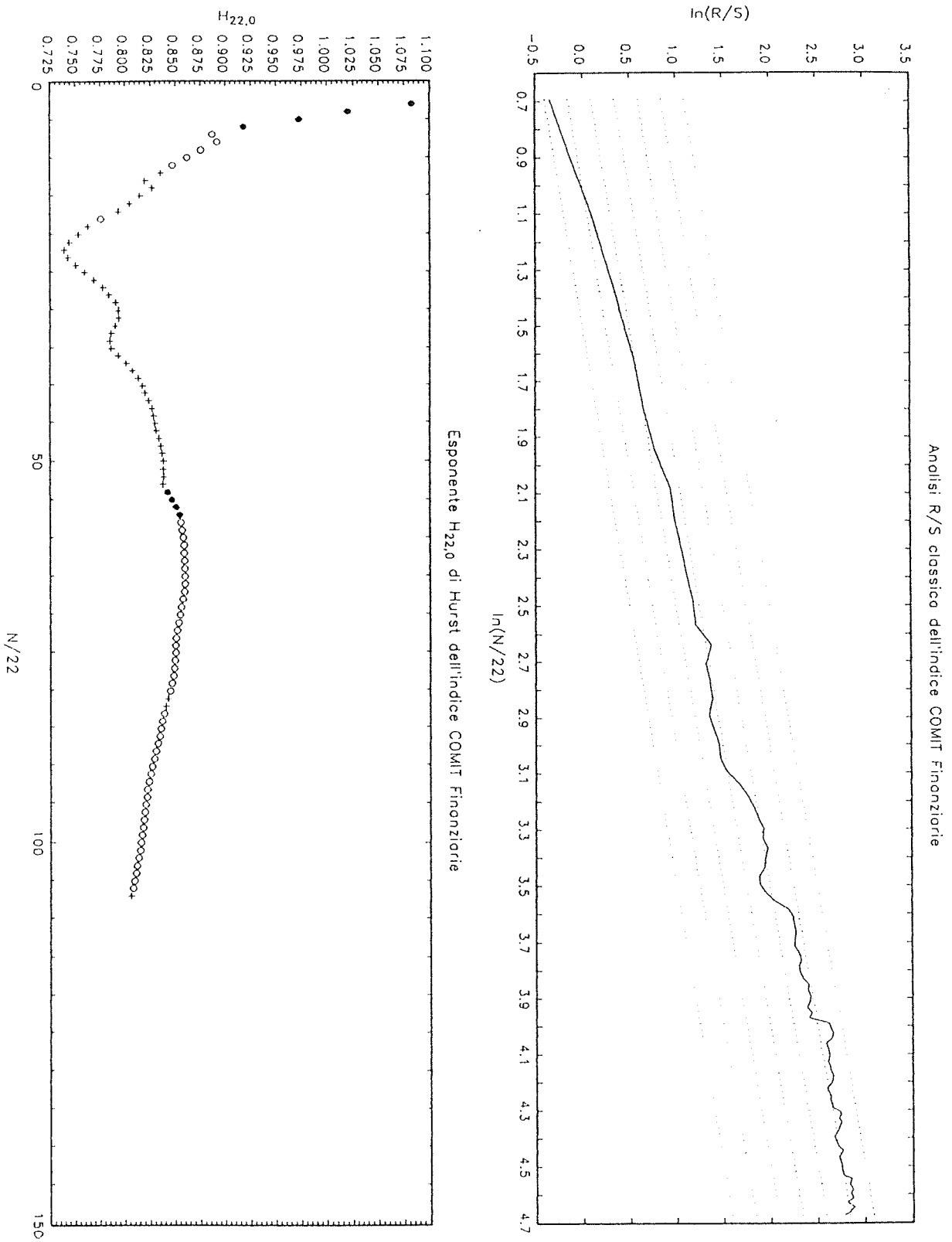


Figura 124

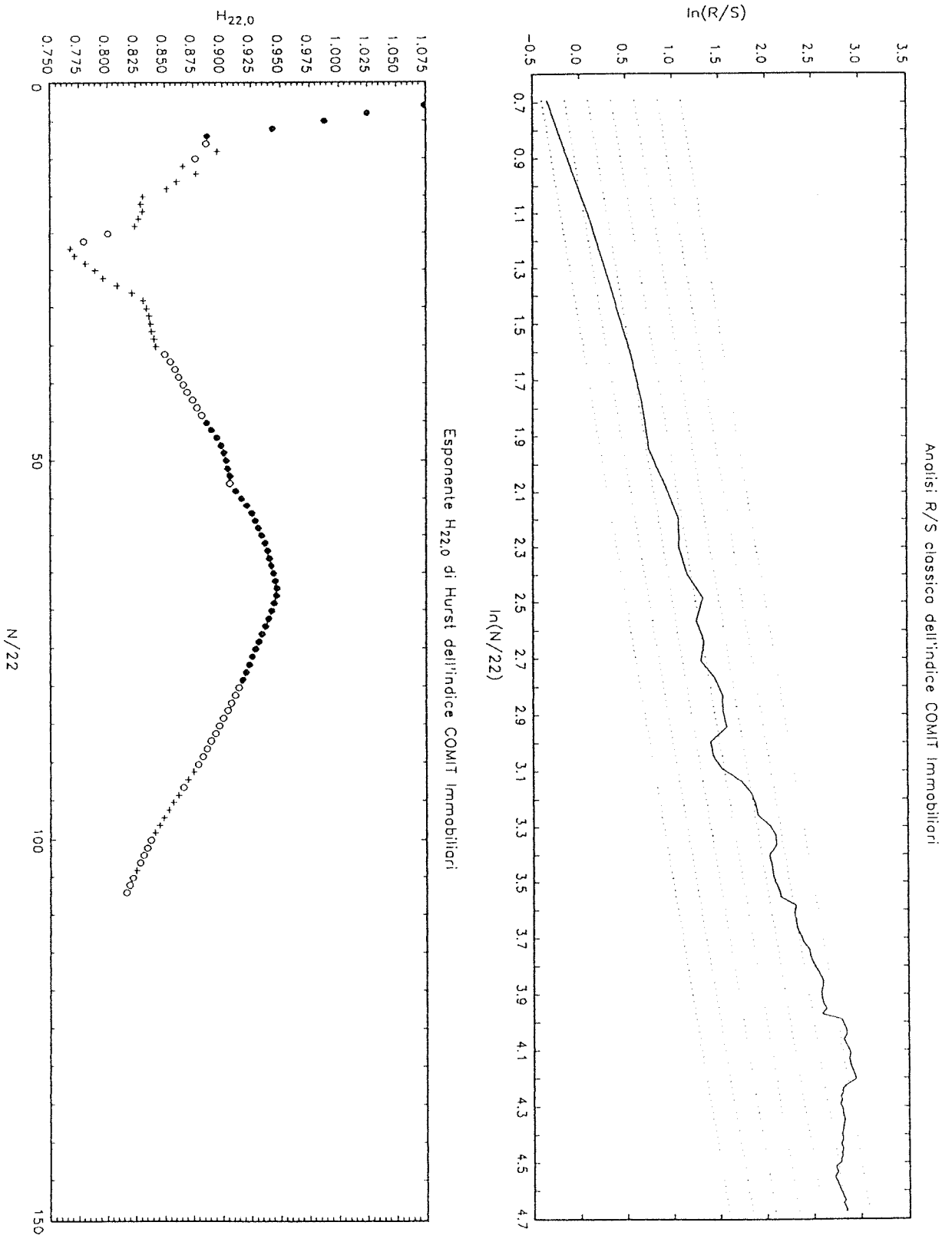
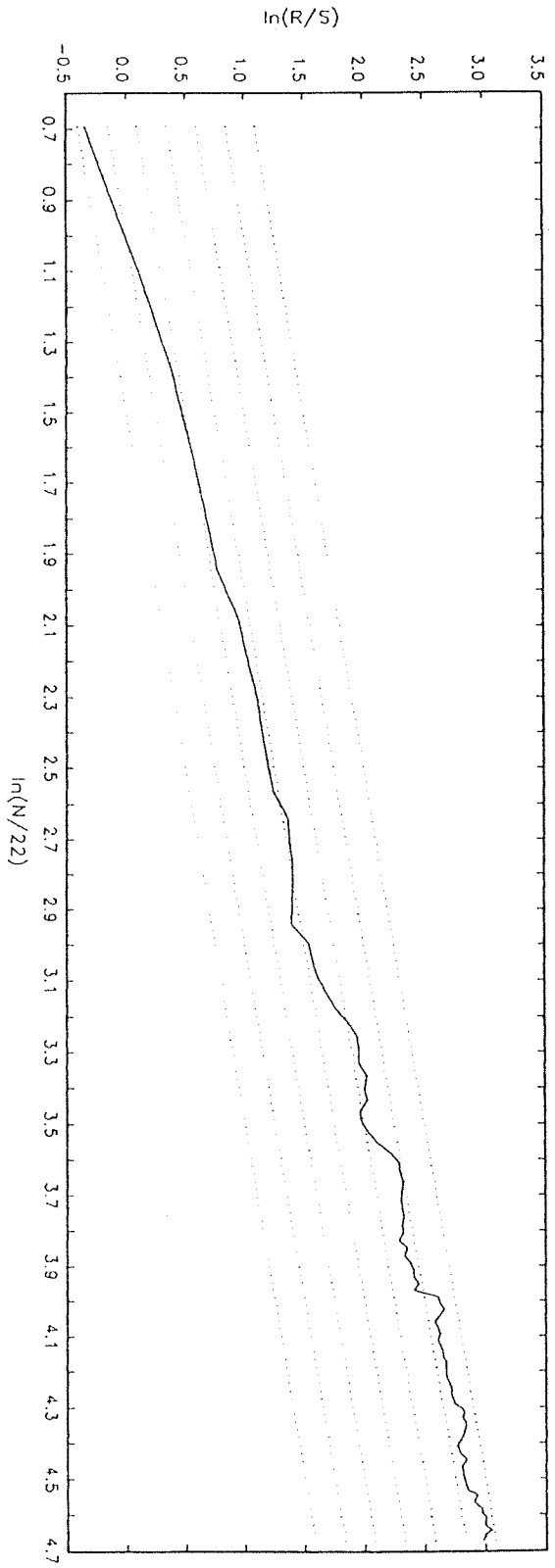


Figura 125

Analisi R/S classico dell'indice COMIT Industriali



Esponente  $H_{22,0}$  di Hurst dell'indice COMIT Industriali

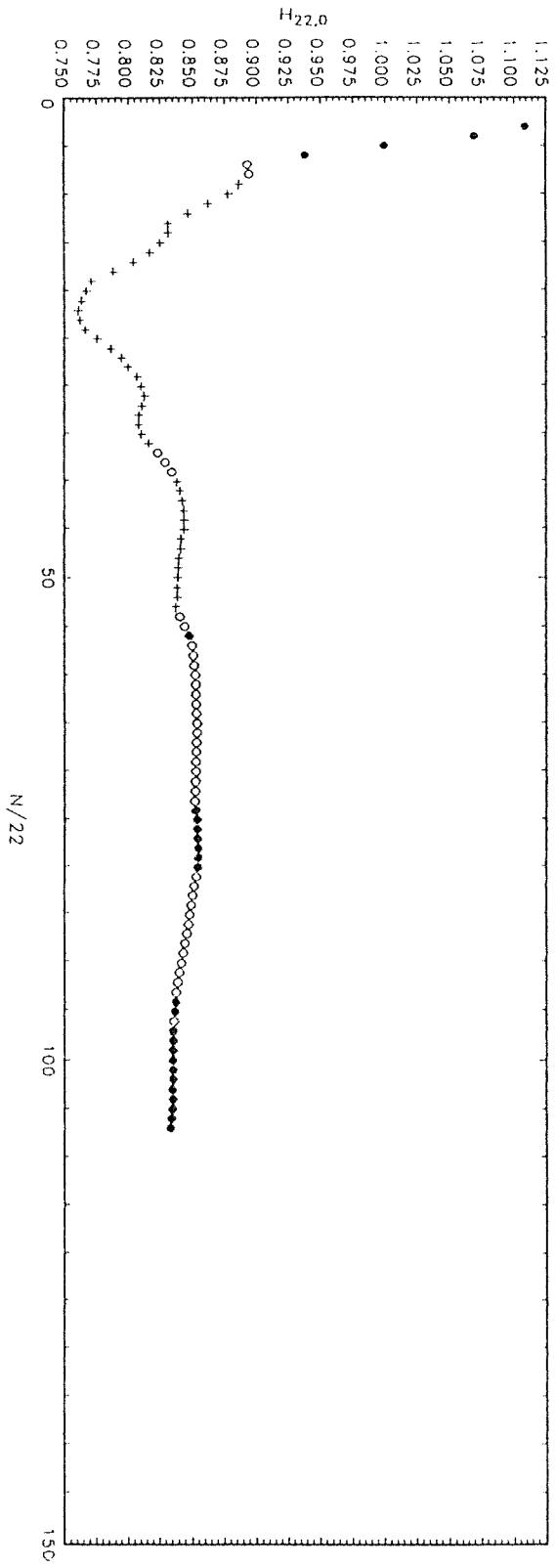


Figura 126

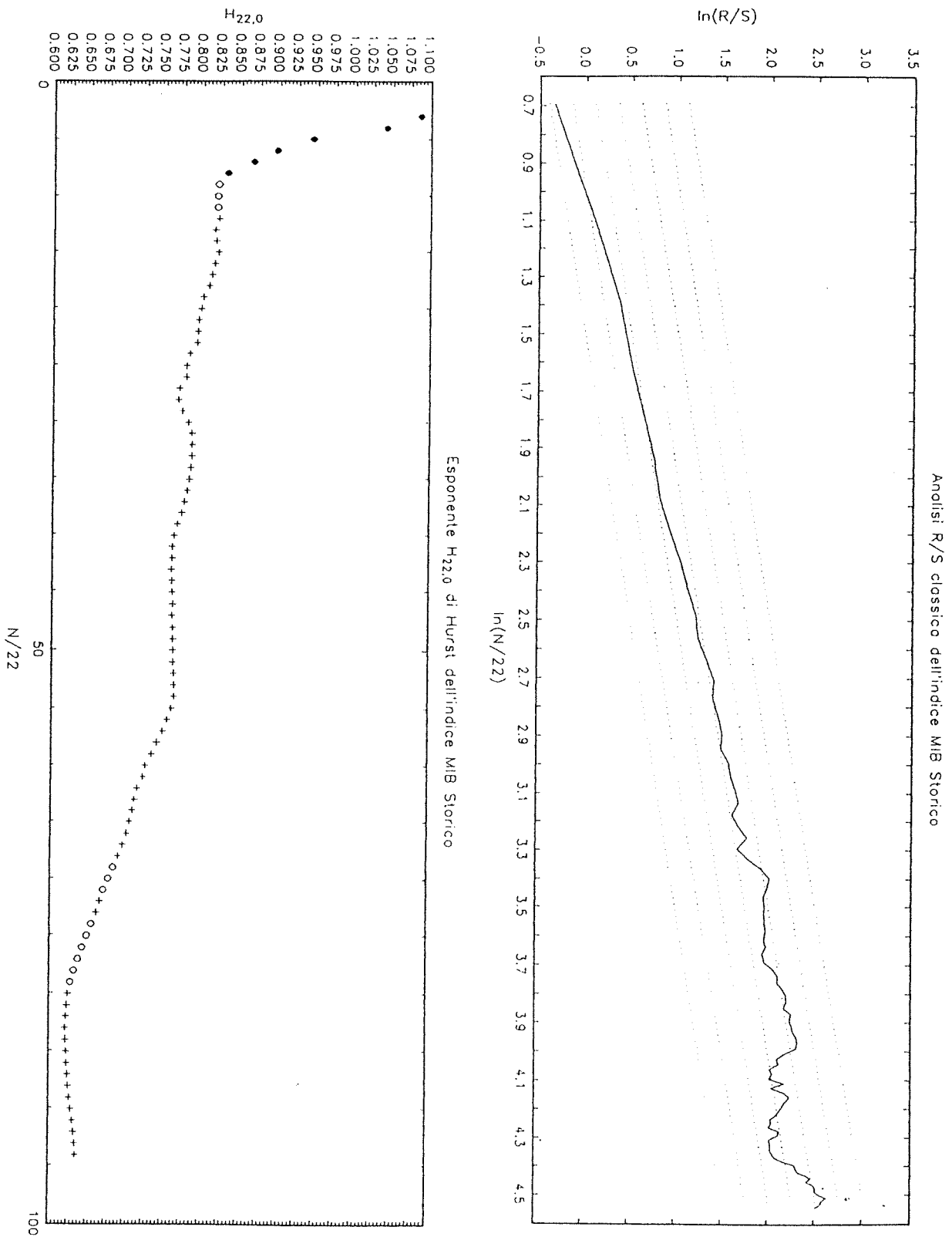






Figura 127

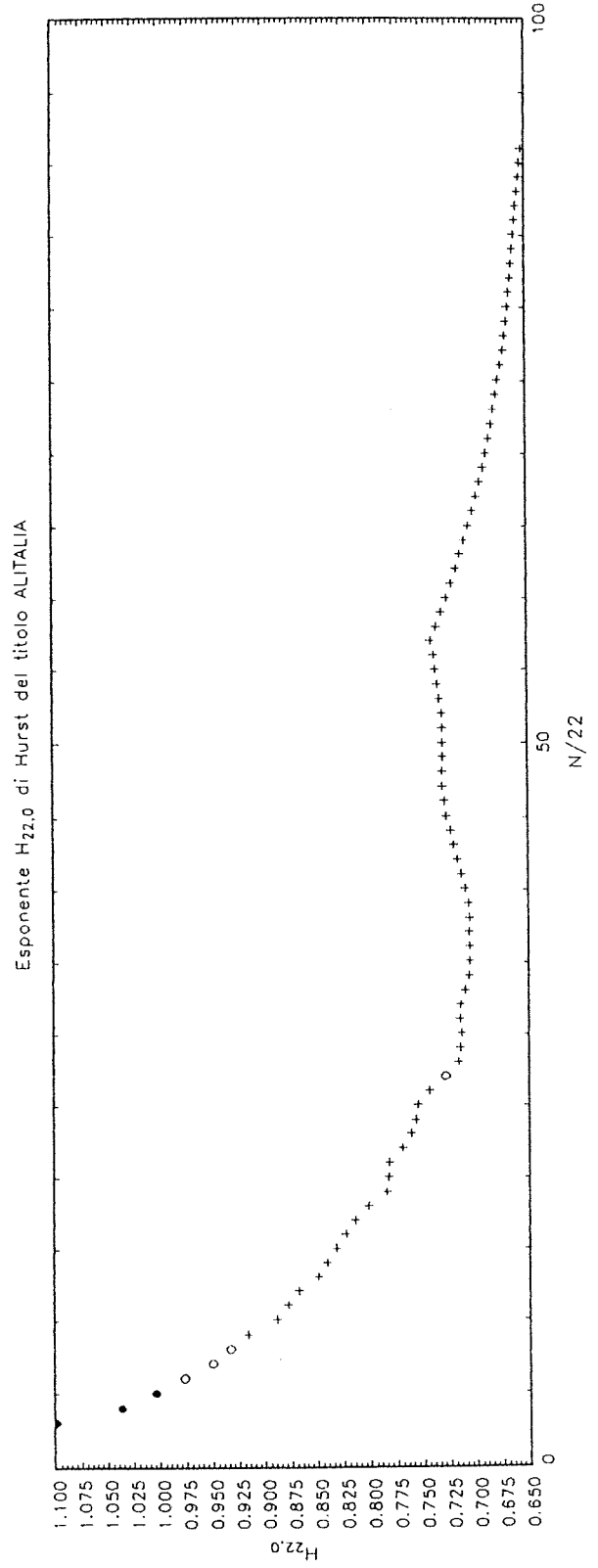
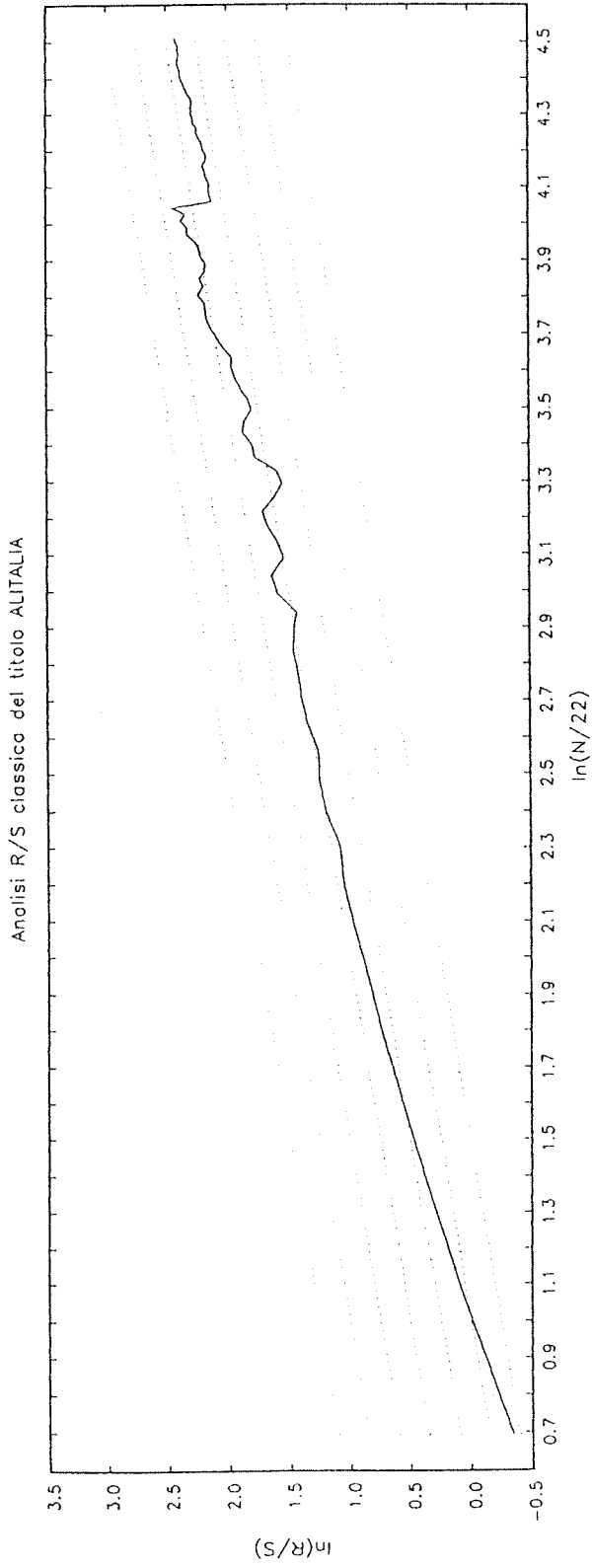


