1996 Volume unico

RENDICONTI

per gli Studi Economici Quantitativi

a cura di
Elio Canestrelli

Cafoscarina

Titolo della rivista e ISSN

RENDICONTI DEL COMITATO PER GLI STUDI ECONOMICI 1591-9781

Comitato Scientifico

Paolo BORTOT
Elio CANESTRELLI
Francesco MASON
Paolo PIANCA

Recapito

Dipartimento di Matematica Applicata ed Informatica
Università di Venezia
Dorsoduro 3825/E
30123 Venezia
Tel 041 5221345–2578266
Fax 041 5221756

Il presente volume è stato composto con TEX

Edizione Libreria Editrice Cafoscarina
Società Cooperativa a r.l.
Ca' Foscari, Dorsoduro, 3246, 30123 Venezia

Proprietà letteraria riservata

Stampato in Italia presso Stamperia Cetid s.r.l., via Ca' Rossa, 129, 30174 Mestre.
Dicembre 1996

ESPONENTE DI HURST ED ANALISI RESCALED RANGE: ALCUNI RISULTATI

MARCO CORAZZA

Dipartimento di Matematica Applicata ed Informatica, Università "Ca' Foscari" di Venezia

ABSTRACT Empirical results relating to the analyses of economic-financial time series have pointed out an increasing interest towards both the stochastic processes known as fractional Brownian motions and the so called rescaled range analysis. In this paper some theoretical results relating to the classical version of such an analysis are proposed.

KEYWORDS Fractional Brownian motion, Hurst exponent, rescaled range analysis.

1. INTRODUZIONE

Risultati empirici relativi all'analisi delle serie temporali economico-finanziarie hanno evidenziato un crescente interesse nei confronti sia dei processi stocastici noti come moti Browniani frazionari (mBf) che dell'analisi rescaled range (analisi R/S), ([21], [22], [13], [14], [3], [15], [11], [18], [24], [26], [1], [4], [8], [9], [10], [25], [16], [5] e [6]). Questo interesse è dovuto alla capacità dei primi di rappresentare processi stocastici i cui generici incrementi sono variabili aleatorie gaussiane stocasticamente dipendenti ed alla capacità della seconda di testare l'ipotesi sulla presenza di indipendenza a lungo termine nelle realizzazioni di incogniti processi stocastici e, nel caso di suo rigetto, di stimare l'"intensità" della dipendenza presente.

In questo lavoro si propongono alcuni risultati teorici relativi all'analisi R/S nella sua versione classica. In particolare, nella sezione 2. si illustrano sinteticamente alcuni aspetti teorici relativi agli mBf; nella sezione 3. si presentano gli aspetti algoritmici relativi all'analisi R/S nella sua versione classica; nella sezione 4. si propongono i risultati teorici relativi a tale analisi e nella sezione 5. si presentano delle osservazioni e considerazioni finali.

2. ASPETTI TEORICI RELATIVI AI MOTI BROWNIANI FRAZIONARI

Gli aspetti teorici relativi agli mBf utili per una più agevole comprensione degli aspetti algoritmici relativi all'analisi R/S necessitano previamente della seguente definizione (per i cui maggiori dettagli si veda [19], [12], [17] e [18]):

Definizione 2.1. Sia dato un processo stocastico $X(t) : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$. Questo processo si definisce moto Browniano standard (mBs) (unidimensionale) se si ha

(2.1.1) $X(0) = 0$ con probabilità uno,
(2.1.2) $X(t)$ continuo quasi ovunque per ogni $t \in [0, +\infty[$,
(2.1.3) il generico incremento

$$X(t + \Delta t) - X(t) \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, \Delta t), \ \forall t \geq 0, \ \forall \Delta t > 0 \tag{2.1}$$

e

(2.1.4) i generici incrementi $X(t_i) - X(t_{i-1})$, $i = 1, \ldots, n$, sono variabili aleatorie stocasticamente indipendenti per ogni partizione $\{0 \leq t_0, t_1, \ldots, t_n < +\infty, \ t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n\}$ di $[0, +\infty[$.

In relazione alla Definizione 2.1. è da porre in evidenza quanto segue:

(2.A.1) dato un mBs $X(t)$, è possibile verificare che i generici incrementi che figurano nella (2.1.4) risultano stazionari (ad esempio si veda [17]) o, equivalentemente, che

$$X(t + \Delta t) - X(t) \stackrel{d}{=} X(\Delta t) - X(0) \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, \Delta t), \ \forall t \geq 0, \ \forall \Delta t > 0; \tag{2.2}$$

(2.A.2) per la relazione (2.2) e per le proprietà dell'operatore varianza, si ha

$$X(t+\Delta t) - X(t) \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0,\Delta t) \stackrel{d}{=} \Delta t^{0.5}\mathcal{N}(0,1) \stackrel{d}{=} \Delta t^{0.5}[X(t+1) - X(t)],$$
$$\forall t \geq 0,\ \forall \Delta t > 0. \tag{2.3}$$

Ora, è possibile illustrare il concetto di mBf mediante la seguente definizione (per i cui maggiori dettagli si veda [21], [13], [12] e [18]):