Figura 128

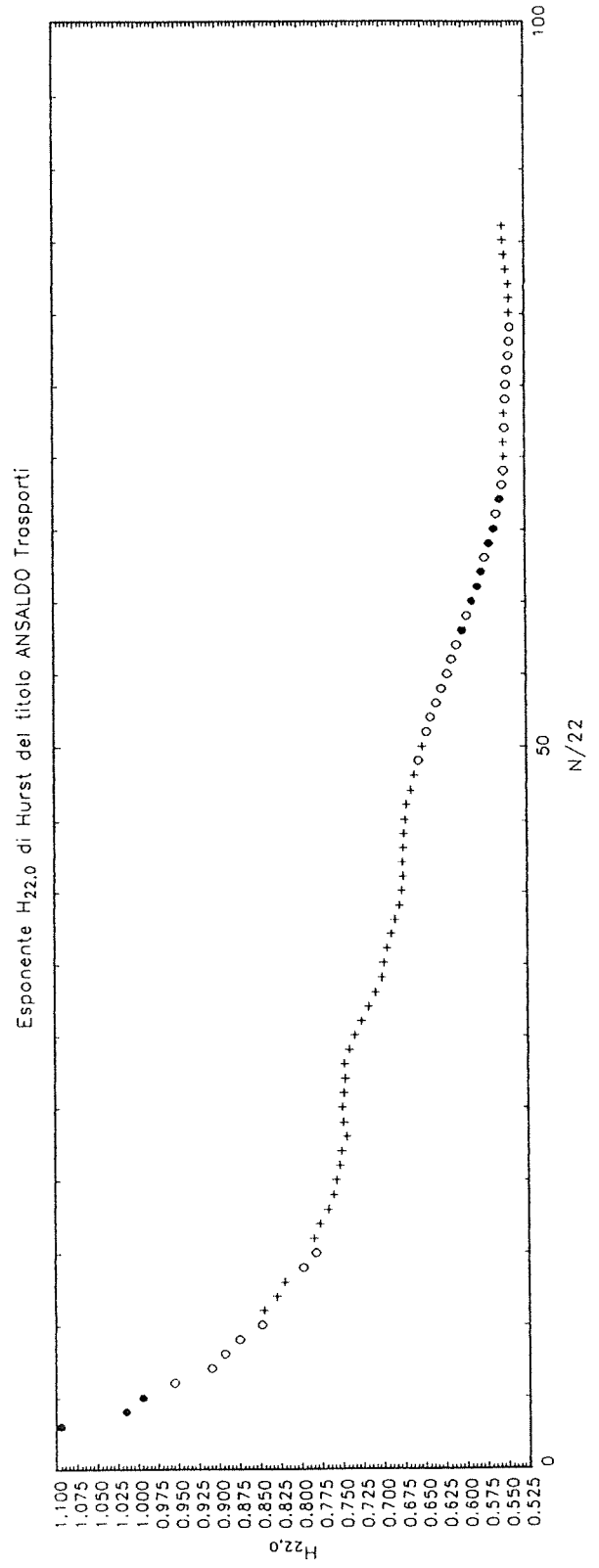
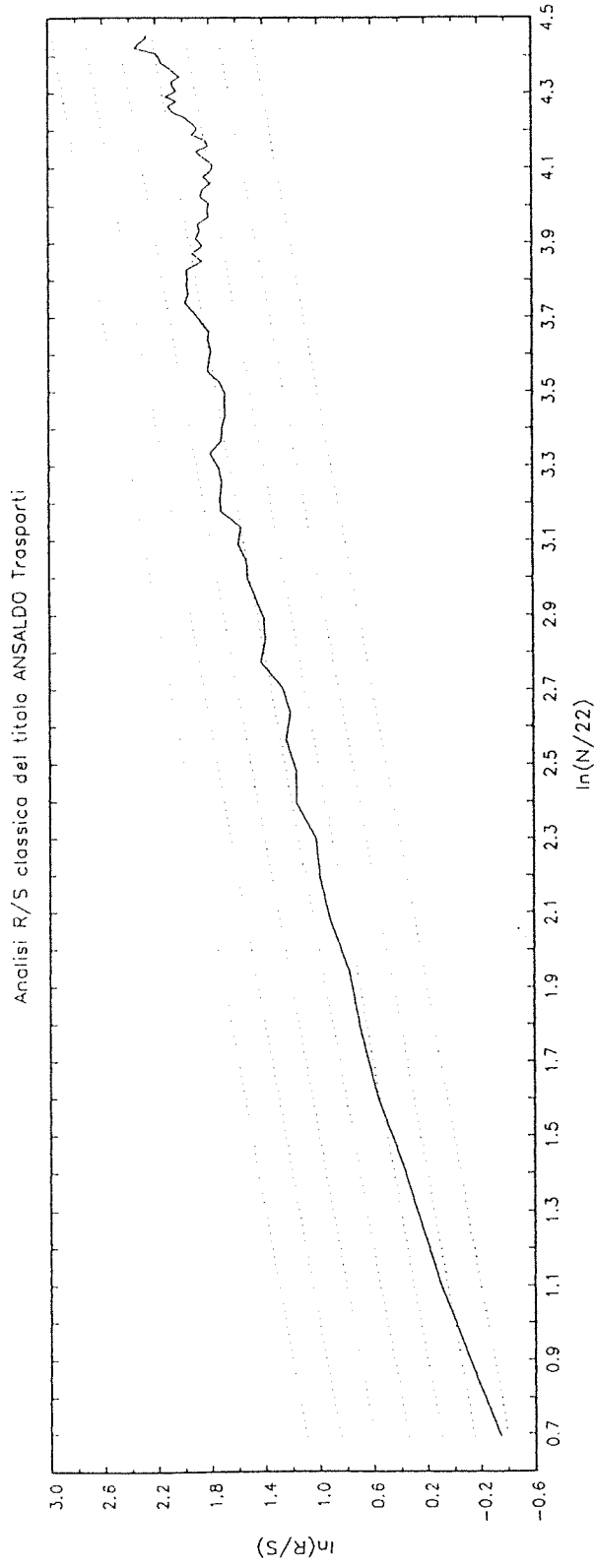


Figura 129

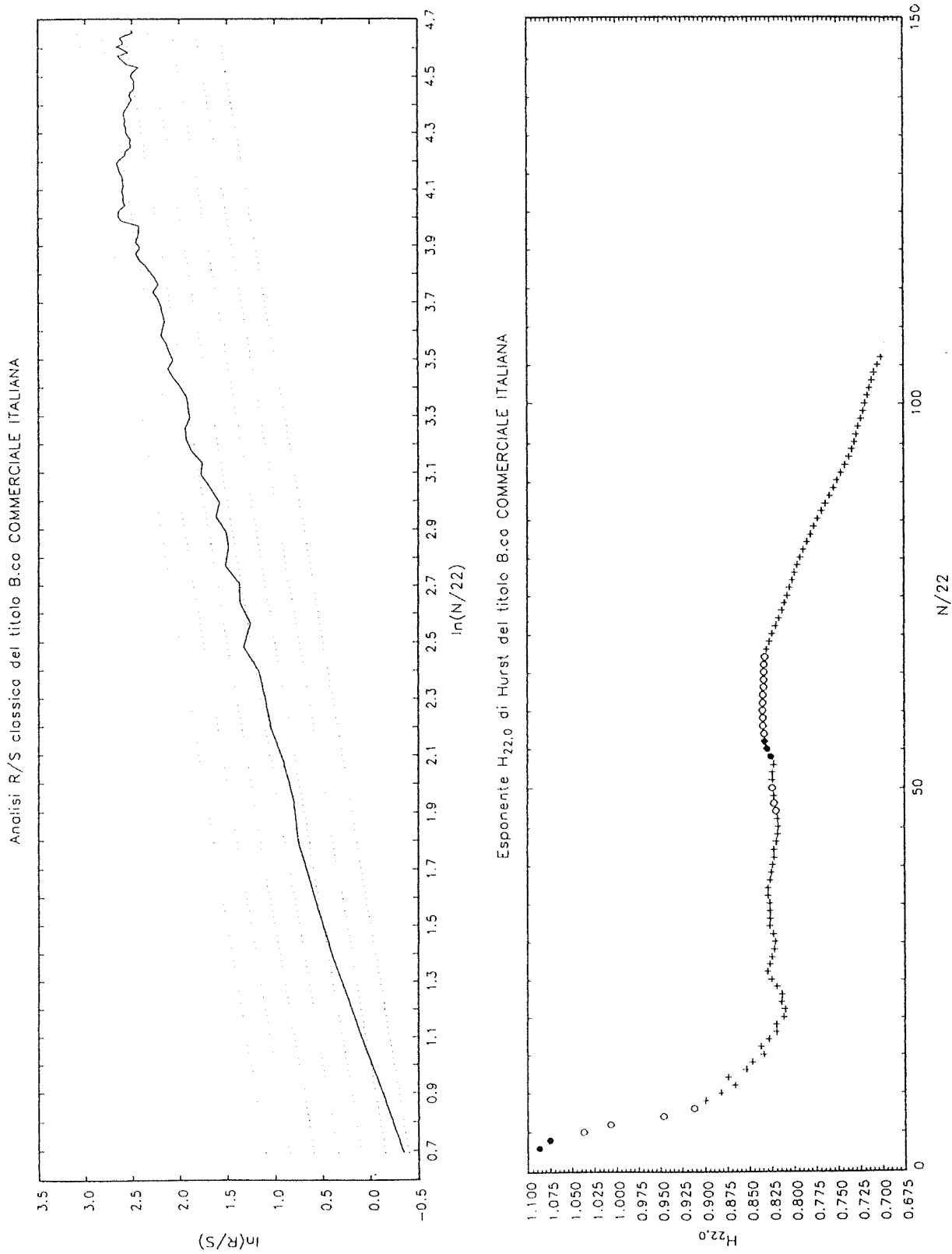


Figura 130

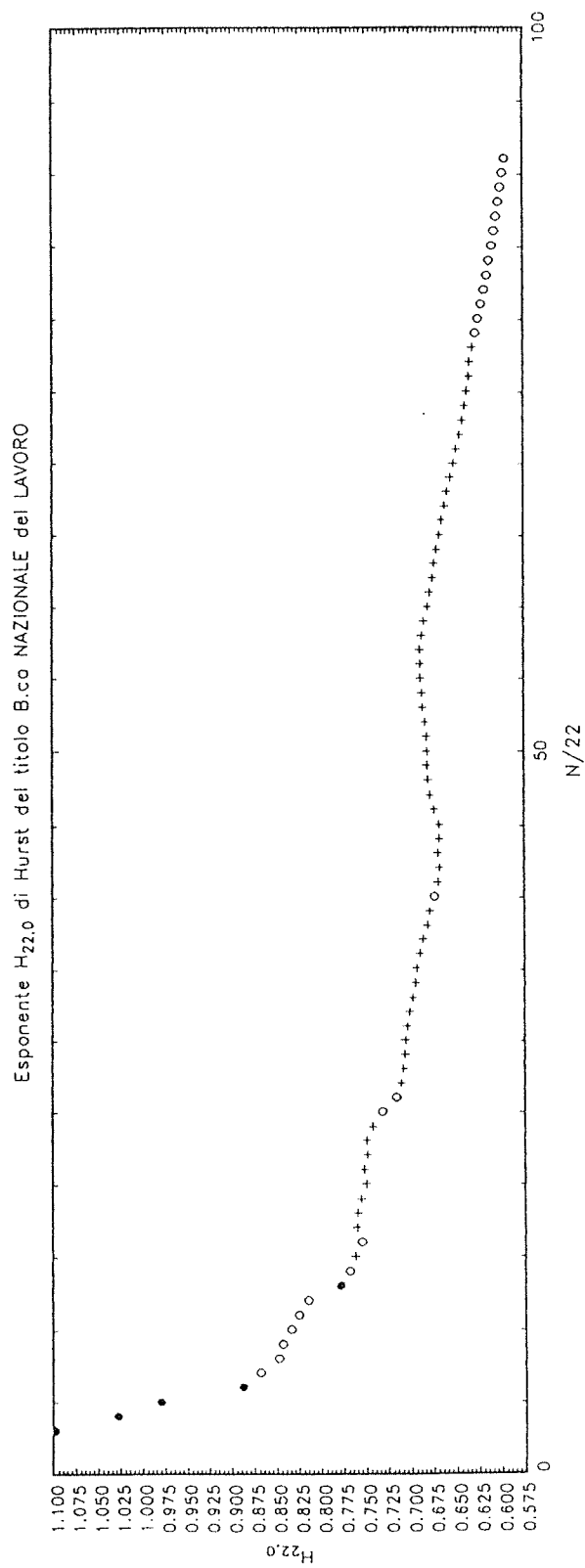
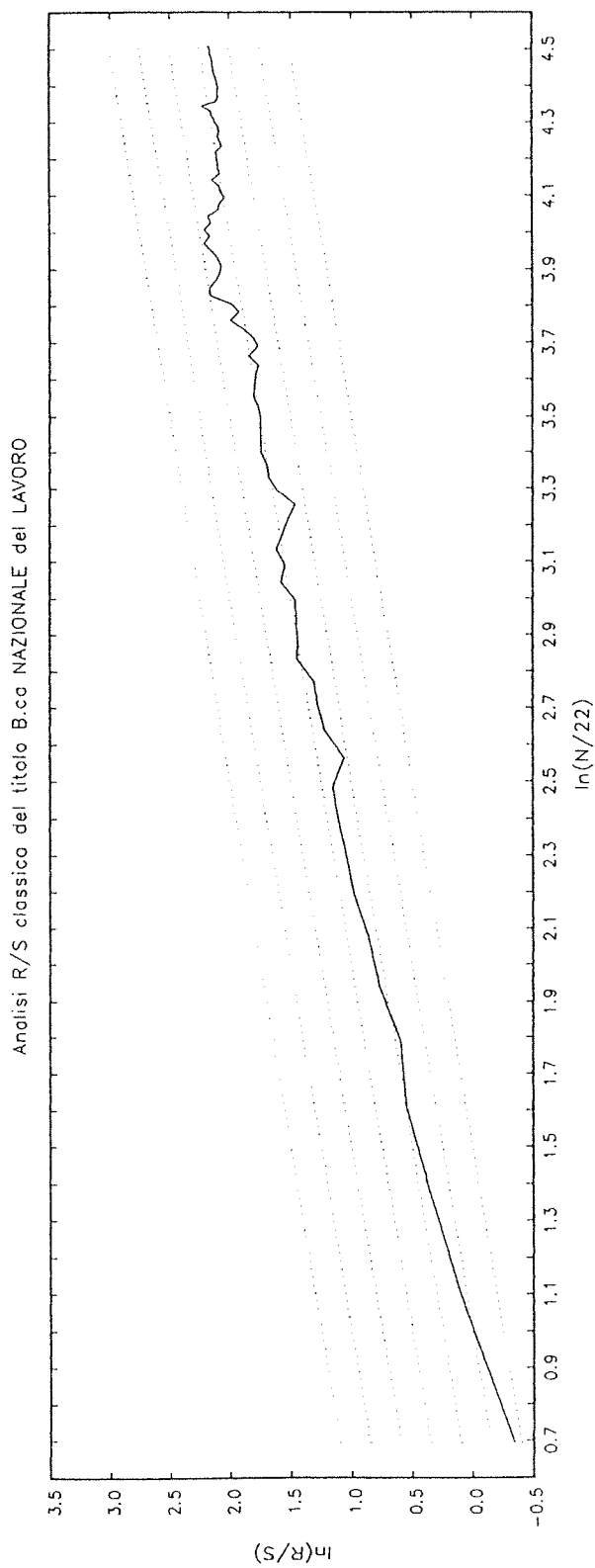


Figura 131

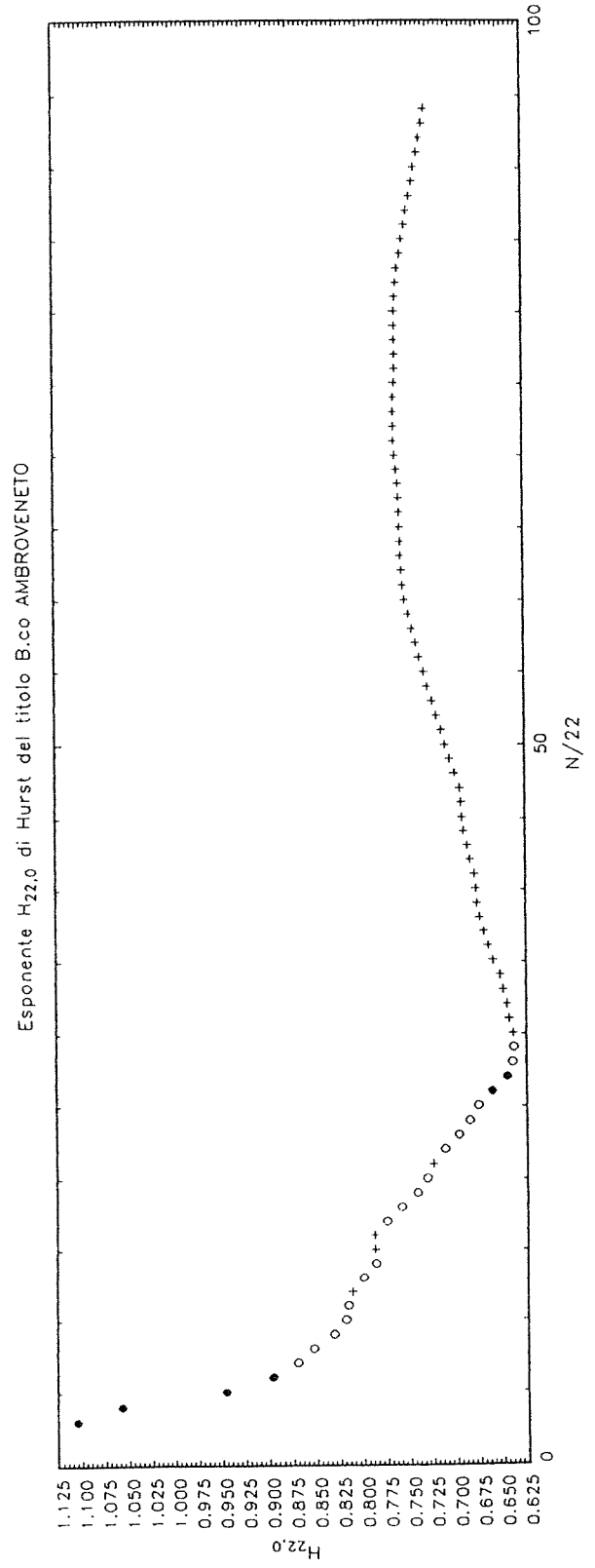
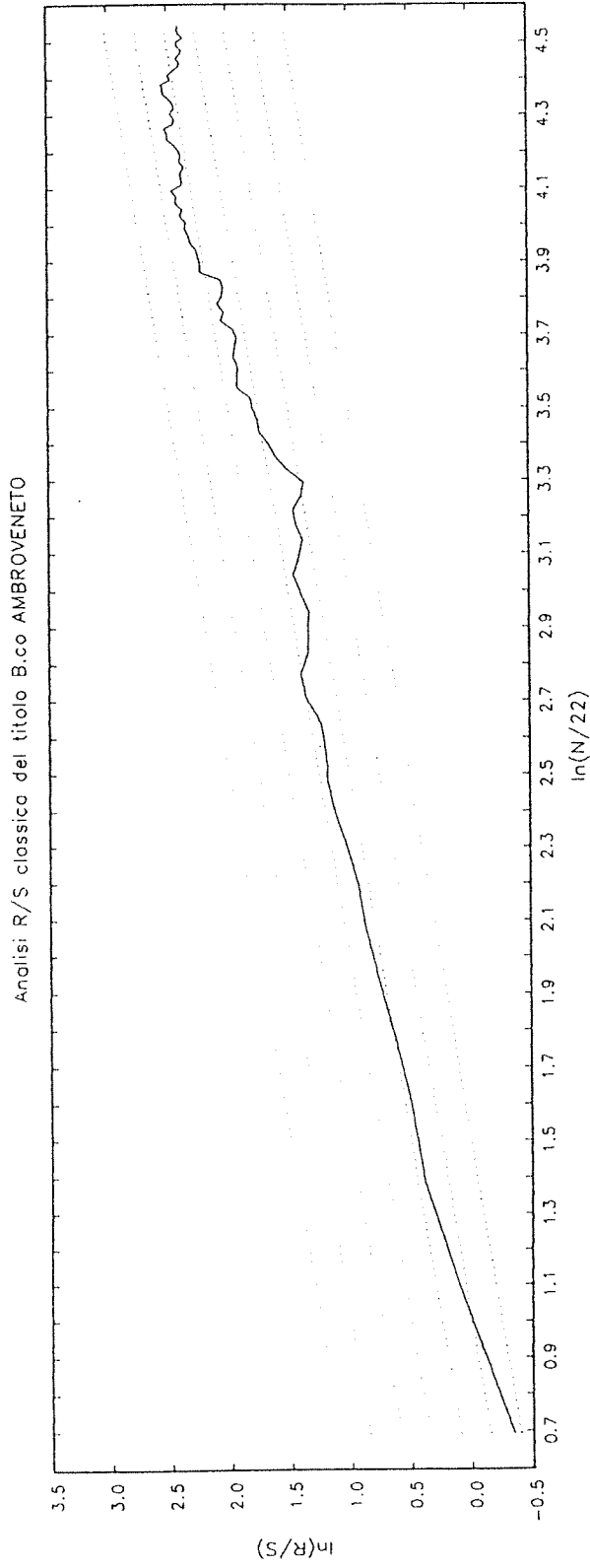


Figura 132

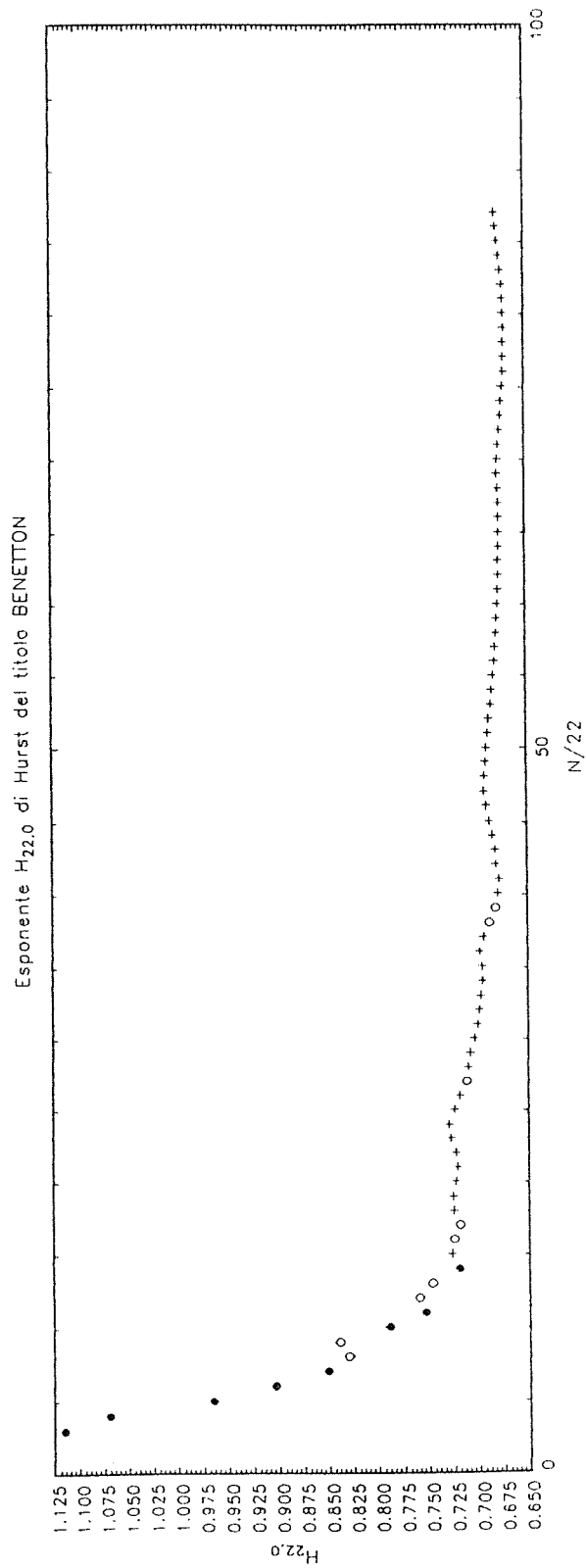
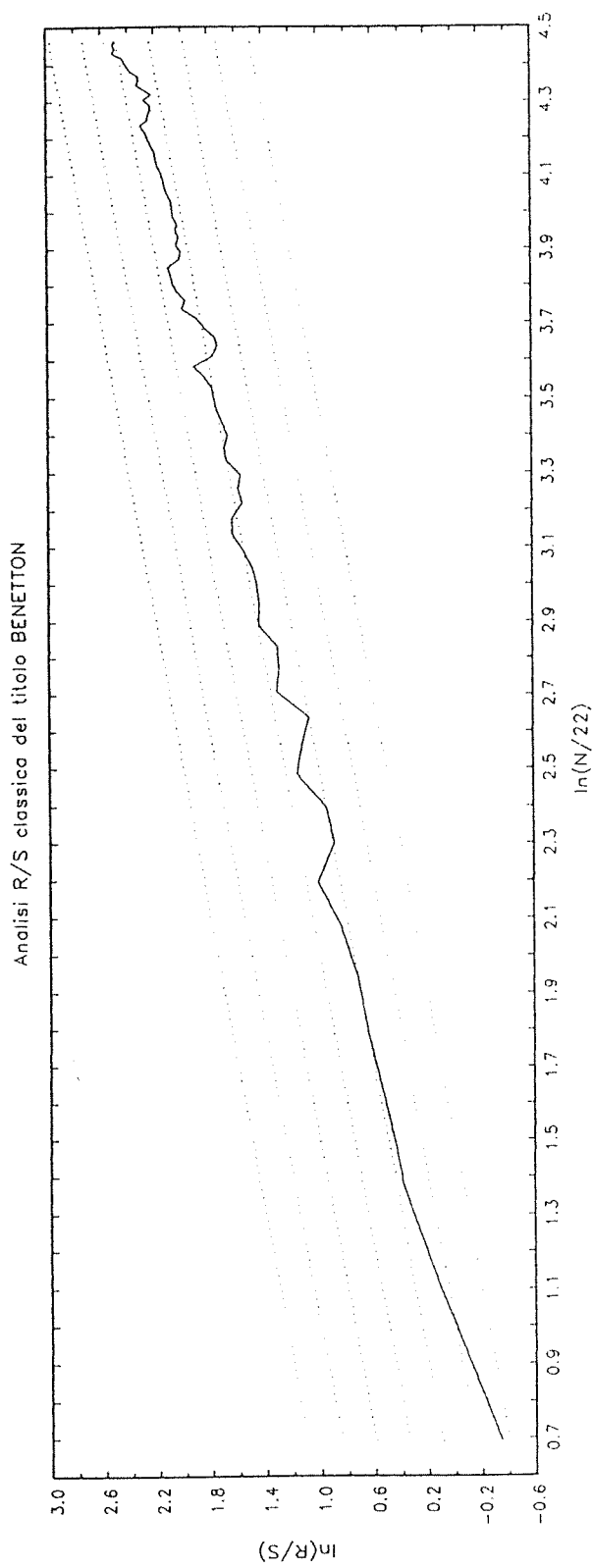


Figura 133

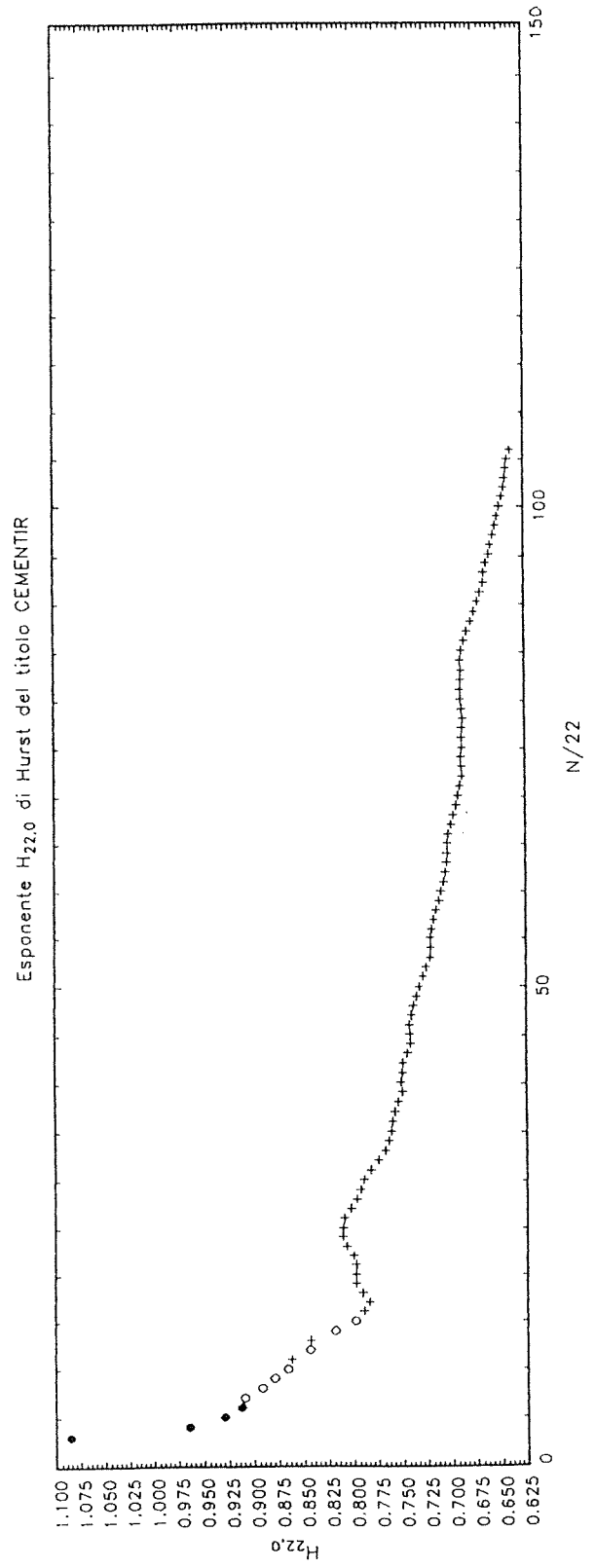
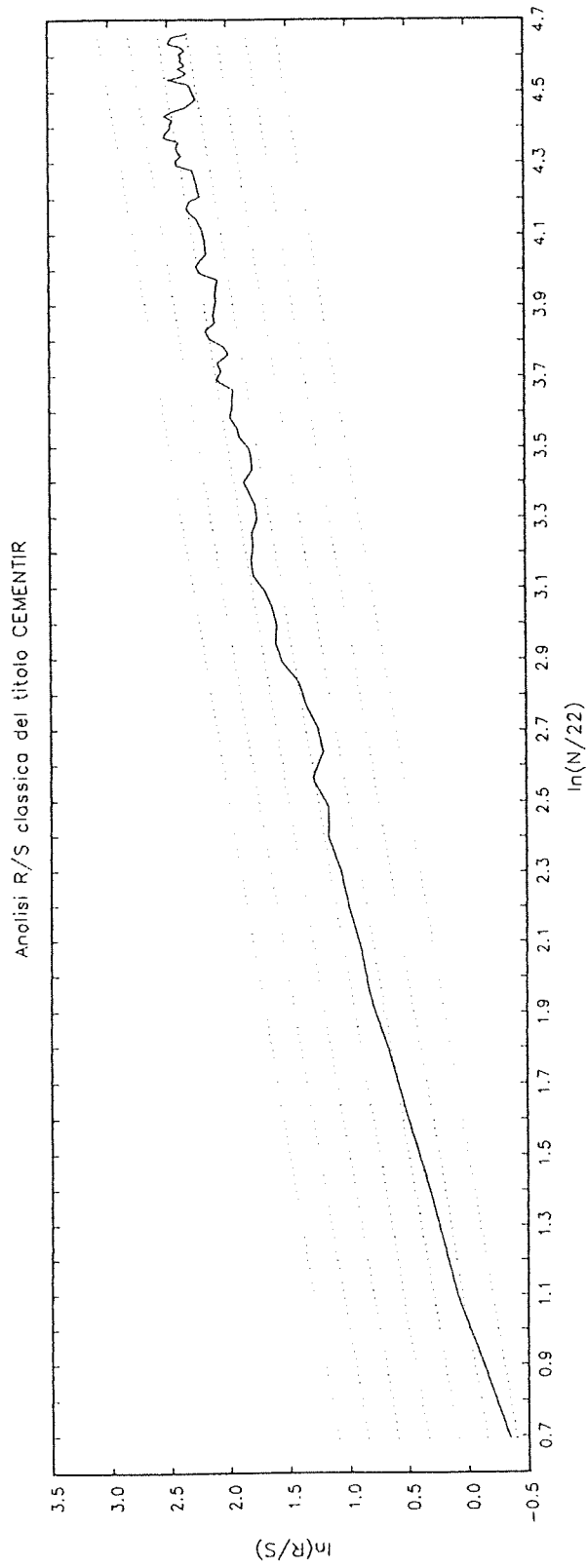


Figura 134

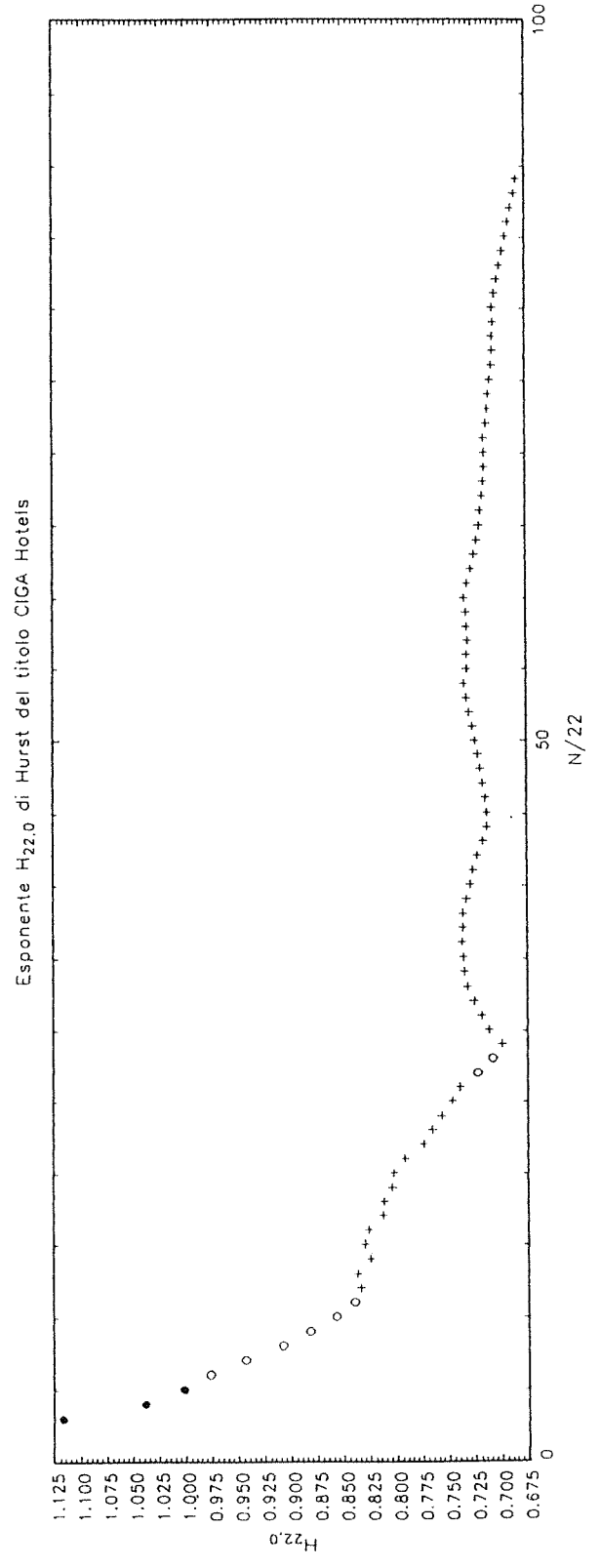
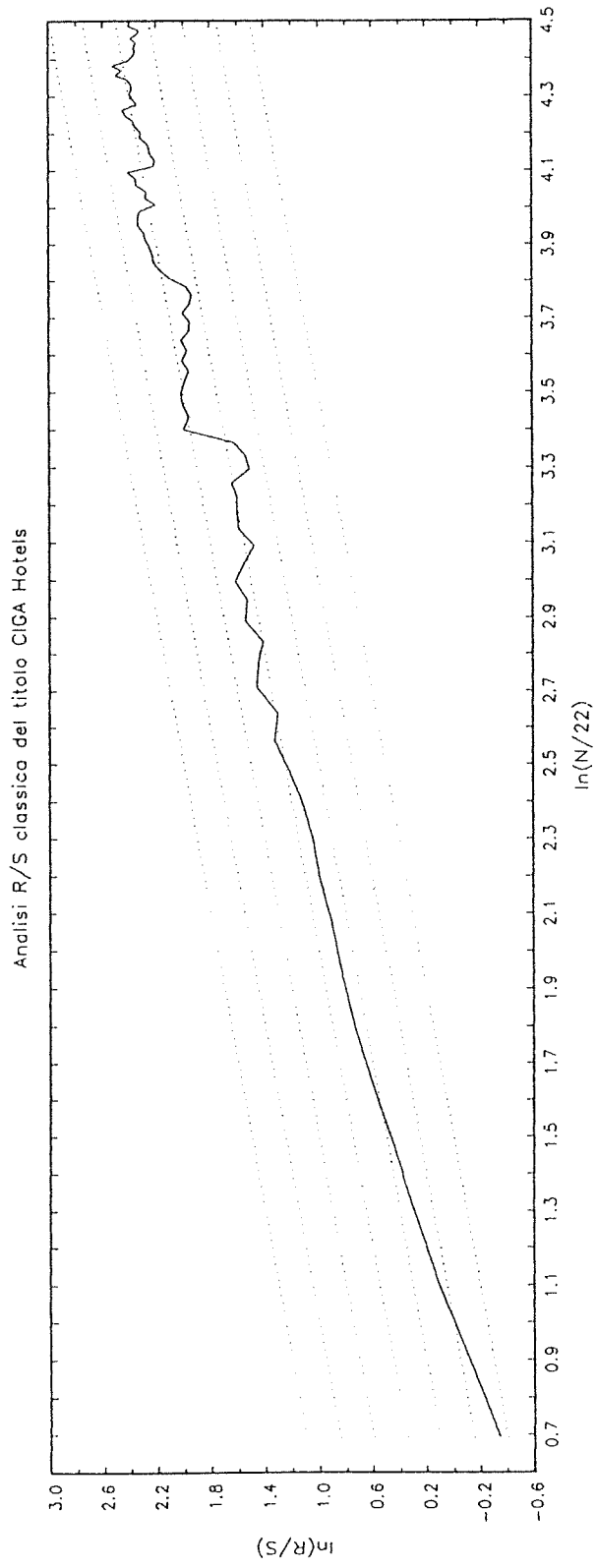




Figura 135

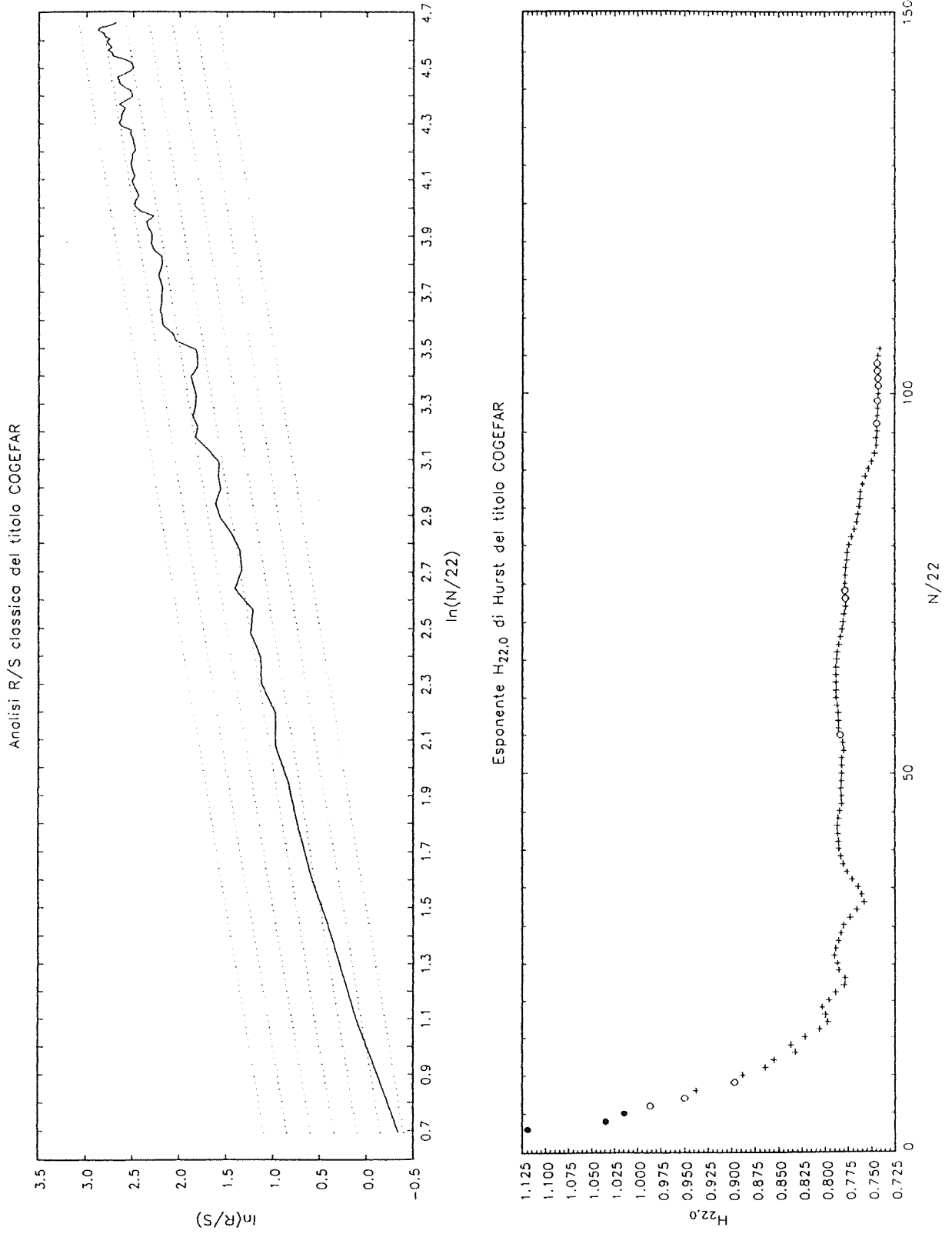


Figura 136

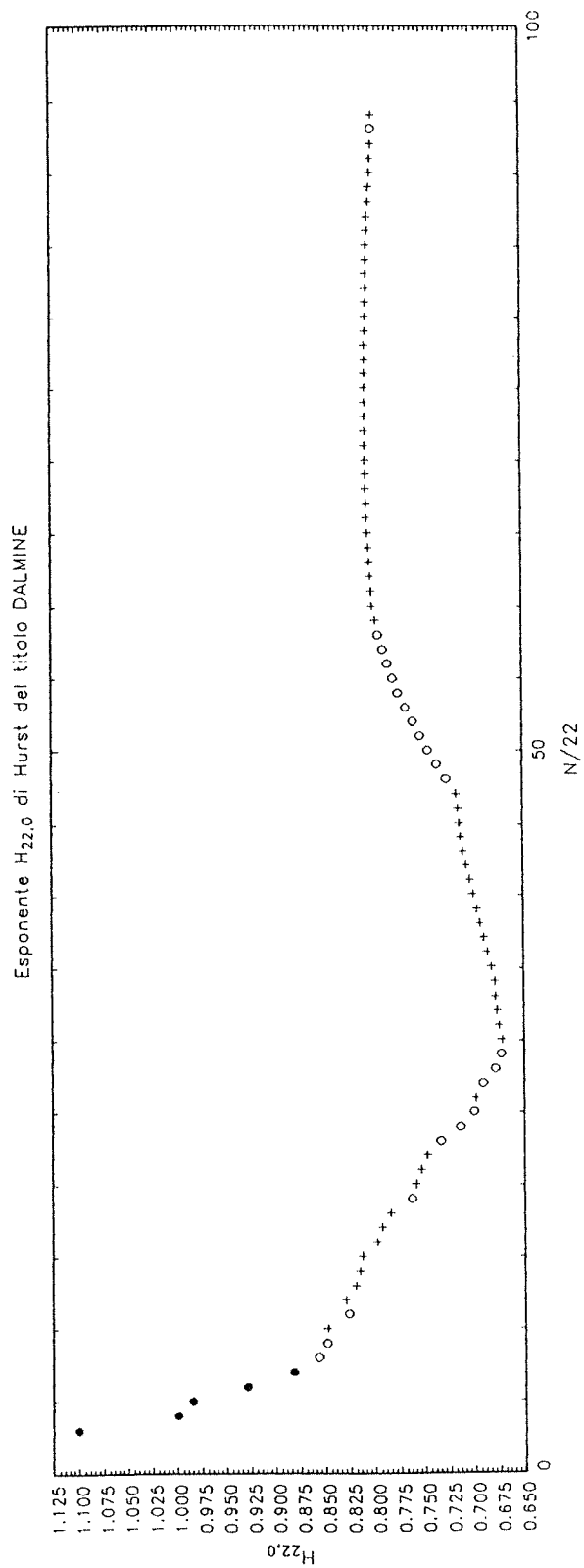
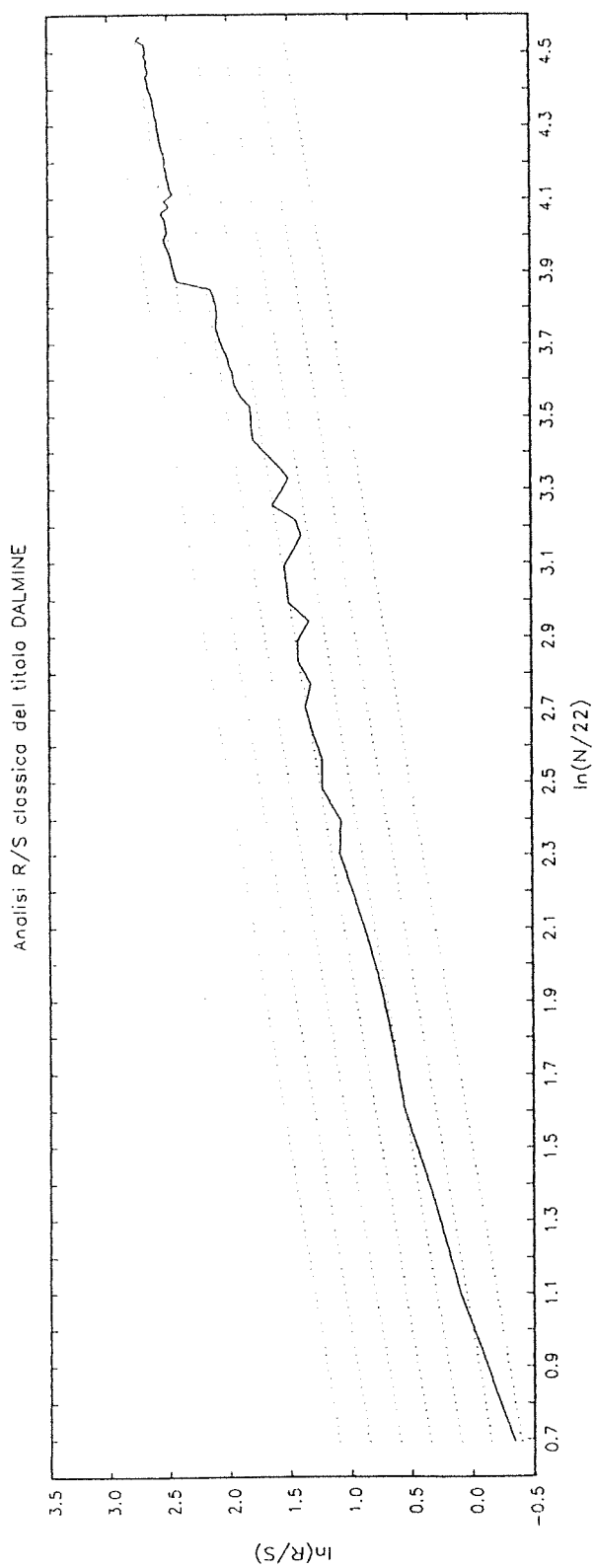


Figura 137

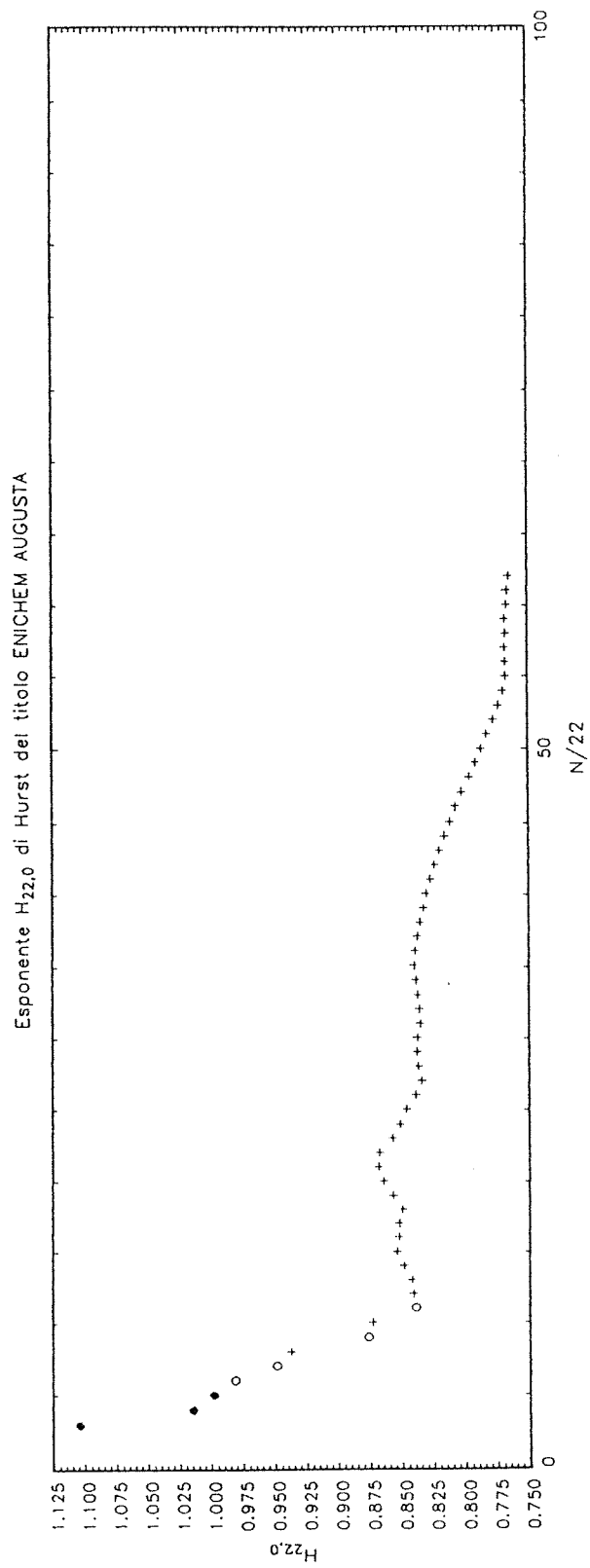
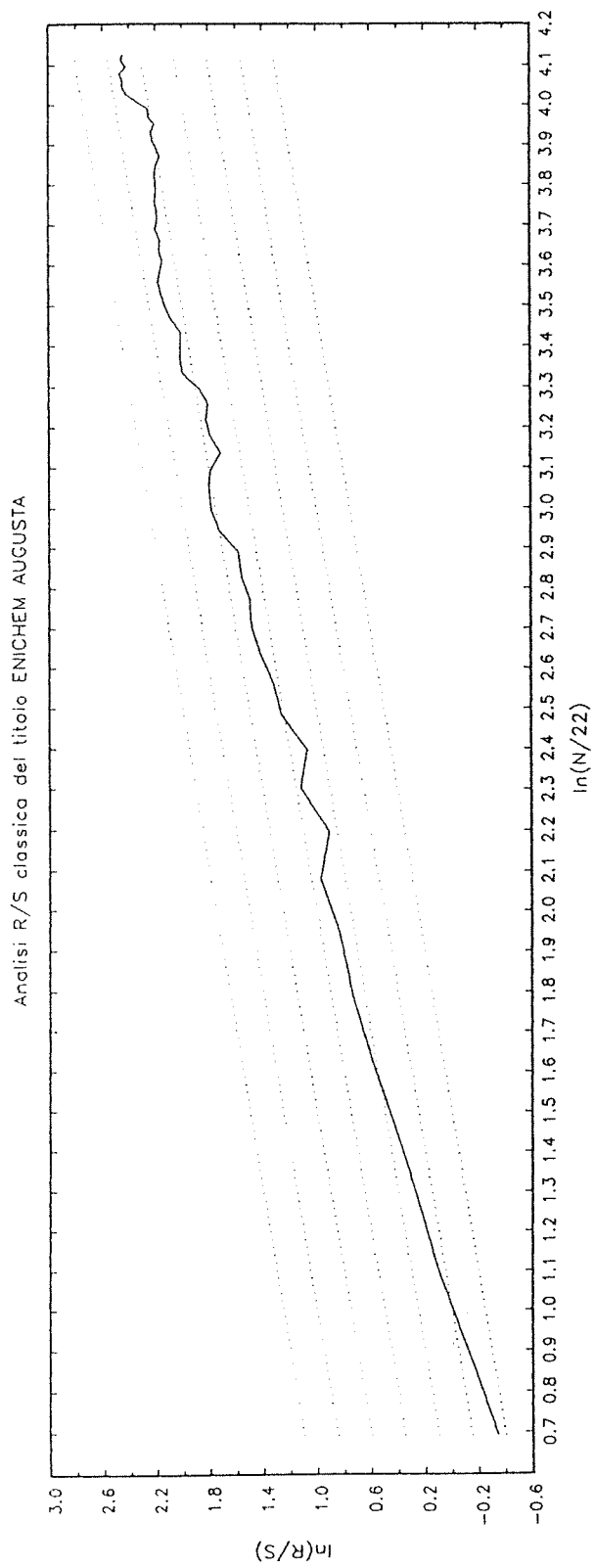


Figura 138

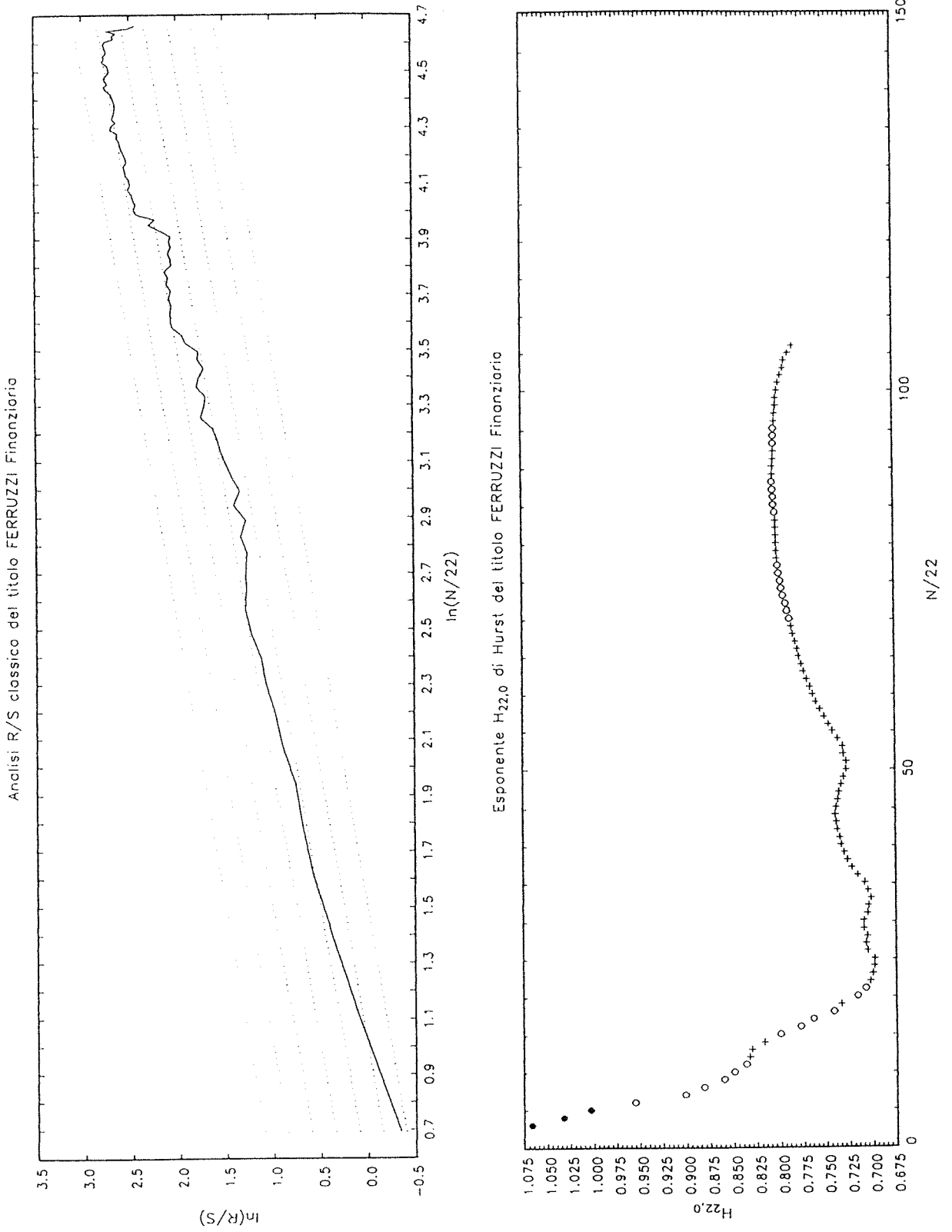


Figura 139

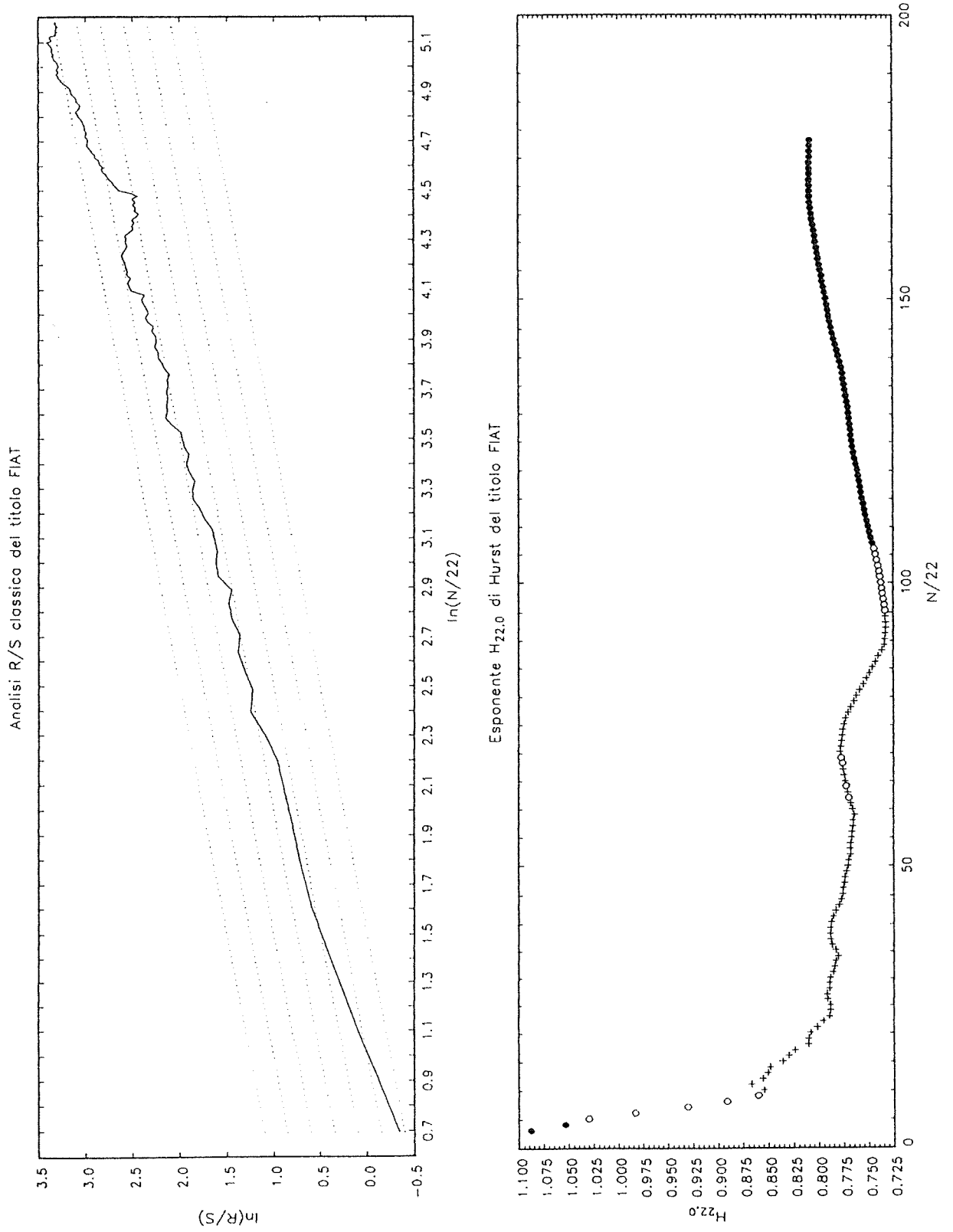


Figura 140

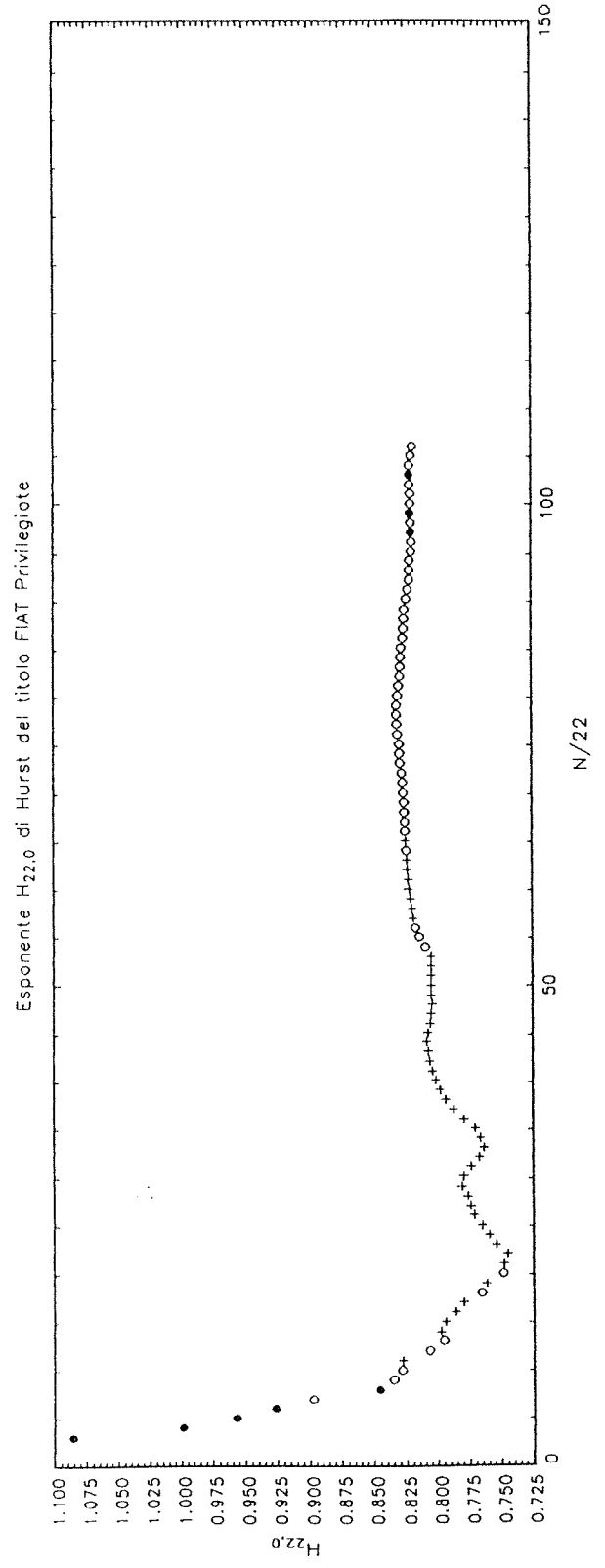
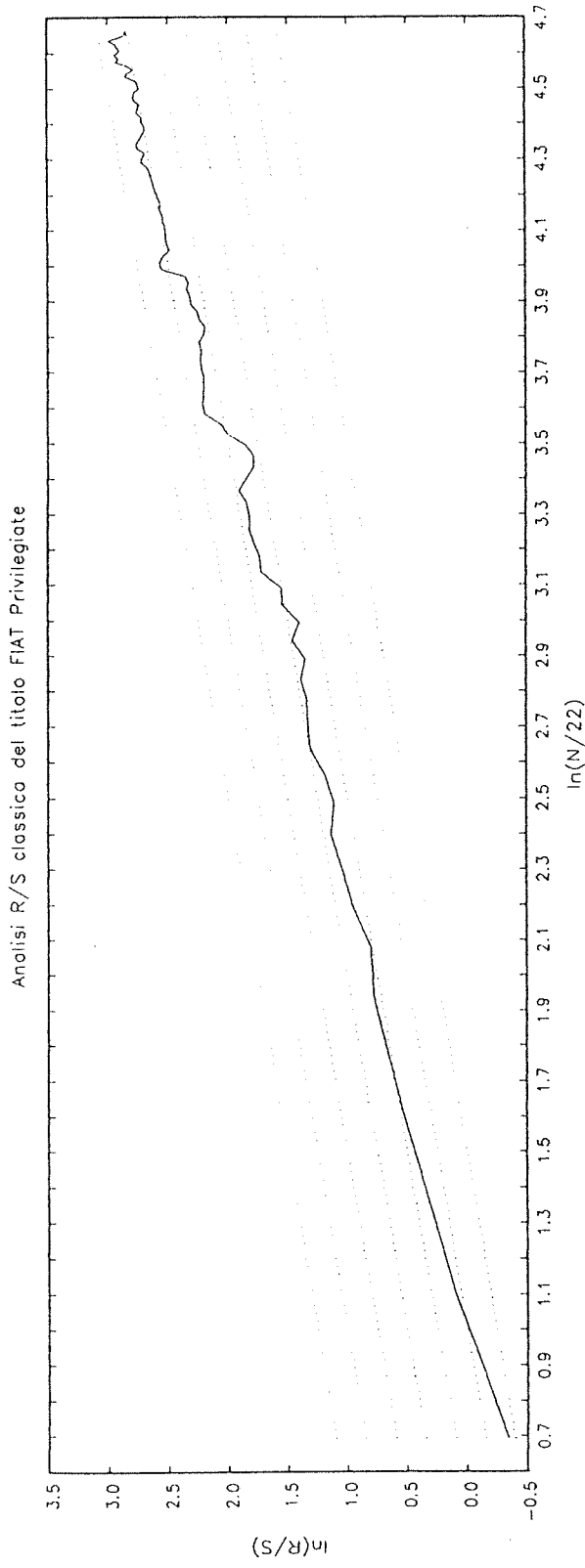


Figura 141

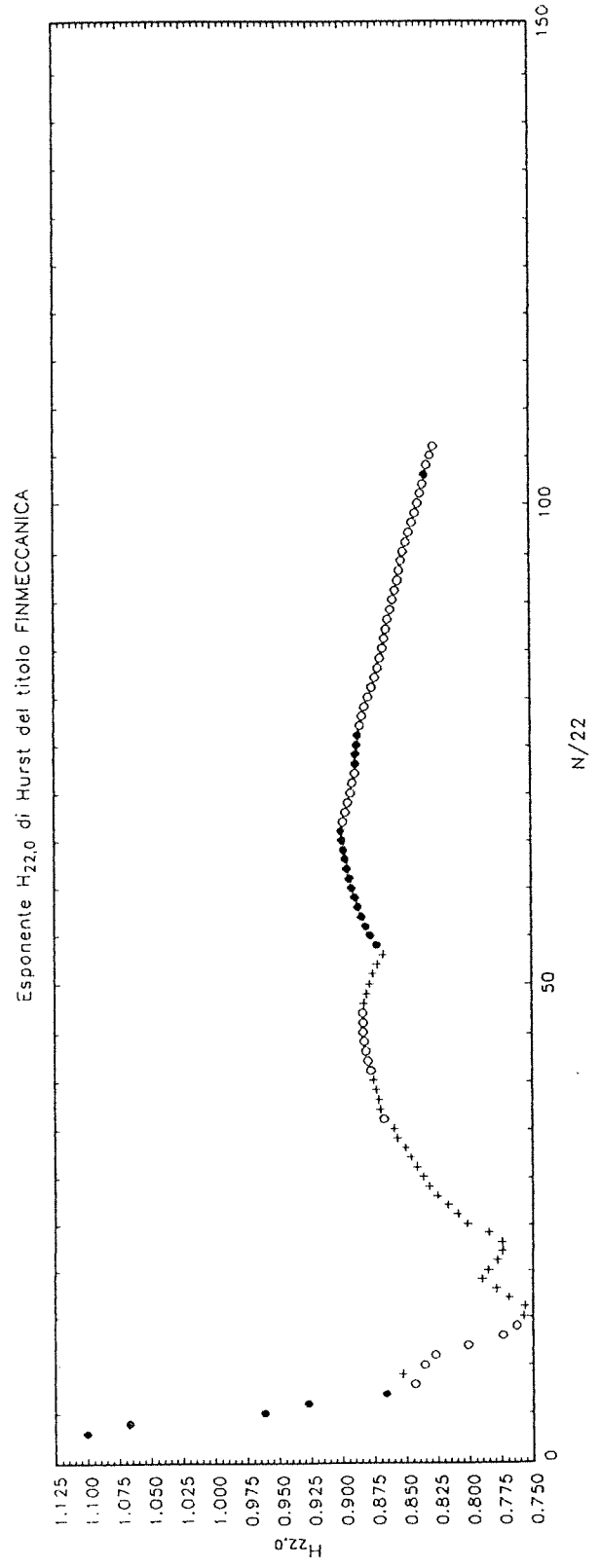
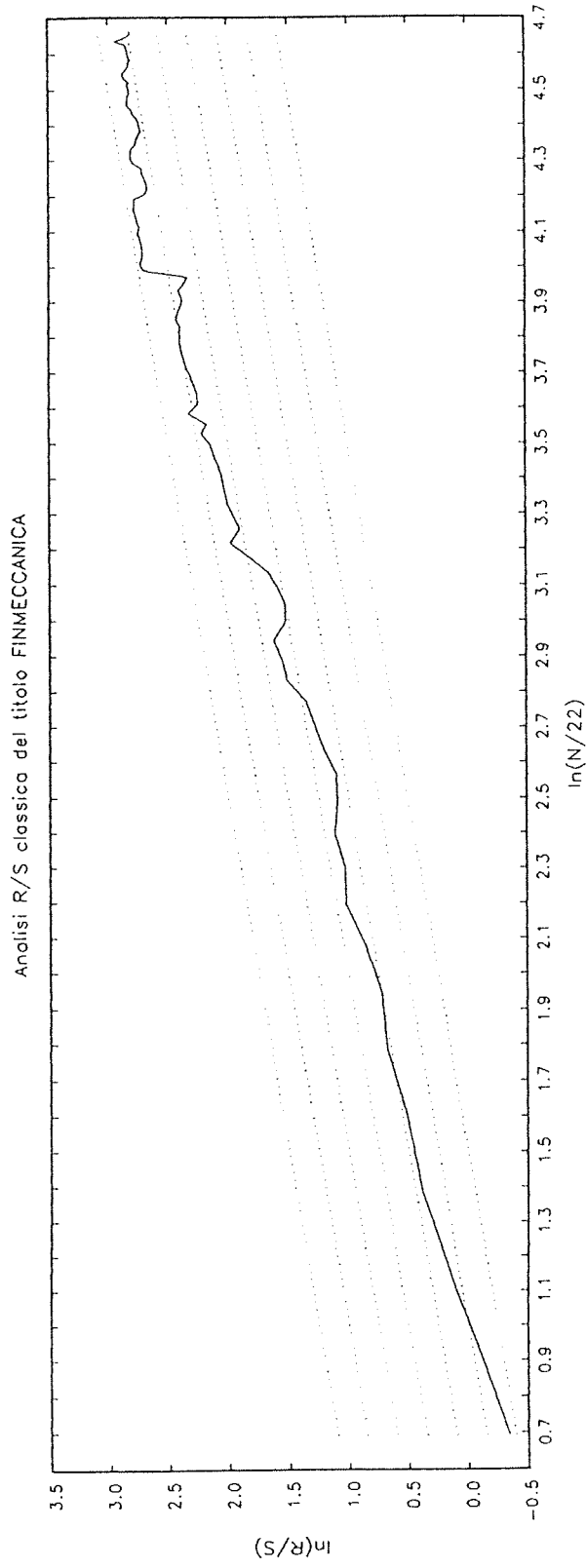


Figura 142

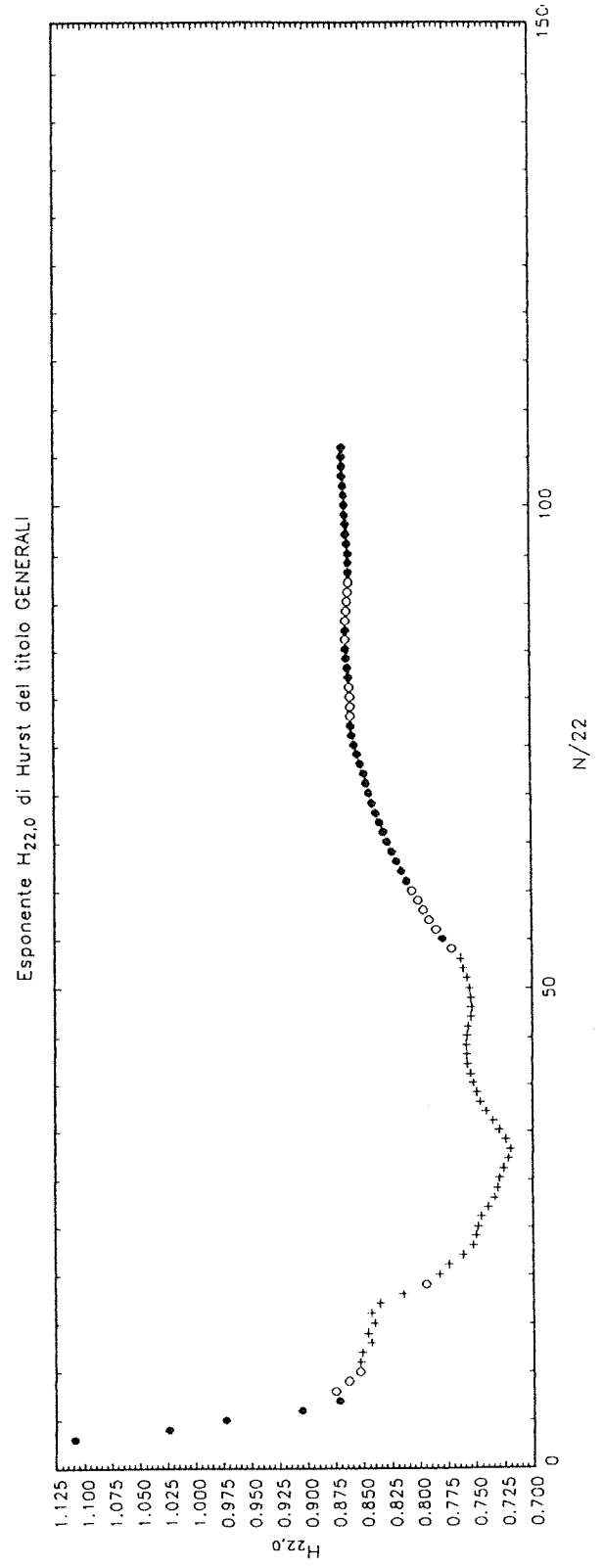
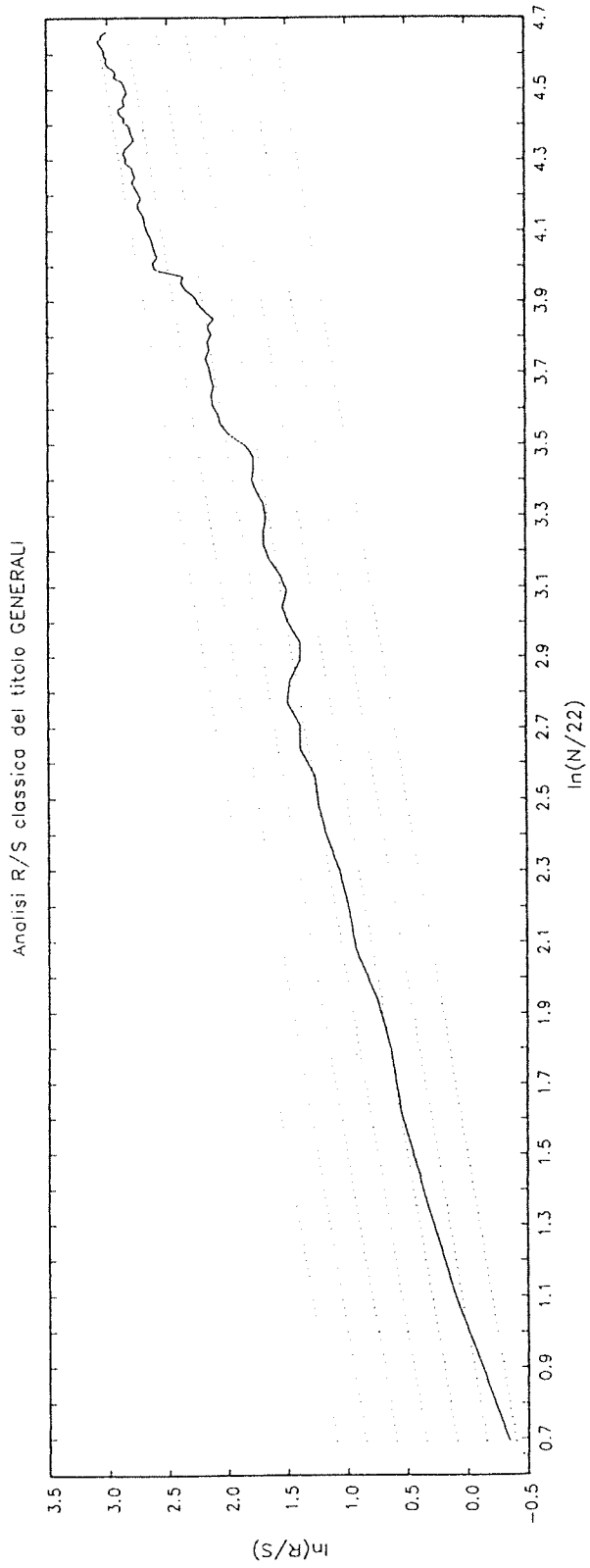




Figura 143

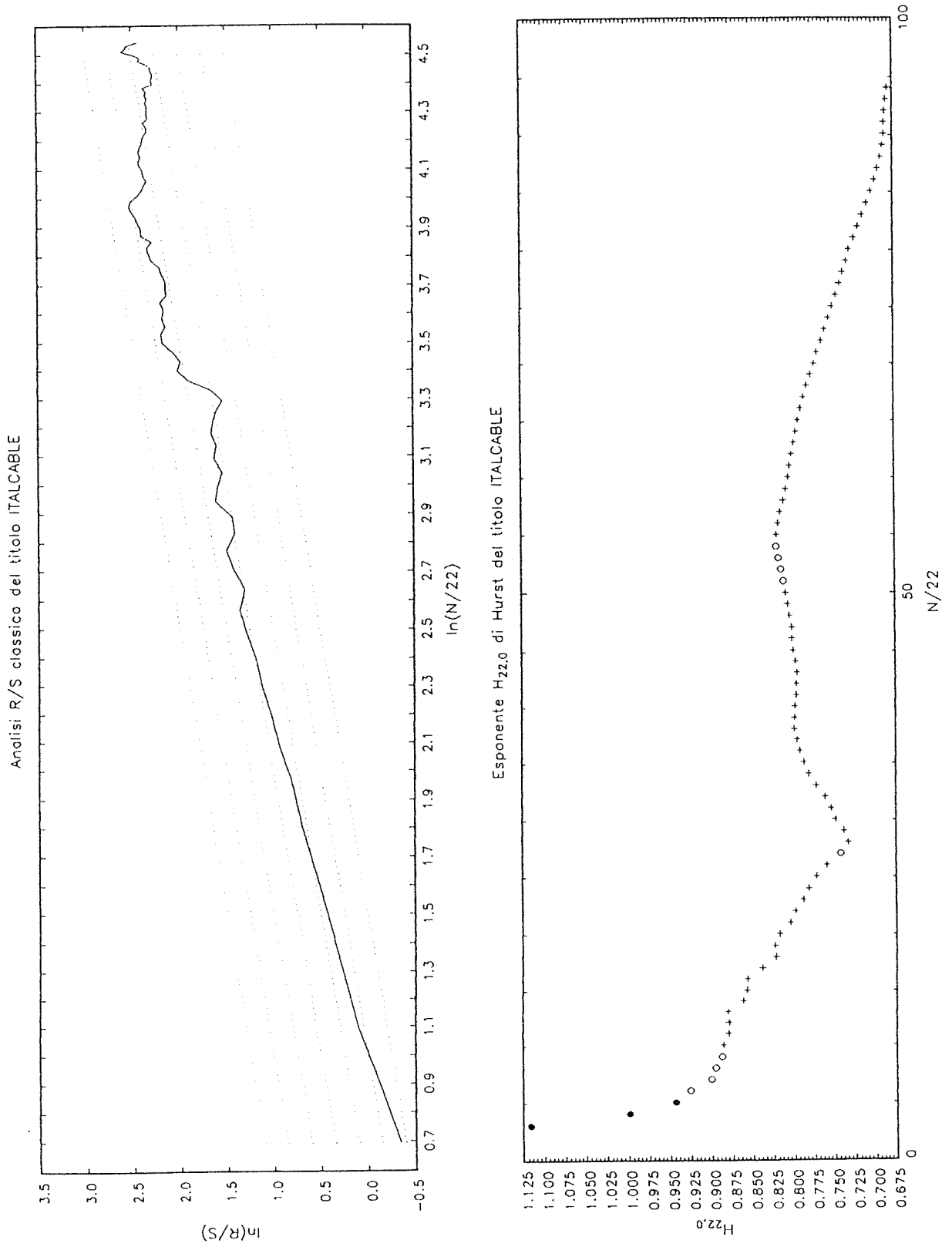


Figura 144

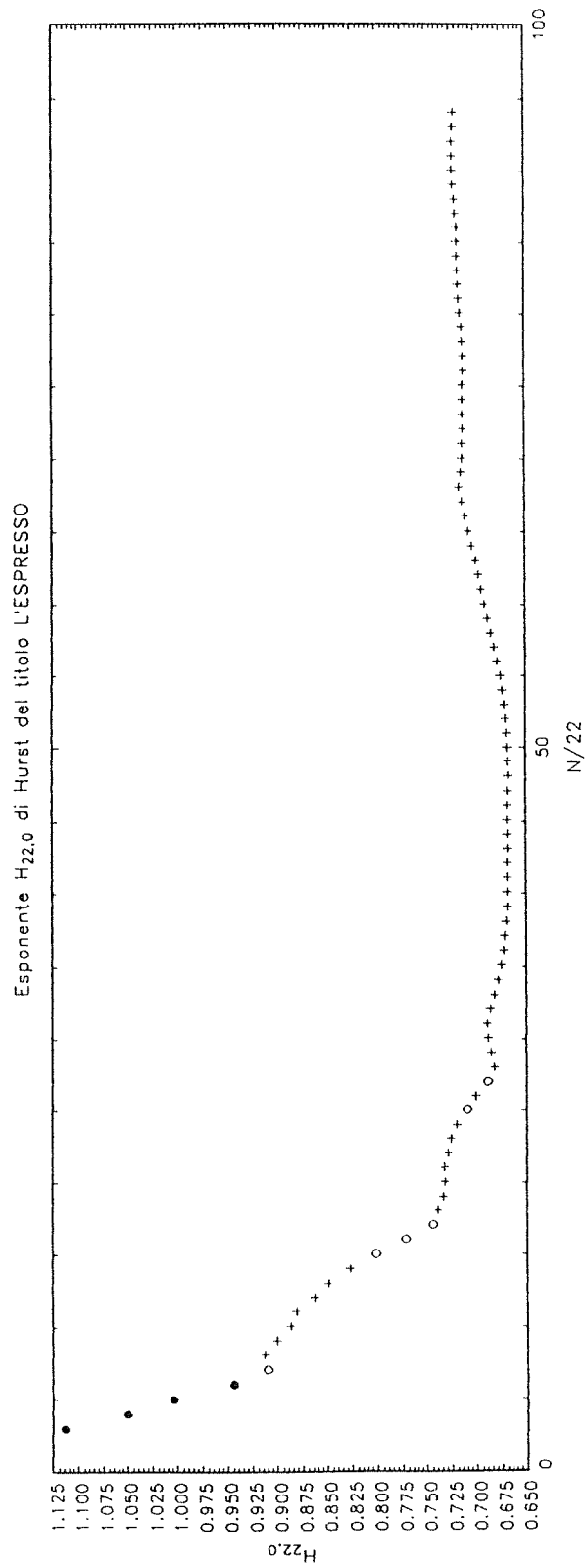
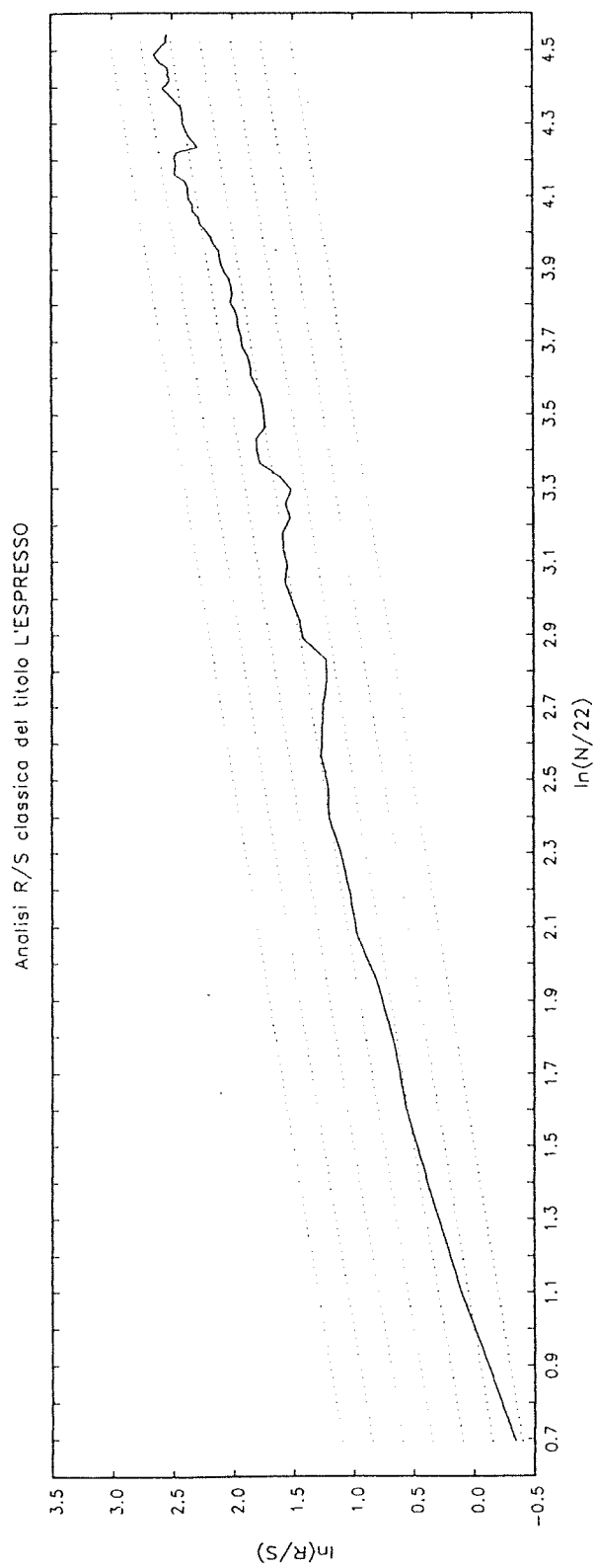


Figura 145

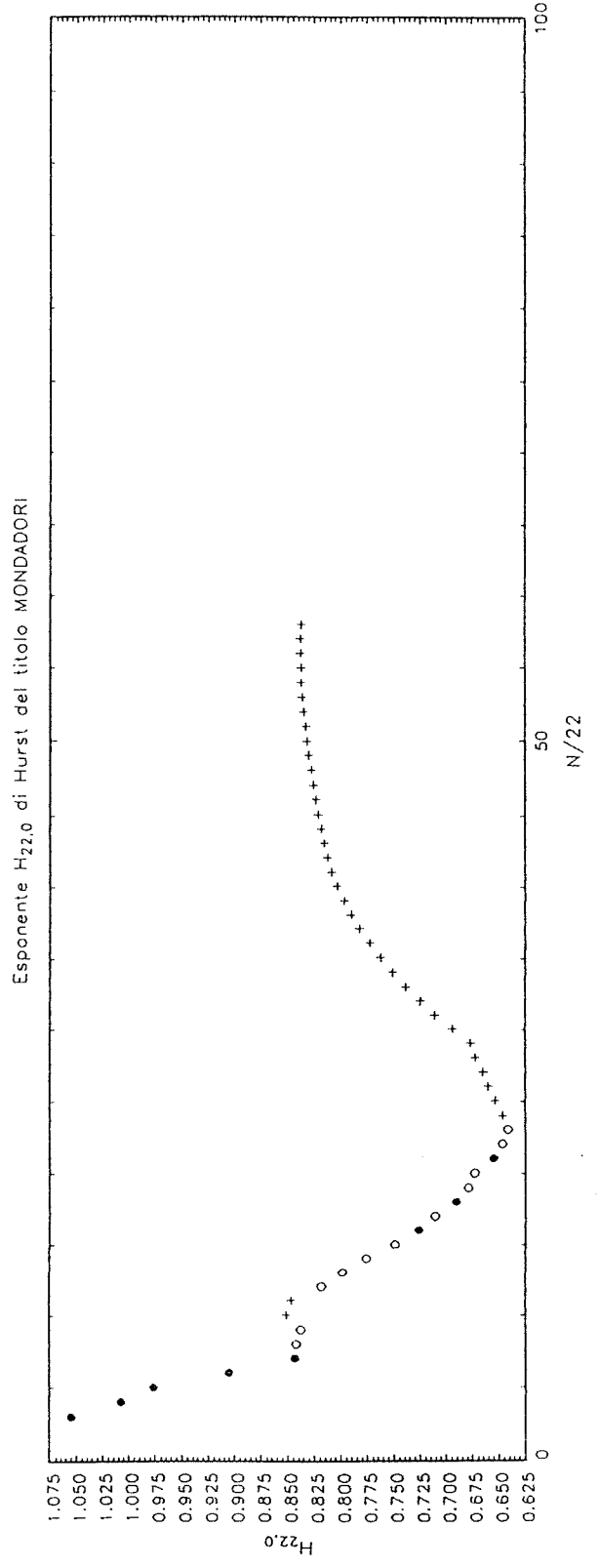
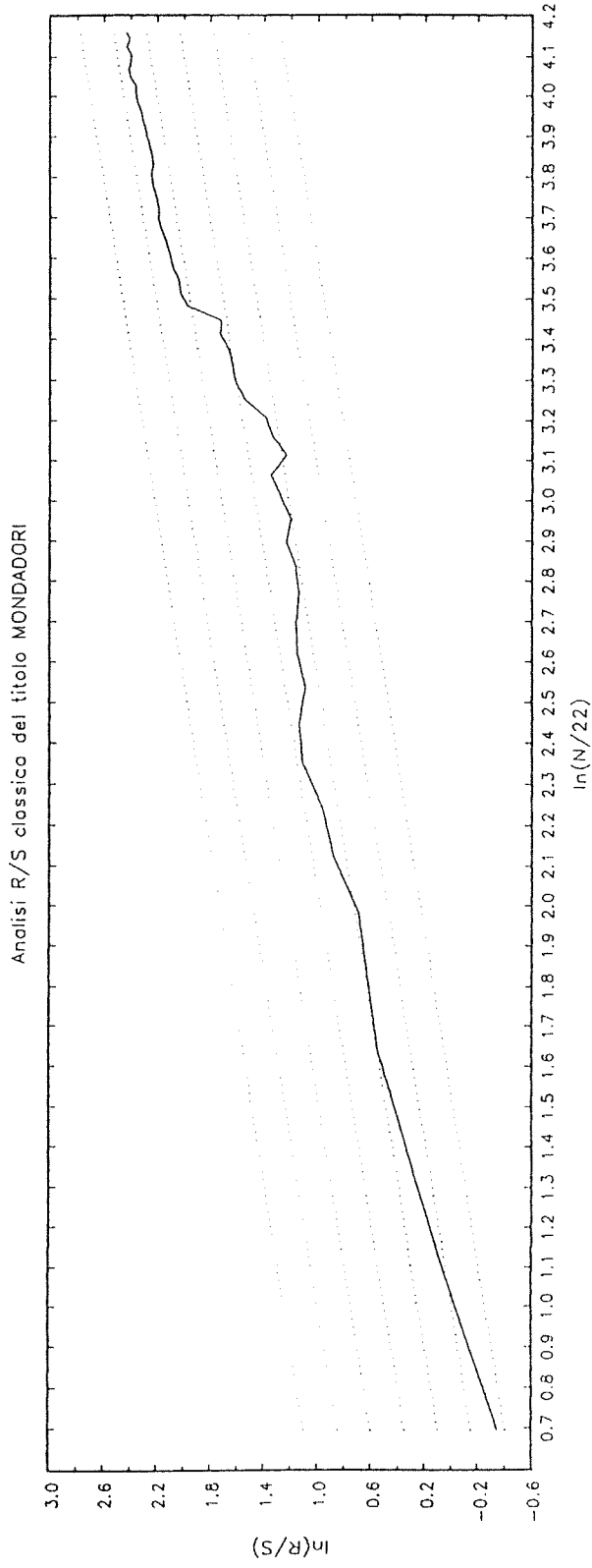


Figura 146

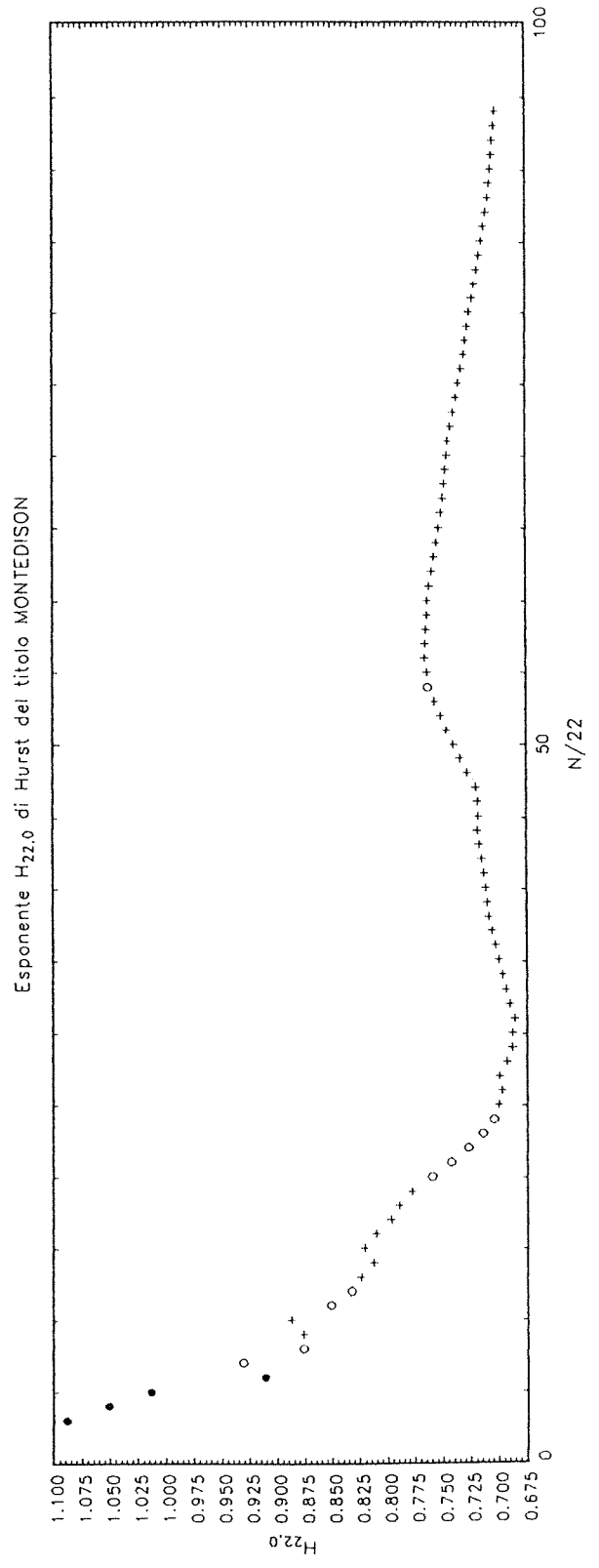
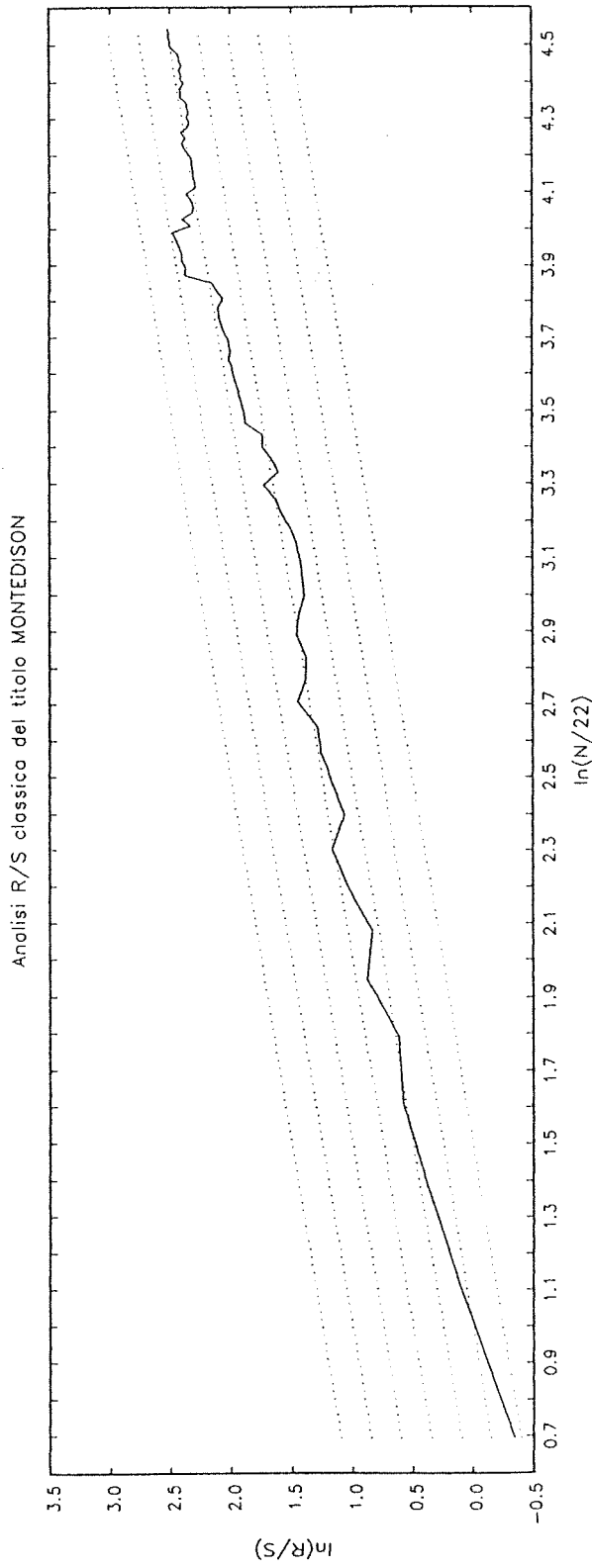


Figura 147

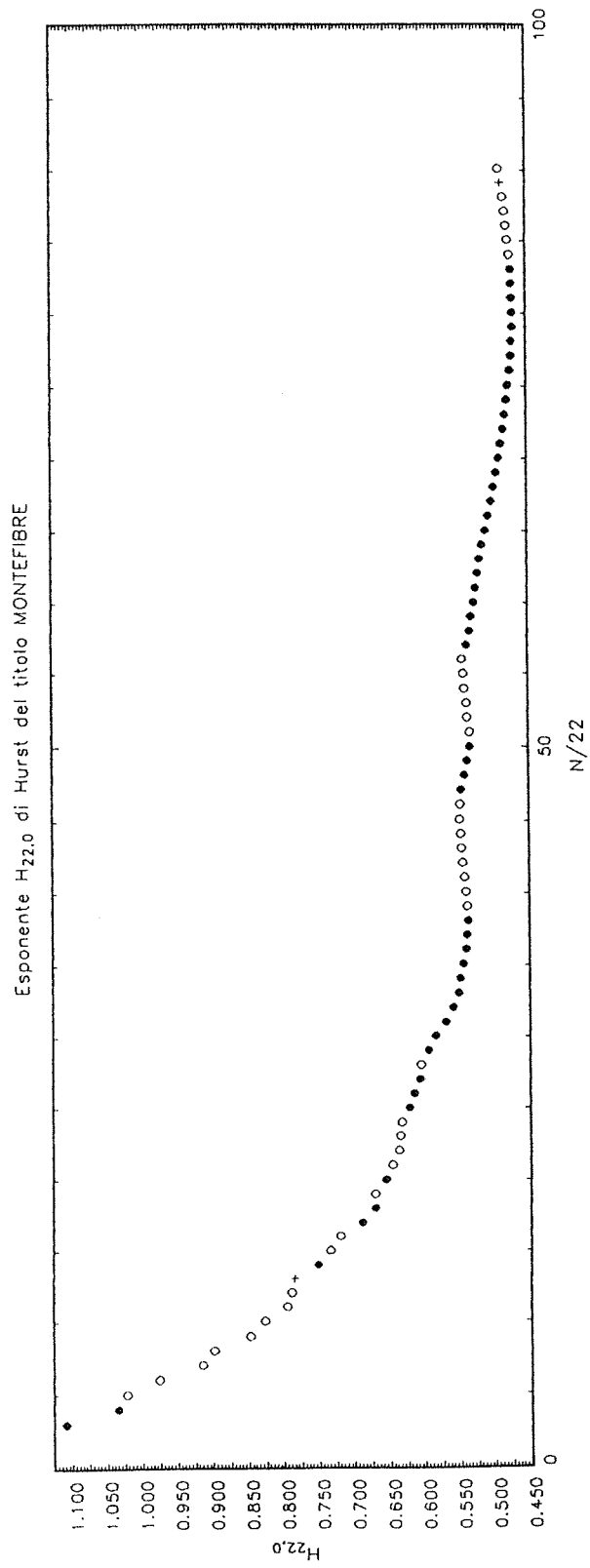
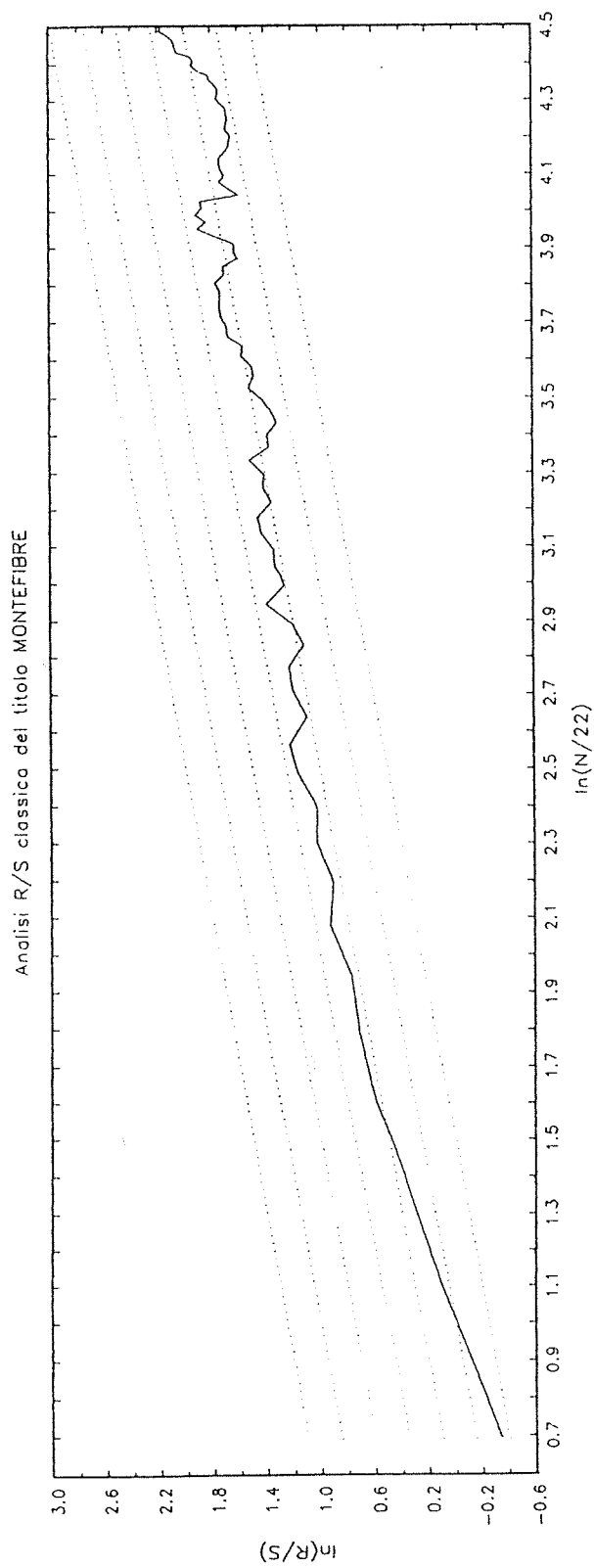


Figura 148

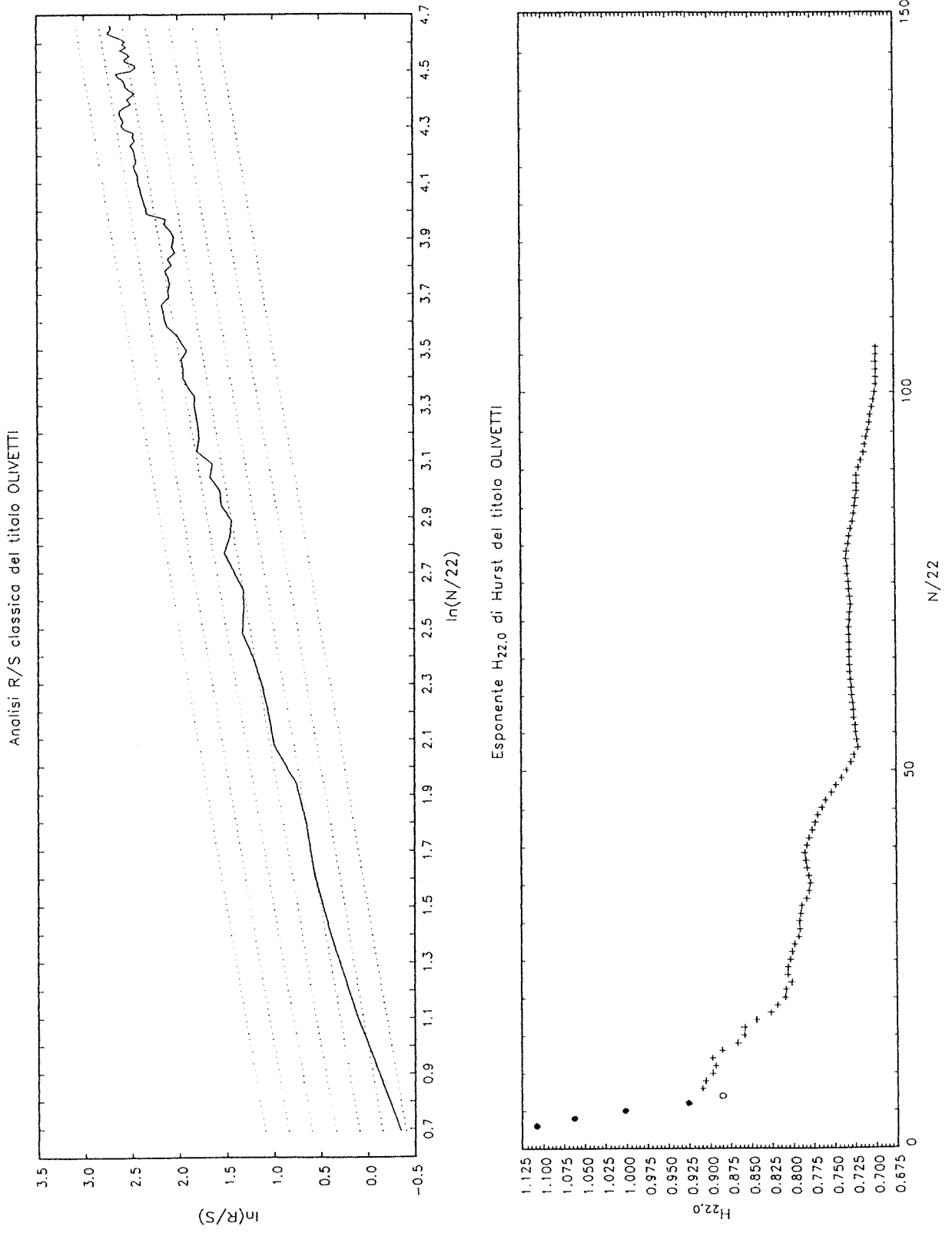


Figura 149

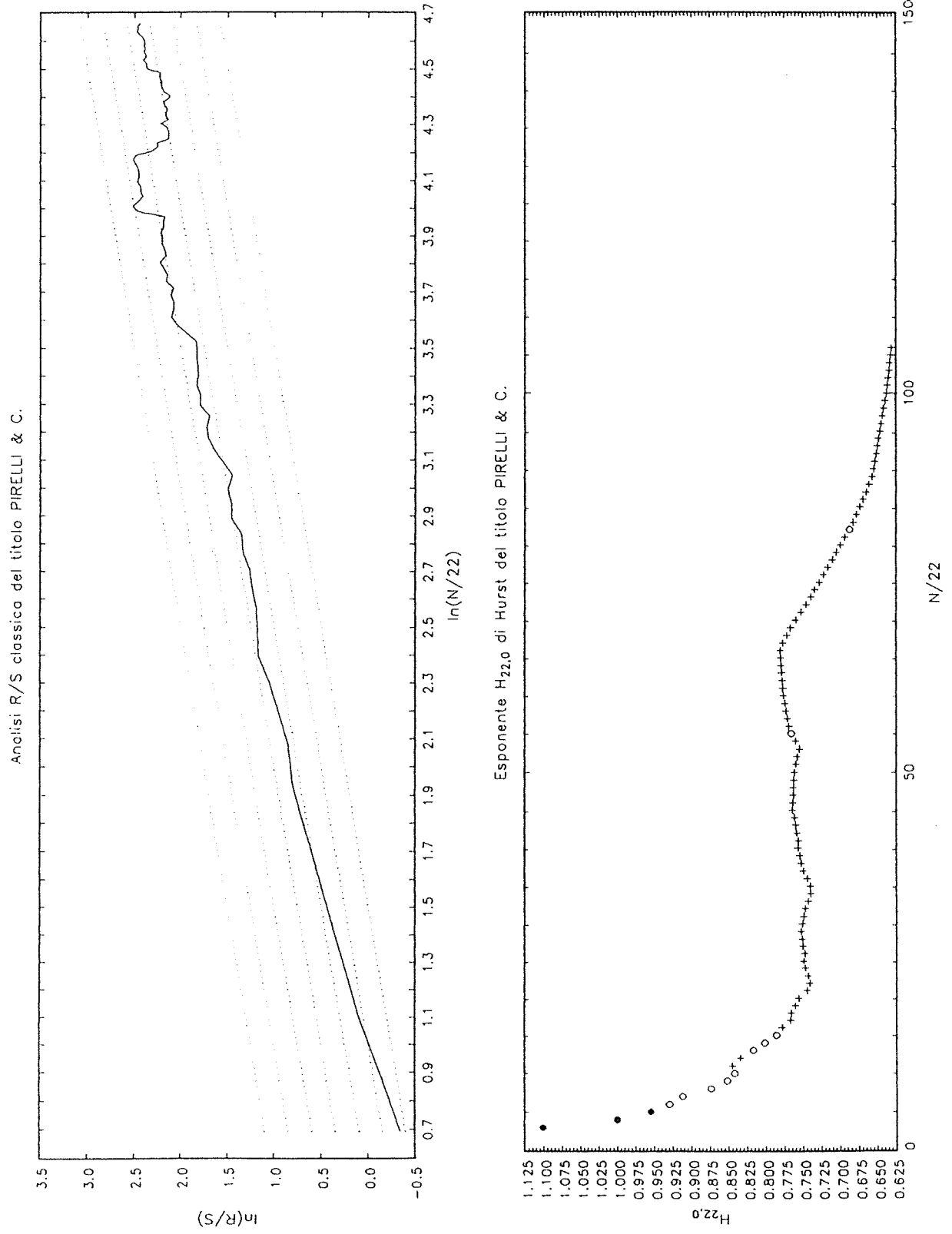


Figura 150

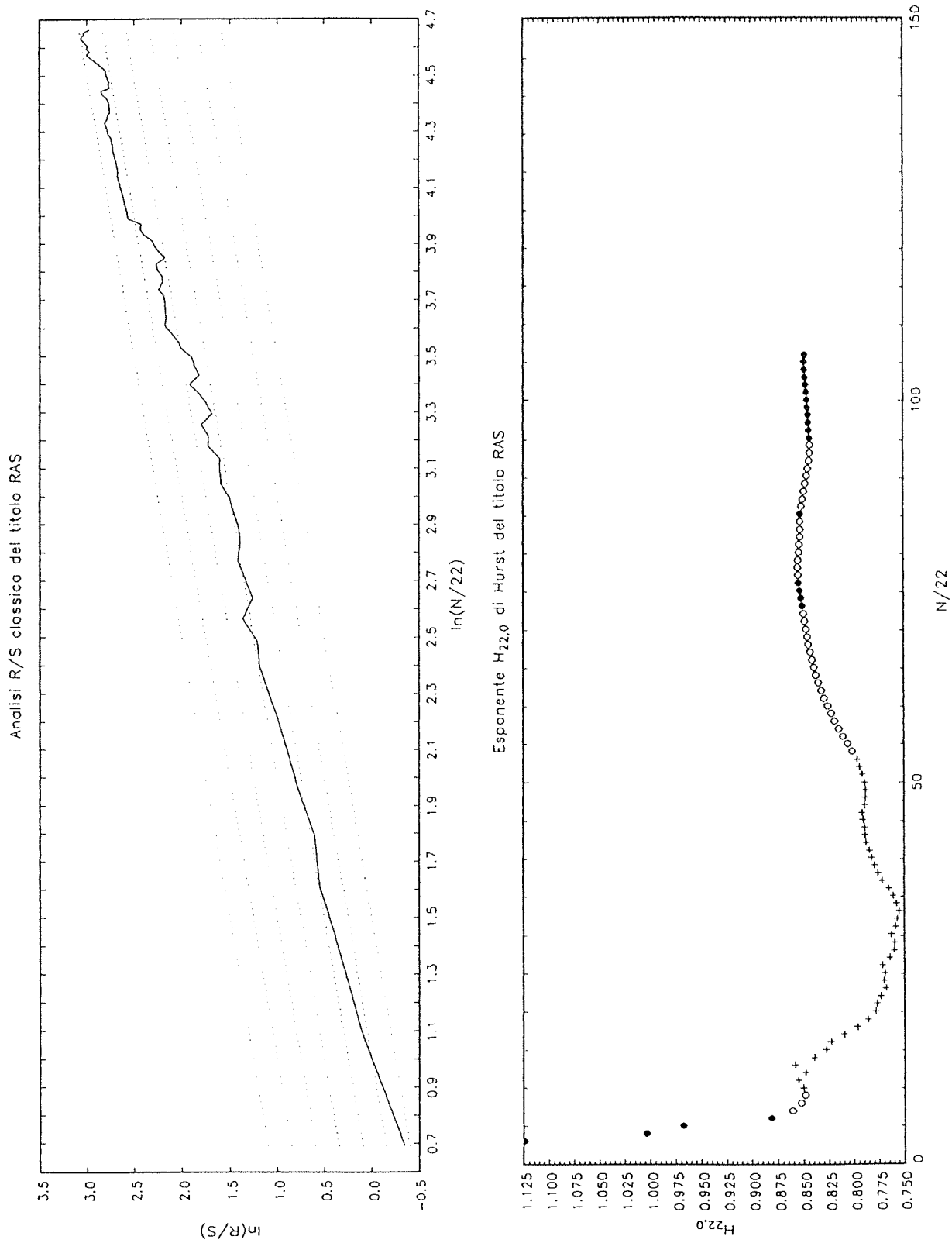




Figura 151

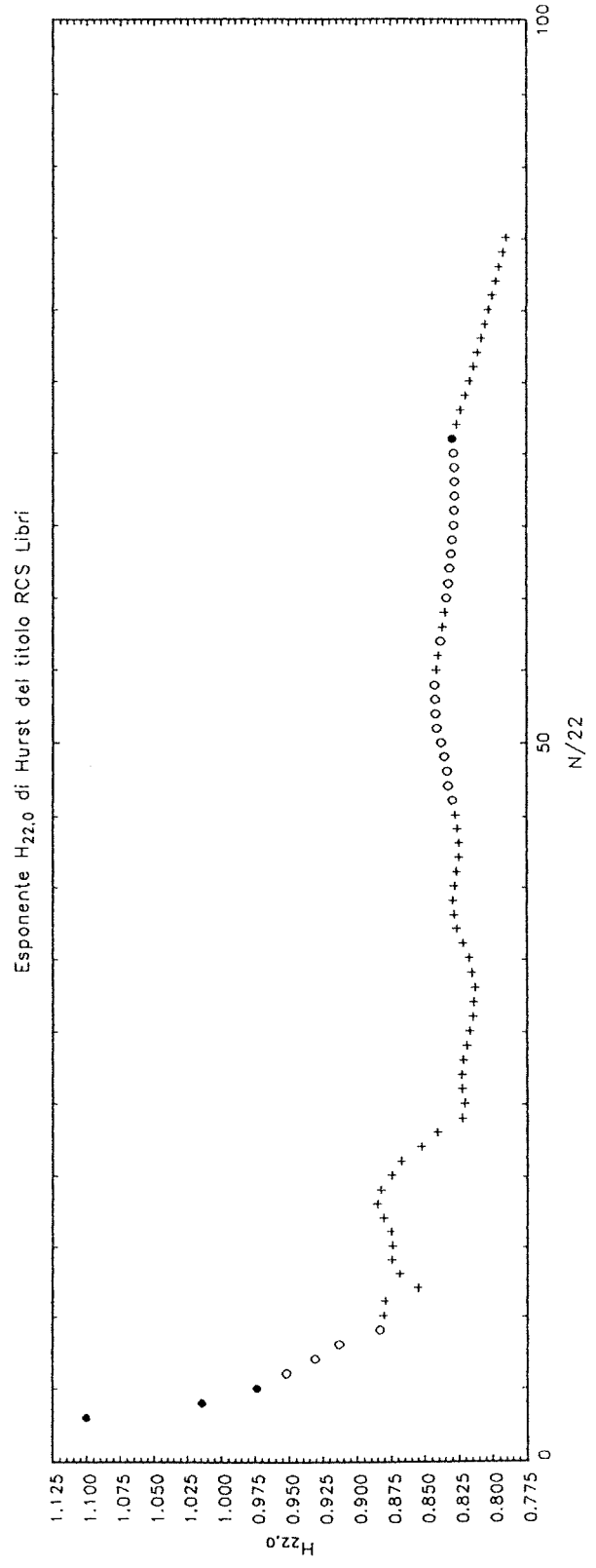
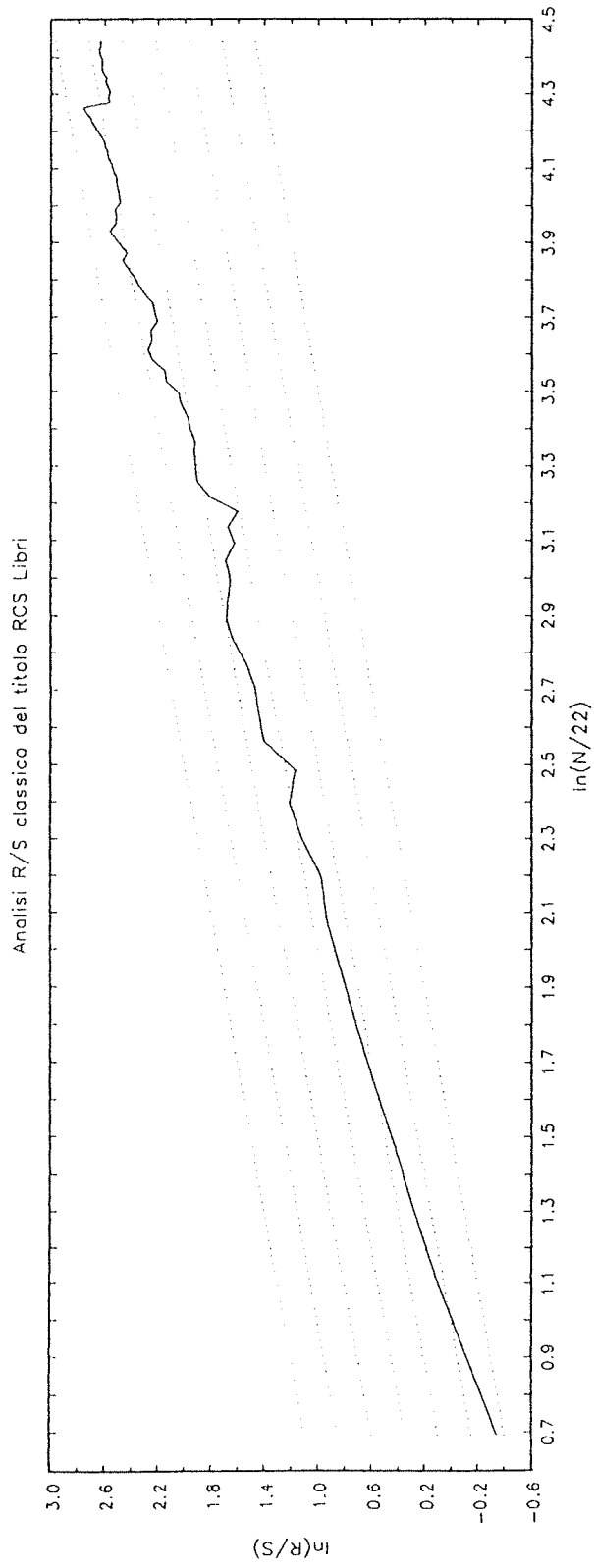


Figura 152

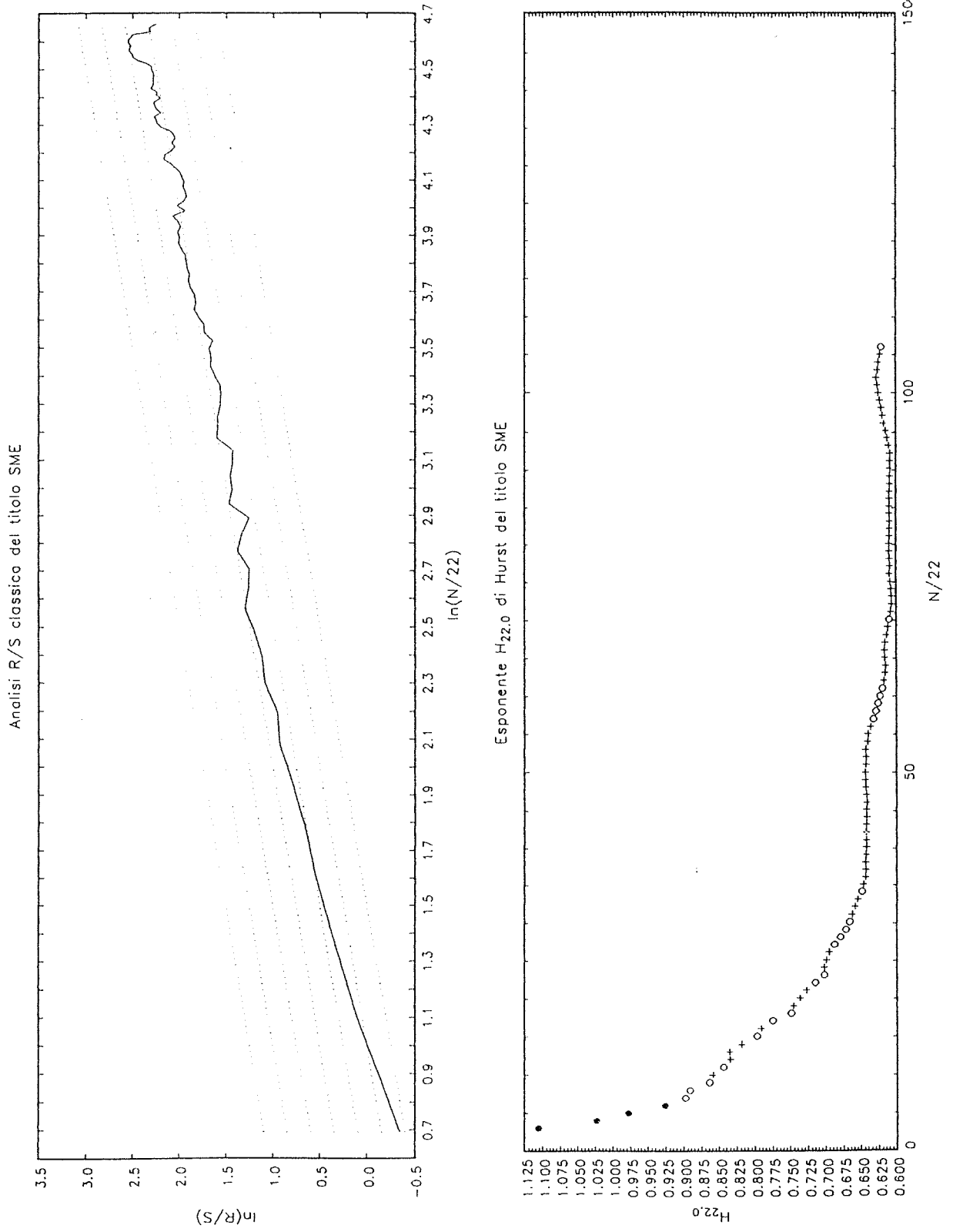


Figura 153

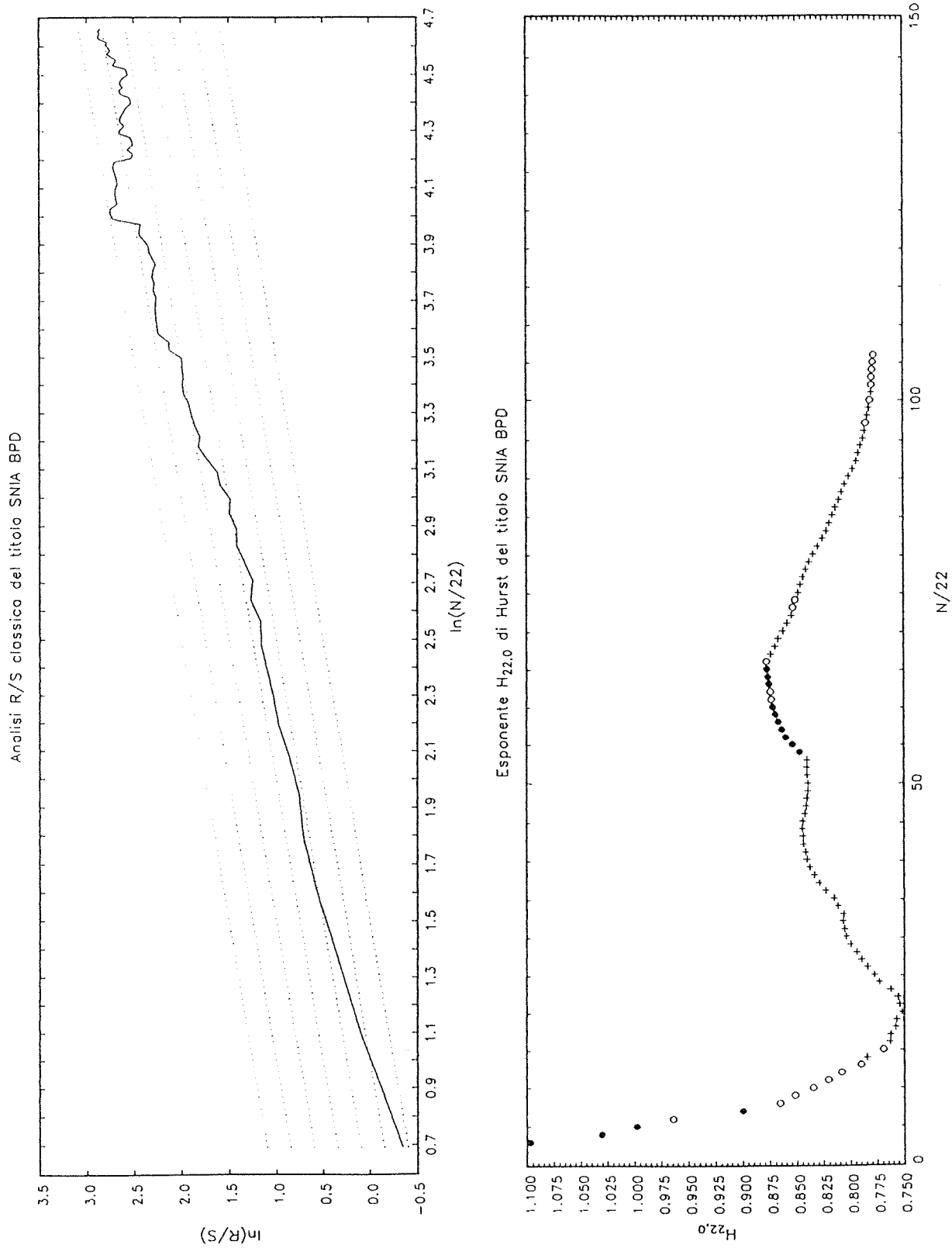


Figura 154

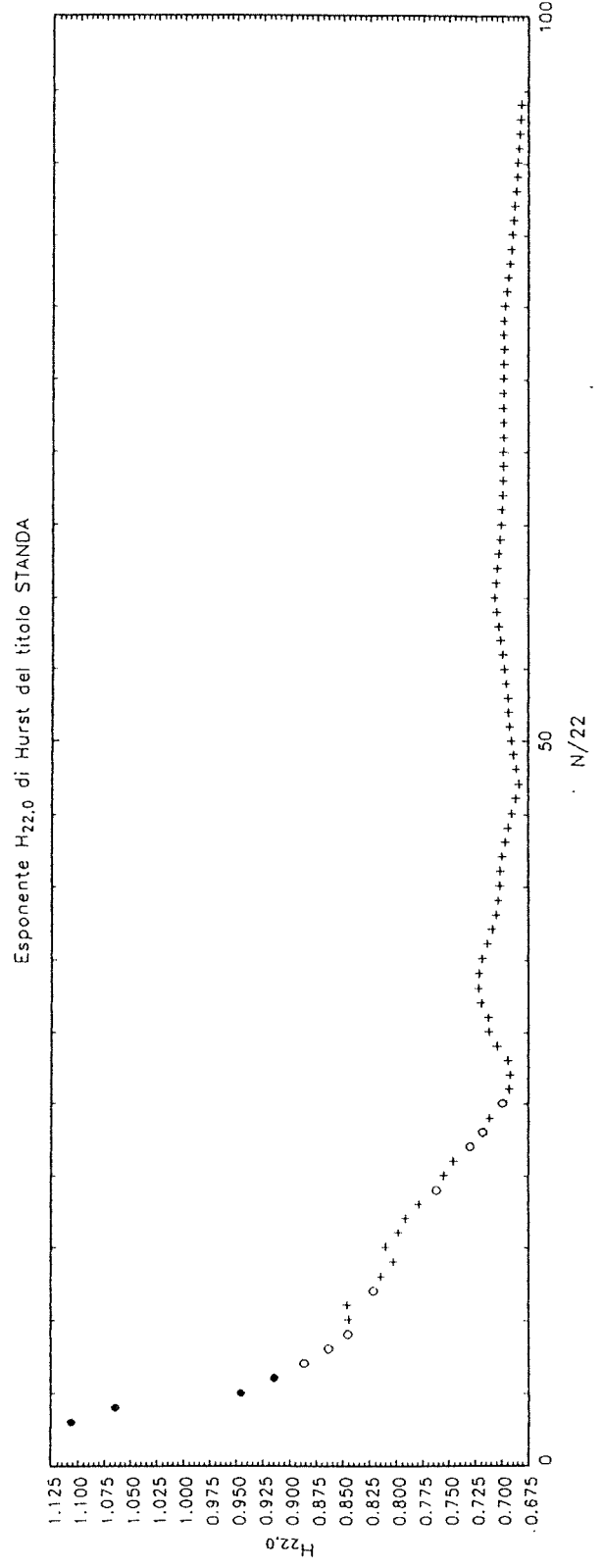
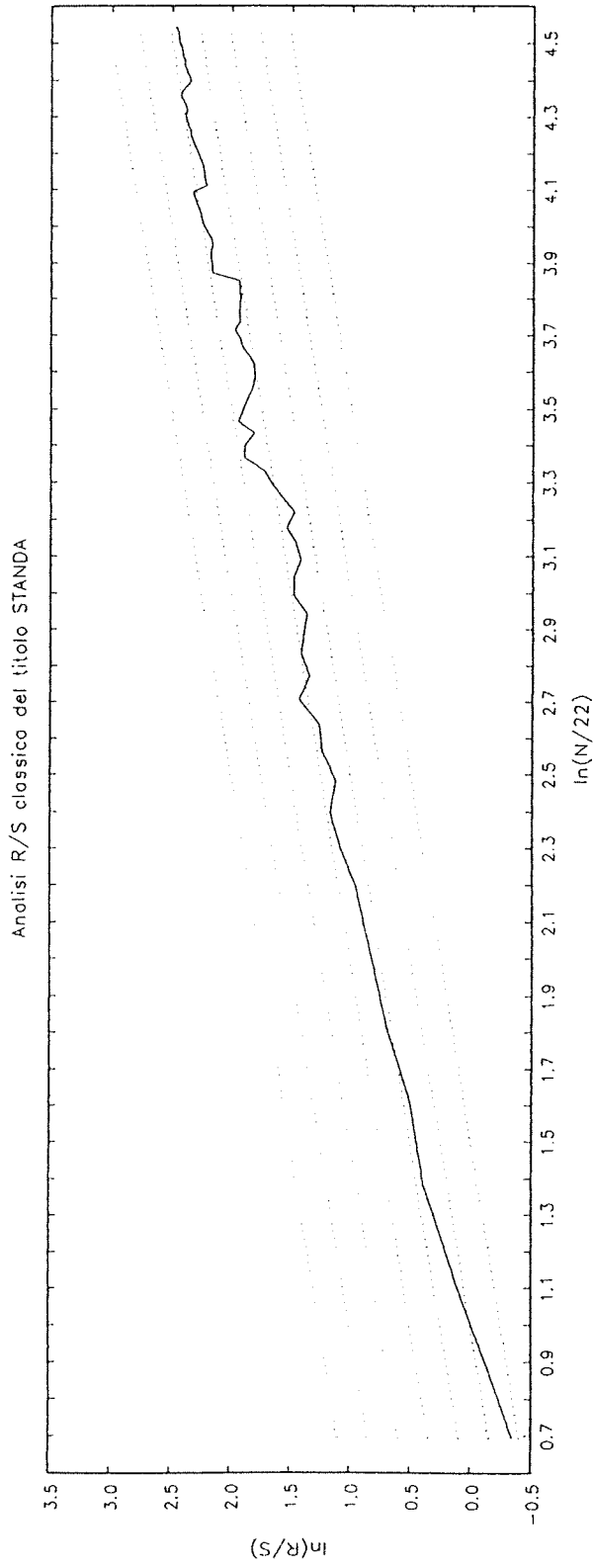


Figura 155

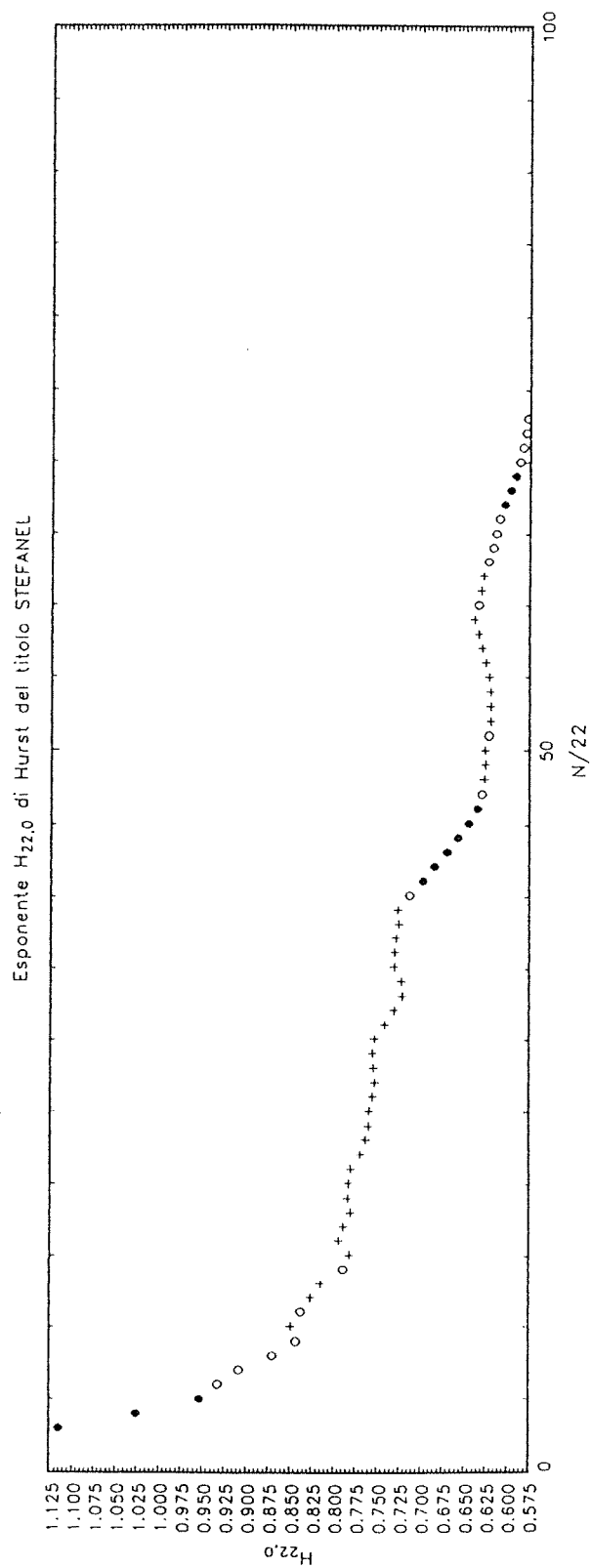
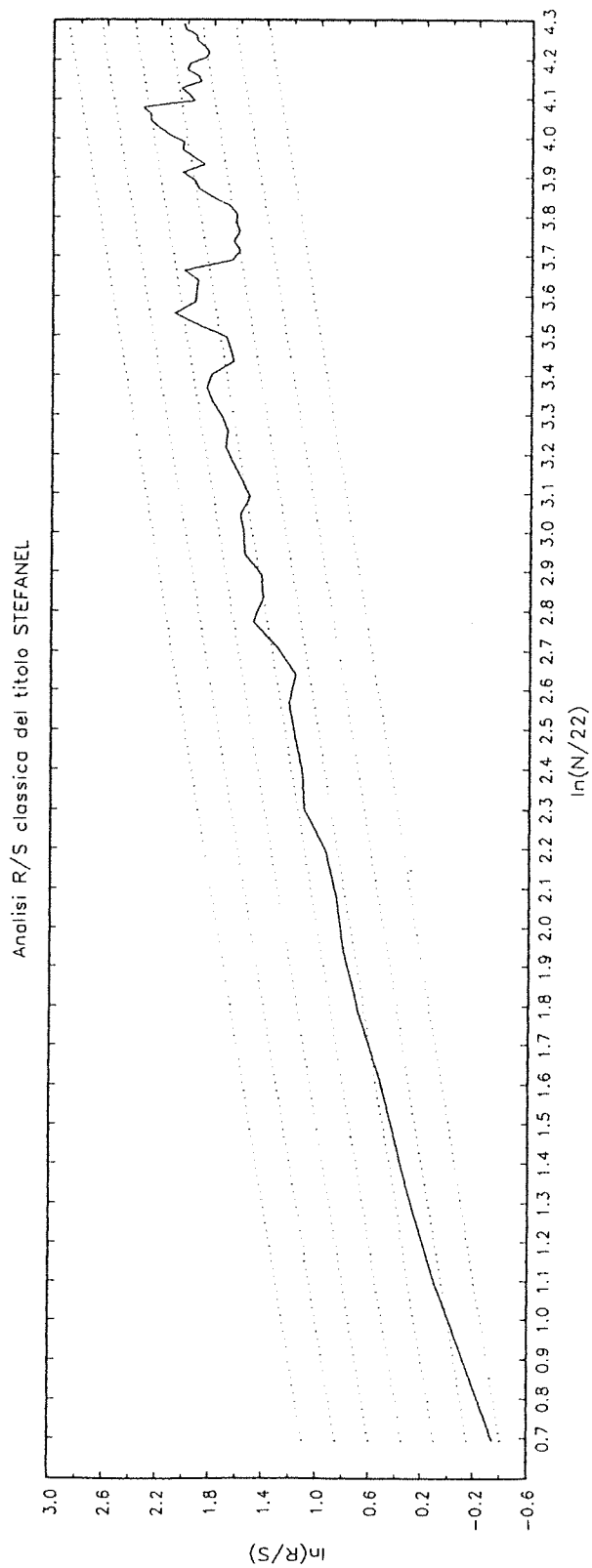
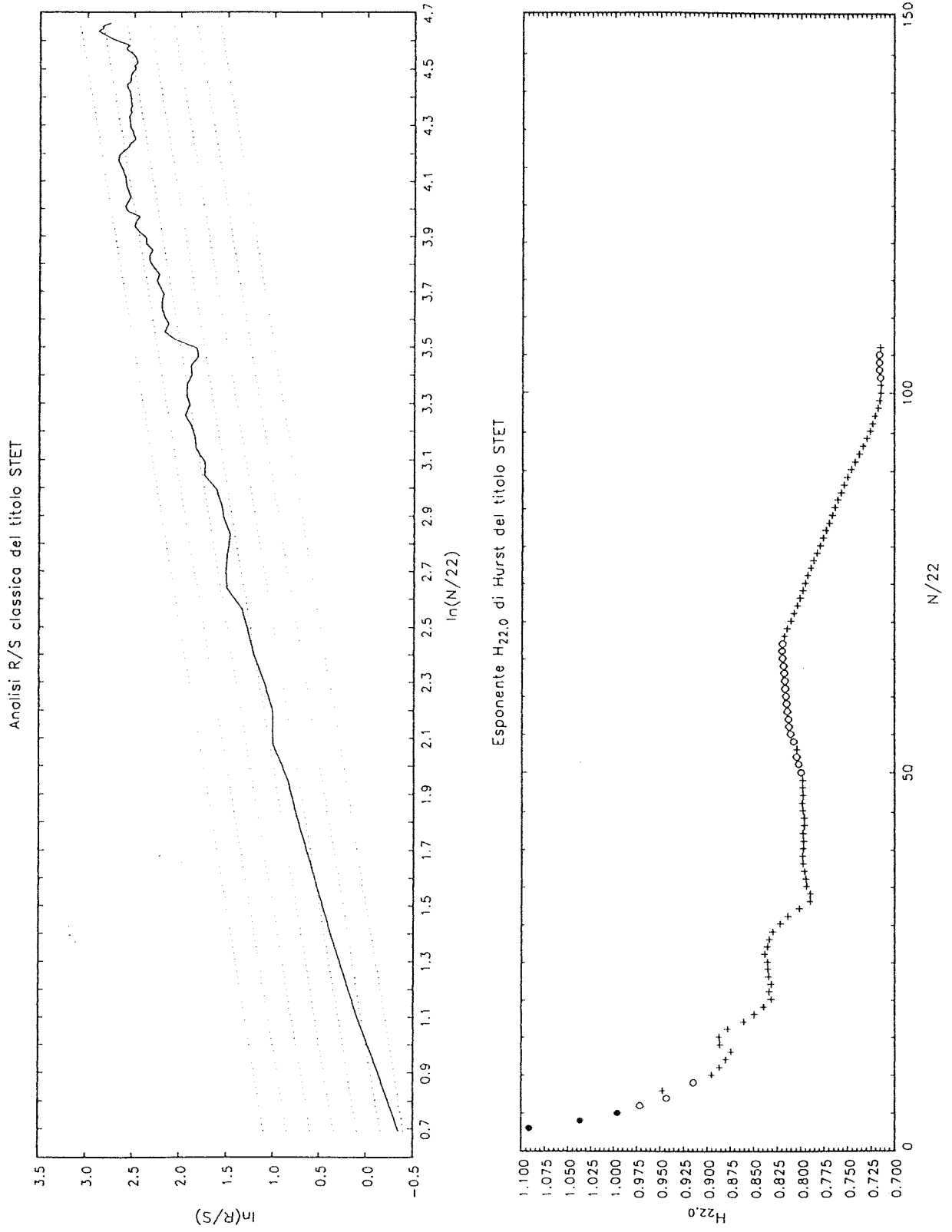


Figura 156



# CAPITOLO VII

## DETERMINISMO NON LINEARE COMPLESSO NEL MERCATO FINANZIARIO ITALIANO

### 1. INTRODUZIONE

Le distinte e, fra di loro, indipendenti analisi del mercato finanziario italiano proposte e condotte nei precedenti **CAPITOLO V** e **CAPITOLO VI** hanno, in sostanza, condotto, in relazione alla distribuzione di probabilità delle variabili casuali  $\ln[P(t + \Delta t)] - \ln[P(t)]$ , con  $t = 1, 2, \dots, N - \Delta t$  per ogni prescelto  $\Delta t$  (che, congiuntamente, specificano un opportuno processo stocastico), a rigettare statisticamente l'ipotesi di sua Normalità, a verificare empiricamente che la congetturata distribuzione di probabilità frattale Pareto-Lévy stabile auto-similare risulta ben adattarsi a quella empirica, a rigettare statisticamente l'ipotesi di sua indipendenza e a verificare empiricamente una sua auto-dipendenza positiva di natura frattale. Risultati empirici relativi ad analoghe analisi dei mercati finanziari sia nazionale che esteri e condotte da molti autori (ad esempio si veda [Mandelbrot B. B., 1963b], [Leitch R. A. *et al.*, 1975], [Greene M. T. *et al.*, 1977], [Greene M. T. *et al.*, 1979], [Simkowitz M. *et al.*, 1980], [Booth G. G. *et al.*, 1982], [Helms B. P. *et al.*, 19..], [Helms B. P. *et al.*, 1985], [Akgiray V. *et al.*, 1988], [Peters E. E., 1989], [Walter C., 1990], [Lo A. W., 1991], [Mantegna R. N.,

1991b), [Allevi E. *et al.*, 1993], [Ambrose B. *et al.*, 1993], [Corazza M. *et al.*, 1993a], [Corazza M. *et al.*, 1993d], [Salzano M., 1993], [Jacobsen B. *et al.*, 1994], [Machones M. *et al.*, 1994] e [Peters E. E., 1994]) hanno condotto a risultati non dissimili da quelli presentati nei due precedenti capitoli. Queste peculiarità hanno indotto molti autori a congetturare processi generatori dei tassi di rendimento logaritmico la cui natura sia caratterizzata, oltre che da una eventuale componente stocastica, anche da una componente deterministica non lineare complessa (ad esempio si veda [Benhabib J. *et al.*, 1981], [Frank M. *et al.*, 1988], [Brock W. A., 1989], [Gori F. *et al.*, 1989], [Scheinkman J. A. *et al.*, 1989], [Brock W. A., 1991], [Hsieh D. A., 1991], [Peters E. E., 1991a], [Peters E. E., 1991b], [Brasolin A. *et al.*, 1992], [Booth G. G. *et al.*, 1992], [DeCoster G. P. *et al.*, 1992], [Malliaris A. G. *et al.*, 1992], [Medio A., 1992], [Allevi E. *et al.*, 1993] e [Peters E. E., 1994]) capace di interpretare e di descrivere sia la “evidente” struttura frattale che la “evidente” struttura di auto-dipendenza.

Questo capitolo propone l’analisi del mercato finanziario italiano, rappresentato da un sottoinsieme, opportunamente scelto, degli indici finanziari e dei titoli azionari specificati nella sezione 3. del **CAPITOLO V**, al fine di verificarne empiricamente la struttura deterministica non lineare complessa. In particolare, nella sezione 2. si illustrano sinteticamente degli aspetti sia definatori che teorici necessari all’impostazione e allo sviluppo dell’analisi; nella sezione 3. si illustrano alcuni dei metodi numerici per la verifica empirica della presenza di caos deterministico più diffusamente utilizzati in letteratura; nella sezione 4. si presentano gli aspetti applicativi impiegati nella conduzione dell’analisi e i risultati ottenuti mediante quest’ultima; nella sezione 5. si propongono alcune osservazioni e considerazioni finali.

## 2. ASPETTI DEFINITORI E TEORICI

Gli aspetti sia definatori che teorici necessari all’impostazione e allo sviluppo dell’analisi del mercato finanziario italiano riguardano, oltre a quanto



trattato nel **CAPITOLO IV**, la conoscenza del concetto di embedding.

(2.A) **Embedding**: in generale, la conoscenza di un indagatore in relazione ad uno specificato sistema dinamico deterministico non è inerente né alla natura dei suoi legami funzionali (rispettivamente,  $\phi[\cdot, \cdot]$  per i sistemi (2.1) e  $g[\cdot]$  per i sistemi (2.2) introdotti nella sezione 2. del **CAPITOLO IV**) né al valore del numero di componenti della sua variabile di stato ( $n$ ) e, di regola, si sostanzia in una serie temporale univariata, specificata mediante un opportuno campionamento, rappresentabile, in generale, come segue

$$\underline{y} \stackrel{def}{=} \{y_i = h(x_{i\tau}), i = 0, 1, \dots, N\} \quad (2.1)$$

dove

$h(\cdot) : I \rightarrow \mathbf{R}$ , con  $I \subset \mathbf{R}^n$ ,

$\tau \in \mathbf{N}^+$ : incremento temporale intercorrente fra due successive rilevazioni del valore della variabile di interesse.

Peraltro, è possibile verificare che, risultando soddisfatte specifiche condizioni, si può utilizzare la serie temporale univariata (2.1) al fine di determinare una nuova serie temporale, detta embedding, che è associata ad un sistema dinamico deterministico “artificiale”, il quale risulta diffeomorfo a quello “vero” (rispettivamente,  $\phi[\cdot, \cdot]$  per i sistemi (2.1) e  $g[\cdot]$  per i sistemi (2.2) introdotti nella sezione 2. del **CAPITOLO IV**). Da ciò si ha che i valori delle quantità di interesse relative al sistema “vero” (quali, ad esempio, la dimensione dell’insieme che specifica l’attrattore, gli esponenti caratteristici di Lyapunov, ...) si possono determinare mediante l’utilizzo del sistema “artificiale”. L’illustrazione di tale metodo, detto metodo della ricostruzione dell’attrattore nello spazio degli stati ritardati, necessita previamente della seguente definizione (per i cui maggiori dettagli si veda [Eckmann J.-P. *et al.*, 1985], [Lorenz H. W., 1989], [Brasolin A. *et al.*, 1992], [Medio A., 1992], [Casaleggio A. *et al.*, 1993] e [Rinaldi S., 1993c]).

**Definizione 2.A.1.** *Siano dati una serie temporale rappresentabile nella forma*

$$\underline{y} \stackrel{def}{=} \{y_i = h(x_{i\tau}), i = 0, 1, \dots, N\} \quad (2.2)$$

e un numero intero  $1 \leq m \leq N$ . Si definisce *m-history* ognuno dei vettori

$m$ -dimensionali

$$\underline{y}_j^m \stackrel{def}{=} (y_j, y_{j-1}, \dots, y_{j-m+1}), j = m-1, m, \dots, N \quad (2.3)$$

e si definisce embedding l'insieme

$$\underline{y}^{m,N} \stackrel{def}{=} \{\underline{y}_j^m, j = m-1, m, \dots, N\}. \quad (2.4)$$

Ora, è possibile verificare che il sistema dinamico deterministico “artificiale” a cui è associato l’embedding e l’indagato sistema deterministico “vero” risultano diffeomorfi se sono soddisfatte le seguenti condizioni (per i cui maggiori dettagli si veda [Takens F., 1981]):

(2.A.1) gli elementi della serie temporale  $\underline{y}^{m,N}$  appartengono all’insieme che specifica l’attrattore del sistema “artificiale”;

(2.A.2)  $\phi[\cdot, \cdot]$  per i sistemi (2.1) o  $g[\cdot]$  per i sistemi (2.2), introdotti nella sezione 2. del **CAPITOLO IV** e  $h[\cdot]$  appartengono alla classe  $C^1$ ;

(2.A.3) in relazione al numero di componenti, rispettivamente, delle  $m$ -histories e delle variabili di stato associate al sistema “vero”, si ha

$$m \geq 2n + 1. \quad (2.6)$$

### 3. METODI NUMERICI PER LA VERIFICA DELLA PRESENZA DI CAOS DETERMINISTICO

In questa sezione si illustrano alcuni dei metodi numerici per la verifica empirica della presenza, o meno, di caos deterministico più diffusamente utilizzati in letteratura (ad esempio si veda [Frank M. *et al.*, 1988], [Scheinkman J. A. *et al.*, 1989], [Perli Traverso R. *et al.*, 1989/90], [Peters E. E., 1991a], [Peters E. E., 1991b], [Brasolin A. *et al.*, 1992], [Booth G. G., *et al.*, 1992], [Malliaris A. G. *et al.*, 1992], [Allevi E. *et al.*, 1993] e [Casaleggio A. *et al.*, 1993]), metodi numerici che si possono considerare come

una sorta di stimatori dei rilevatori di caoticità deterministica presentati nelle sezioni 3. e 4. del **CAPITOLO IV**. In particolare, tali metodi rilevano empiricamente la presenza, o meno, di quegli aspetti teorici associati alle dinamiche deterministiche non lineari complesse in regime caotico relativi sia alla loro natura frattale che alla loro dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali.

(3.A) Dimensione di correlazione  $D_C$ : questo metodo numerico permette la determinazione del valore della dimensione (intera o frazionaria) dell'insieme che specifica l'attrattore del sistema indagato e, dunque, risulta una sorta di stimatore delle dimensioni presentate nella sezione 4. del **CAPITOLO IV**. In sostanza, tale metodo numerico, congetturate soddisfatte le condizioni (2.A.1), (2.A.2) e (2.A.3), si basa sulla misurazione della correlazione spaziale esistente tra le orbite associate al sistema dinamico deterministico "artificiale" che partono da due distinte condizioni iniziali. È da porre in evidenza come, l'esistenza di tale correlazione spaziale, si abbia per il congetturato soddisfacimento della condizione (2.A.1). Al fine di misurare tale correlazione si utilizza la seguente somma di correlazione, detta anche integrale di correlazione (per i cui maggiori dettagli si veda [Grassberger P. *et al.*, 1983a]):

$$C_m(r) \stackrel{def}{=} \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M H(r - \|\underline{y}_i^m - \underline{y}_j^m\|) \quad (3.1)$$

dove

$C_m(\cdot)$ : somma di correlazione in corrispondenza a un prefissato  $m$ ,

$r \in \mathbf{R}^+$ ,

$M$ : numerosità campionaria dell'embedding,

$H(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \leq 0 \\ 1 & \text{se } z > 0 \end{cases}$  : funzione di Heaviside.

In termini qualitativi, la somma di correlazione  $C_m(r)$  risulta una sorta di frequenza relativa associata al verificarsi del fatto che la distanza intercorrente fra due distinti elementi appartenenti all'embedding sia minore di un prefissato valore  $r$ . In particolare, è possibile verificare che esiste la seguente relazione tra la somma di correlazione e la dimensione (per l'appunto detta di correlazione) dell'insieme che specifica l'attrattore del

sistema indagato (ad esempio si veda [Grassberger P. *et al.*, 1983a], [Theiler J., 1988], [Casaleggio A. *et al.*, 1993] e [Cerutti S. *et al.*, 1993]):

$$C_m(r) = \Phi(r)r^{D_C} + o(r) \quad (3.2)$$

dove

$\Phi(r) : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$  che, si congettura, sia tale che  $\lim_{r \rightarrow 0} \{\ln[\Phi(r)]/\ln(r)\} = 0$ ,  
 $D_C$ : dimensione di correlazione.

È quasi superfluo porre in evidenza come, dato  $r > 0$  opportunamente piccolo, in termini approssimati, si abbia

$$\ln[C_m(r)] \approx \ln[\Phi(r)] + D_C \ln(r) \quad (3.3)$$

mentre, in termini esatti, si abbia

$$\ln\{\lim_{r \rightarrow 0} [C_m(r)]\} = \ln\{\lim_{r \rightarrow 0} [\Phi(r)r^{D_C} + o(r)]\}, \quad (3.4.1)$$

da cui, mediante elementari passaggi,

$$D_C = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln[C_m(r)]}{\ln(r)} - \frac{\ln[\Phi(r)]}{\ln(r)} \right\}. \quad (3.4.2)$$

In relazione alla dimensione di correlazione  $D_C$  è da porre in evidenza quanto segue:

(3.A.1) è possibile verificare come, relativamente al congetturato valore del limite inerente alla  $\Phi(r)$ , questo, talvolta, non esista (ad esempio si veda [Theiler J., 1988] e [Smith R. L., 1992]);

(3.A.2) in relazione alla dimensione  $D_C$ , di regola, non risulta possibile associarle né un test statistico, come in relazione agli stimatori, né un campo di variazione, come in relazione agli indici, al fine di verificarne la significatività;

(3.A.3) è possibile verificare come, relativamente alla dimensione di Hausdorff  $D_H$ , presentata nella sezione 4. del **CAPITOLO IV**, si abbia  $D_C \leq D_H$  (ad esempio si veda [Lorenz H. W., 1989] e [Medio A., 1992]);

(3.B) Tasso medio di distruzione/creazione di informazione  $KS$ : questo metodo numerico permette la determinazione del valore del tasso medio di distruzione/creazione di informazione da parte del sistema indagato nel corso della sua evoluzione temporale e, dunque, risulta una sorta di stimatore della predicibilità di tale sistema (per maggiori dettagli si veda la sezione 5. del **CAPITOLO IV**). In sostanza, tale metodo numerico, congetturate soddisfatte le condizioni (2.A.1), (2.A.2) e (2.A.3), si basa sulla misurazione della variazione della correlazione spaziale  $C_m(r)$  esistente tra le orbite associate al sistema dinamico deterministico “artificiale” che partono da due diverse condizioni iniziali in corrispondenza di distinti valori di  $m$ . Al fine di misurare tale variazione si utilizza il seguente tasso di variazione logaritmica (per i cui maggiori dettagli si veda [Grassberger P. *et al.*, 1983b], [Lorenz H. W., 1989], [Medio A., 1992], [Casaleggio A., *et al.*, 1993] e [Cerutti S. *et al.*, 1993]):

$$KS \stackrel{def}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2(m_2 - m_1)\tau} \ln \frac{C_{m_1}(r)}{C_{m_2}(r)}, \quad m_1 < m_2 \quad (3.5)$$

dove, si ricorda,

$\tau \in \mathbb{N}^+$ : incremento temporale intercorrente fra due successive rilevazioni del valore della variabile di interesse.

In termini qualitativi, tale tasso risulta una sorta di misura percentuale, al variare di  $m$ , della variazione subita dal numero di coppie di distinti elementi appartenenti all’embedding per i quali si ha che la distanza è minore di  $r$ .

In relazione al tasso medio di distruzione/creazione di informazione  $KS$  da parte del sistema indagato è da porre in evidenza quanto segue:

(3.B.1) è possibile verificare come, relativamente al tasso  $KS$ , questo converga ad analoghi, seppur differentemente definiti, “stimatori” della predicibilità del sistema indagato per i quali si ha una maggiore difficoltà applicativo-computazionale rispetto al primo (ad esempio si veda [Casaleggio A., *et al.*, 1993]);

(3.B.2) anche in relazione al tasso  $KS$ , di regola, non risulta possibile associargli né un test statistico, come in relazione agli stimatori, né un campo di variazione, come in relazione agli indici, al fine di verificarne la significatività;

(3.B.3) è possibile verificare come, relativamente all'entropia di Kolmogorov-Sinai  $h(\mu)$ , presentata nella sezione 5. del **CAPITOLO IV**, si abbia  $KS \leq h(\mu) \leq \sum_{j=1}^n \Lambda_j^+$ .

(3.C) Massimo esponente caratteristico di Lyapunov  $\Lambda_{max}$ : questo metodo numerico permette la determinazione del valore del massimo esponente caratteristico di Lyapunov associato al sistema indagato e, dunque, risulta una sorta di stimatore, seppur parziale, della dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali presentata nella sezione 3. del **CAPITOLO IV**. In sostanza, tale metodo numerico, congetturate soddisfatte le condizioni (2.A.1), (2.A.2) e (2.A.3), si basa sulla misurazione, che si ha al fluire del tempo, dell'eventuale incremento della distanza esistente tra le orbite associate al sistema dinamico deterministico "artificiale" che partono da due diverse condizioni iniziali, secondo la direzione di loro massima divergenza. Al fine di misurare tale incremento si utilizza il seguente tasso di variazione logaritmica (per i cui maggiori dettagli si veda [Wolf A. *et al.*, 1985], [Eckman J.-P. *et al.*, 1986], [Medio A., 1992] e la sezione 4. del **CAPITOLO IV**):

$$\Lambda_{max} \stackrel{def}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{y_j \rightarrow x_j} \frac{1}{t} \ln \frac{\|g^t(x) - g^t(y)\|}{|x_j - y_j|} \quad (3.6)$$

dove

$j$ : direzione di massima divergenza opportunamente determinata (ad esempio si veda [Wolf A. *et al.*, 1985], [Eckman J.-P. *et al.*, 1986] e [Medio A., 1992]). In termini qualitativi, tale tasso risulta una sorta di misura percentuale, al fluire del tempo, dell'eventuale incremento subito dalla specificata distanza. Anche in relazione al massimo esponente caratteristico di Lyapunov  $\Lambda_{max}$  è da porre in evidenza come, di regola, non risulti possibile associargli né un test statistico, come in relazione agli stimatori, né un campo di variazione, come in relazione agli indici, al fine di verificarne la significatività.

#### 4. ASPETTI APPLICATIVI E RISULTATI

In questa sezione si presentano gli aspetti applicativi impiegati nella conduzione dell'analisi del mercato finanziario italiano ed i risultati ottenuti

mediante quest'ultima. In particolare, l'analisi condotta si articola, sinteticamente, nelle due seguenti fasi:

(4.A) nella prima fase, in un primo momento si utilizzano le serie temporali dei valori dei tassi di rendimento logaritmico settimanale ( $\Delta t = 5 = \tau$ ) dell'indice finanziario COMIT e del titolo azionario FIAT, specificate nella sezione 3. del **CAPITOLO V**, per determinare le corrispondenti serie temporali relative al sistema "artificiale". È da porre in evidenza come, sia in questa fase dell'analisi che nelle due successive, il mercato finanziario italiano risulti "sinteticamente" rappresentato da un indice e da un titolo azionario, anziché dall'insieme di indici e di titoli specificati nella sezione 3. del **CAPITOLO V**. Questo si ha per l'esigenza di ridurre gli indesiderati effetti derivanti dall'"eccessiva" sensibilità sia all'eventuale termine di errore che all'ampiezza del campione mostrata, in generale, dai metodi numerici illustrati nella sezione 3.. Infatti, a tal fine, in analogia a quanto proposto in letteratura (ad esempio si veda [Scheinkman J. A. *et al.*, 1989]), non si sono utilizzate né serie temporali "eccessivamente" affette da un termine di errore (di regola, quelle relative ad un incremento temporale giornaliero,  $\Delta t = 1$ ) né serie temporali aventi numerosità campionaria "eccessivamente" ridotta (quelle relative ad un incremento temporale mensile,  $\Delta t = 22$ ) e, tra quelle rimanenti (relative ad un incremento temporale settimanale,  $\Delta t = 5$ ), si sono utilizzate quelle aventi la massima numerosità campionaria, rispettivamente, fra gli indici e fra i titoli. In un secondo ed ultimo momento, si utilizzano le specificate serie temporali relative al sistema dinamico "artificiale" per determinare il valore della dimensione di correlazione  $D_C$ .

(4.B) Nella seconda fase, si utilizzano le serie temporali relative al sistema dinamico "artificiale" specificato in (4.A) per determinare il valore, espresso in bits/ $\Delta t$  o, equivalentemente, in bits/ $\tau$ , del tasso medio di distruzione/creazione di informazione  $KS$  da parte del sistema dinamico indagato.

(4.C) Nella terza ed ultima fase, si utilizzano le serie temporali relative al sistema dinamico "artificiale" specificato in (4.A) per determinare il valore, espresso in bits/ $\Delta t$  o, equivalentemente, in bits/ $\tau$ , del massimo esponente caratteristico di Lyapunov  $\Lambda_{max}$ .

#### 4.A. Fase I

In questa fase, specificate le serie temporali relative al sistema “artificiale” ponendo  $\Delta t = 5 = \tau$ , le si utilizzano per determinare il valore della dimensione di correlazione  $D_C$  dell’insieme che specifica l’attrattore del sistema indagato mediante il metodo numerico presentato in (3.A). In particolare, al fine di computare numericamente l’operazione di limite che figura nell’ultimo membro della (3.4.2), si è determinato il valore dell’argomento di tale limite in corrispondenza di prefissati distinti valori della distanza,  $r_1, r_2, \dots, r_H$ , tali che  $r_H < r_{H-1} < \dots < r_1$ . In generale, tali valori devono essere opportunamente specificati. Infatti, se si verifica che

$$r_h > \max_{1 \leq i \leq M} \left\{ \max_{1 \leq j \leq M} \{ \|\underline{y}_i^m - \underline{y}_j^m \| \} \right\}, \forall h = 1, 2, \dots, H \quad (4.1)$$

allora si ha che

$$H(r_h - \|\underline{y}_i^m - \underline{y}_j^m \|) = 1, \forall h = 1, 2, \dots, H, \forall i, j = 1, 2, \dots, M, \quad (4.2)$$

da cui si ha che

$$C_m(r_h) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M^2} M^2 = 1 \implies D_C = 0, \forall h = 1, 2, \dots, H \quad (4.3)$$

mentre, se si verifica che

$$r_h < \min_{1 \leq i \leq N} \left\{ \min_{1 \leq j \leq N} \{ \|\underline{y}_i^m - \underline{y}_j^m \| \} \right\} \forall h = 1, 2, \dots, H \quad (4.4)$$

allora si ha che

$$H(r_h - \|\underline{y}_i^m - \underline{y}_j^m \|) = 0, \forall h = 1, 2, \dots, H, \forall i, j = 1, 2, \dots, M, \quad (4.5)$$

da cui si ha che

$$C_m(r_h) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M^2} 0 = 0 \implies D_C \rightarrow -\infty, \forall h = 1, 2, \dots, H. \quad (4.6)$$



In particolare, si determina il valore dell'operazione di limite specificata e, dunque, il valore della dimensione di correlazione  $D_C$  dell'insieme che specifica l'attrattore del sistema indagato, in corrispondenza di quei valori della distanza  $r$  per i quali si ha che il valore della dimensione di correlazione  $D_C$  risulta, approssimativamente, costante (ad esempio si veda [Medio A., 1992]).

Infine, è da porre in evidenza come, a causa dell'“ignoranza” dell'indagatore in relazione al valore del numero di componenti della variabile di stato del sistema ( $n$ ) e, dunque, del numero di componenti delle  $m$ -histories ( $m \geq 2n + 1$ ), risulti necessario computare numericamente il valore della dimensione di correlazione  $D_C$  in corrispondenza di prefissati e crescenti valori di  $m$ . In particolare, si determina il valore di questa dimensione in corrispondenza di quel valore di  $m$ ,  $m^*$ , tale che, per ogni  $m > m^*$ , si abbia  $\hat{D}_{C,m} \cong \hat{D}_{C,m}$  (ad esempio si veda [Casaleggio A. *et al.*, 1993] e [Cerutti S. *lit et al.*, 1993]).

I risultati così ottenuti sono presentati in Tabella 4.A.1 per l'indice COMIT e in Tabella 4.A.2 per il titolo FIAT.

Tabella 4.A.1

m	$r_1 = 0.25^1$	$r_2 = 0.25^2$	$r_3 = 0.25^3$	$r_4 = 0.25^4$	$r_5 = 0.25^5$	$r_6 = 0.25^6$
1	0.001	0.056	0.286	0.458	0.561	0.620
3	0.003	0.248	0.959	1.209	1.009	0.841
5	0.007	0.507	1.537	1.261	1.009	0.841
7	0.012	0.816	1.673	1.261	1.009	0.841
9	0.018	1.156	1.681	1.260	1.008	0.840
11	0.025	1.511	1.680	1.260	1.009	0.840
21	0.122	2.495	1.678	1.258	1.007	0.839
31	0.342	2.513	1.676	1.257	1.005	0.838
41	0.709	2.510	1.674	1.255	1.004	0.837

Tabella 4.A.2

m	$r_1 = 0.25^1$	$r_2 = 0.25^2$	$r_3 = 0.25^3$	$r_4 = 0.25^4$	$r_5 = 0.25^5$	$r_6 = 0.25^6$
1	0.000+	0.120	0.357	0.511	0.600	0.638
3	0.004	0.466	1.142	1.184	0.960	0.800
5	0.020	0.882	1.572	1.200	0.960	0.800
7	0.053	1.344	1.600	1.200	0.960	0.800
9	0.103	1.792	1.600	1.199	0.959	0.800
11	0.169	2.149	1.598	1.199	0.959	0.799

21	0.708	2.393	1.595	1.196	0.957	0.798
31	1.484	2.388	1.592	1.194	0.955	0.796
41	2.368	2.383	1.589	1.192	0.593	0.794

Dai risultati presentati in Tabella 4.A.1 e in Tabella 4.A.2 si hanno le seguenti osservazioni e considerazioni:

(4.A.1) in relazione alla dimensione di correlazione dell'insieme che specifica l'attrattore del sistema dinamico che genera i tassi di rendimento logaritmico settimanale, questa, avendo come intervallo di variazione "stabilizzato", rispettivamente, [1.260, 1.681] per l'indice COMIT e [1.200, 1.600] per il titolo FIAT in corrispondenza di "ragionevoli" valori di  $r$  (ovvero, né troppo grandi né troppo piccoli), risulta frazionaria e, dunque, conferma la caoticità deterministica di tale sistema;

(4.A.2) relativamente alla numerosità degli elementi delle  $m$ -histories associata all'intervallo di variazione "stabilizzato" della dimensione di correlazione, questa, risultando, rispettivamente,  $m = 9$  per l'indice COMIT e  $m = 7$  per il titolo FIAT, conferma, analogamente alla precedente osservazione, la "prevalente" caratterizzazione deterministica del sistema dinamico specificato in (4.A.1), poichè, qualora fosse "prevalente" la caratterizzazione stocastica, è possibile verificare che si avrebbe  $D_C \rightarrow +\infty$  quando  $m \rightarrow +\infty$  (per maggiori dettagli si veda [Malliaris A. G. *et al.*, 1992] e [Cerutti S. *et al.*, 1993]);

(4.A.3) in relazione alla dimensione delle variabili di stato associate al sistema dinamico "vero" indagato, avendo dalla (2.6), mediante alcuni elementari passaggi, che

$$n \leq \frac{m-1}{2}, \quad (4.8)$$

e utilizzando i valori della numerosità degli elementi delle  $m$ -histories puntualizzati in (4.A.2), si ha, rispettivamente, che  $n_{COMIT} \leq 4$  e che  $n_{FIAT} \leq 3$ . È da porre in evidenza come questi ultimi valori specifichino il numero delle variabili (ignote) che esplicano il tasso di rendimento logaritmico settimanale associato, rispettivamente, all'indice COMIT e al titolo FIAT;

(4.A.4) si ricorda come, per la (3.A.3), la dimensione di correlazione  $D_C$  risulti minore o uguale della dimensione di Hausdorff  $D_H$ .

#### 4.B. Fase II

In questa fase, si utilizzano le serie temporali specificate nella fase precedente per determinare il valore, espresso in  $\text{bits}/\Delta t$  o, equivalentemente, in  $\text{bits}/\tau$ , del tasso medio di distruzione/creazione di informazione  $KS$  da parte del sistema dinamico indagato mediante il metodo numerico presentato in (3.B). In particolare, relativamente alla computazione numerica dell'operazione di limite, inerente ad  $r$ , che figura nell'ultimo membro della (3.7) si veda la corrispondente osservazione presentata in 4.A Fase I, mentre, al fine di computare numericamente l'operazione di limite, inerente ad  $m$ , che figura nell'ultimo membro della (3.7), si è determinato il valore dell'argomento di tale limite in corrispondenza di prefissati crescenti valori di  $m$ .

I risultati così ottenuti sono presentati in Tabella 4.B.1 per l'indice COMIT e in Tabella 4.B.2 per il titolo FIAT.

Tabella 4.B.1

$m_1, m_2$	$r_1 = 0.25^1$	$r_2 = 0.25^2$	$r_3 = 0.25^3$	$r_4 = 0.25^4$	$r_5 = 0.25^5$	$r_6 = 0.25^6$
1, 11	0.002	0.292	0.413	0.315	0.216	0.129
11, 21	0.010	0.195	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001
21, 31	0.022	0.004	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001
31, 41	0.037	0.003	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001

Tabella 4.B.2

$m_1, m_2$	$r_1 = 0.25^1$	$r_2 = 0.25^2$	$r_3 = 0.25^3$	$r_4 = 0.25^4$	$r_5 = 0.25^5$	$r_6 = 0.25^6$
1, 11	0.017	0.395	0.391	0.294	0.200	0.116
11, 21	0.054	0.079	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001
21, 31	0.078	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001
31, 41	0.088	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001

Dai risultati presentati in Tabella 4.B.1. e in Tabella 4.B.2 si hanno le seguenti osservazioni e considerazioni:

(4.B.1) in relazione al tasso medio di distruzione/creazione di informazione  $KS$  del sistema dinamico che genera i tassi di rendimento logaritmico settimanale, questo, essendo "debolmente" negativo in corrispondenza sia di crescenti valori di  $m$  che di ragionevoli valori di  $r$

(ovvero, né troppo grandi né troppo piccoli), sia per l'indice COMIT che per il titolo FIAT, caratterizza tale sistema come “debolmente distruttivo” di informazione;

(4.B.2) relativamente al tasso di distruzione/creazione di informazione  $KS$  dello stesso sistema, questo, risultando finito e approssimativamente costante all'aumentare del valore di  $m$  sia per l'indice COMIT che per il titolo FIAT, conferma, analogamente alla considerazione (4.A.2), la “prevalente” caratterizzazione deterministica del sistema dinamico specificato in (4.B.1), poichè, qualora fosse “prevalente” la caratterizzazione stocastica, è possibile verificare che il valore  $KS$  aumenterebbe all'aumentare del valore di  $m$  (per maggiori dettagli si veda [Casaleggio A. G. *et al.*, 1993] e [Cerutti S. *et al.*, 1993]);

(4.B.3) si ricorda come, per la (3.B.3), il tasso medio di distruzione/creazione di informazione  $KS$  risulti minore o uguale della entropia di Kolmogorov-Sinai  $h(\mu)$ . Ciò, congiuntamente alla “debole” negatività di tale tasso del sistema indagato, non permette di caratterizzare univocamente la predicibilità di tale sistema, predicibilità che, si ricorda, risulta quantificata da  $h(\mu)$  (per maggiori dettagli si veda la sezione 5. del **CAPITOLO IV**).

#### 4.C. Fase III

In questa fase, si utilizzano le serie temporali specificate in 4.A. Fase I per determinare il valore, espresso in bits/ $\Delta t$  o, equivalentemente, in bits/ $\Delta t$ , del massimo esponente caratteristico di Lyapunov  $\Lambda_{max}$  associato al sistema dinamico indagato mediante il metodo numerico presentato in (3.C).

I risultati così ottenuti sono presentati in Tabella 4.C.

Tabella 4.C

INDICE/TITOLO	$m=1$	$m=3$	$m=5$	$m=7$	$m=9$	$m=11$	$m=21$	$m=31$	$m=41$
COMIT	7.565	1.565	1.379	1.262	1.176	1.011	0.833	0.725	0.686
FIAT	7.053	1.459	1.197	1.134	1.035	0.970	0.776	0.629	0.570

Dai risultati presentati in Tabella 4.C si hanno le seguenti osservazioni e considerazioni:

(4.C.1) in relazione al massimo esponente caratteristico di Lyapunov  $\Lambda_{max}$  associato al sistema dinamico che genera i tassi di rendimento logaritmico settimanale, questo, essendo positivo in corrispondenza di crescenti valori di  $m$ , sia per l'indice COMIT che per il titolo FIAT, caratterizza tale sistema come dipendente sensibilmente dalle condizioni iniziali e, dunque, analogamente alla osservazione (4.A.1), ne conferma la caoticità deterministica;

(4.C.2) ancora, non risulta possibile caratterizzare univocamente la predicibilità del sistema indagato, poichè possono rispettivamente verificarsi o  $KS < h(\mu) < 0 < \Lambda_{max} \leq \sum_{j=1}^N \Lambda_j^+$  (predicibilità), o  $KS < 0 < h(\mu) \leq \Lambda_{max} \leq \sum_{j=1}^N \Lambda_j^+$  (non predicibilità), o  $KS < 0 < \Lambda_{max} \leq h(\mu) \leq \sum_{j=1}^N \Lambda_j^+$  (non predicibilità).

## 5. OSSERVAZIONI E CONSIDERAZIONI FINALI

Dai risultati ottenuti mediante la conduzione delle tre fasi dell'analisi, fra di loro distinte, si hanno le seguenti e convergenti osservazioni e considerazioni finali:

(5.1) la dimensione dell'insieme che specifica l'attrattore del sistema dinamico che genera i tassi di rendimento logaritmico settimanale risultando frazionaria sia per l'indice COMIT che per il titolo FIAT conferma la caoticità deterministica di tale sistema. In particolare, poichè  $n_{COMIT} \leq 4$  e  $n_{FIAT} \leq 3$ , tale sistema risulta caratterizzato da una "bassa" dimensionalità sia per l'indice che per il titolo;

(5.2) sia il tasso di distruzione/creazione di informazione  $KS$  da parte del sistema indagato che il massimo esponente caratteristico di Lyapunov  $\Lambda_{max}$  associato a tale sistema confermano la "prevalente" caratterizzazione deterministica di questo ultimo, ma non ne caratterizzano univocamente la predicibilità.