Definizione 2.2. Sia dato un processo stocastico $X_H(t) : [0,+\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ e sia data una costante reale H, con $0 < H < 1$, detta esponente di Hurst. Questo processo si definisce moto Browniano frazionario (unidimensionale) di indice H se si ha

(2.2.1) $X_H(0) = 0$ con probabilità uno,
(2.2.2) $X_H(t)$ continuo quasi ovunque per ogni $t \in [0,+\infty[$,
(2.2.3) il generico incremento

$$X_H(t+\Delta t) - X_H(t) \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0,\Delta t^{2H}),\ \forall t \geq 0,\ \forall \Delta t > 0 \tag{2.4}$$

e

(2.2.4) i generici incrementi $X_H(t_i) - X_H(t_{i-1})$, $i = 1,\ldots,n$, sono variabili aleatorie stocasticamente dipendenti per ogni partizione $\{0 \leq t_0, t_1, \ldots, t_n < +\infty,\ t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n\}$ di $[0,+\infty[$ quando $H \neq 0.5$.

In relazione alla Definizione 2.2. è da porre in evidenza quanto segue:

(2.B.1) dato un mBf $X_H(t)$, è possibile verificare che anche i generici incrementi che figurano nella (2.2.4) risultano stazionari (ad esempio si veda [21]) o, equivalentemente, che

$$X_H(t+\Delta t) - X_H(t) \stackrel{d}{=} X_H(\Delta t) - X_H(0) \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0,\Delta t^{2H}), \forall t \geq 0, \forall \Delta t > 0; \tag{2.5}$$

(2.B.2) per la relazione (2.5) e per le proprietà dell'operatore varianza, si ha

$$X_H(t+\Delta t) - X_H(t) \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0,\Delta t^{2H}) \stackrel{d}{=} \Delta t^{H}\mathcal{N}(0,1) \stackrel{d}{=} \Delta t^{H}[X_H(t+1) - X_H(t)],$$
$$\forall t \in [0,+\infty[, \forall \Delta t > 0. \tag{2.6}$$

Relativamente al processo stocastico introdotto nella Definizione 2.2. si ha il seguente risultato teorico (per i cui maggiori dettagli si veda [21], [23], [12], [18], [10] e [2]):

Proposizione 2.1. Sia dato un moto Browniano frazionario (unidimensionale) di indice H, con $0 < H < 1$, $X_H(t)$. Allora si ha la seguente funzione di auto-correlazione:

$$\frac{E\{[X_H(t+\Delta t) - X_H(t)][X_H(t+\Delta\tau+\Delta t) - X_H(t+\Delta\tau)]\}}{\sqrt{E\{[X_H(t+\Delta t) - X_H(t)]^2\}E\{[X_H(t+\Delta\tau+\Delta t)]^2\}}} \stackrel{def}{=} \rho_H(\Delta\tau) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\Big(|\Delta\tau|+1\Big)^{2H} - 2|\Delta\tau|^{2H} + \Big(|\Delta\tau|-1\Big)^{2H}\right], \ \forall t \geq 0, \ \forall \Delta t > 0. \tag{2.7}$$

In relazione alla Proposizione 2.1. è da porre in evidenza quanto segue:

(2.C.1) è possibile verificare che la funzione di auto-correlazione (2.7) è minore (maggiore) di 0 quando $0 < H < 0.5$ ($0.5 < H < 1$) o, equivalentemente, che i generici incrementi $X_H(t+\Delta t) - X_H(t)$ e $X_H(t+\Delta\tau+\Delta t) - X_H(t+\Delta\tau)$ risultano negativamente (positivamente) auto-correlati;

(2.C.2) è possibile verificare che la funzione di auto-correlazione (2.7) è uguale a 0 quando $H = 0.5$, per ogni $\Delta\tau$ o, equivalentemente, che i generici incrementi $X_H(t+\Delta t) - X_H(t)$ e $X_H(t+\Delta\tau+\Delta t) - X_H(t+\Delta\tau)$ risultano non auto-correlati;

(2.C.3) per la funzione di auto-correlazione (2.7) si ha che il mBf $X_H(t)$ non è un processo stocastico di Markov quando $H \neq 0.5$.

3. ASPETTI ALGORITMICI RELATIVI ALL'ANALISI RESCALED RANGE

In questa sezione si presentano gli aspetti algoritmici relativi all'analisi R/S nella sua versione classica che assume l'assenza di una struttura di auto-dipendenza a breve termine. Tale analisi, capace di testare l'ipotesi nulla sulla presenza di indipendenza a lungo termine nelle realizzazioni di incogniti processi stocastici, si basa, in sostanza, sulla determinazione del valore dell'esponente di Hurst H. In particolare, se $0 < H < 0.5$ ($0.5 < H < 1$) allora si rigetta tale ipotesi nulla e le date realizzazioni dei processi stocastici risultano negativamente (positivamente) auto-dipendenti, invece, se $H = 0.5$ allora si accetta tale ipotesi nulla. È da porre in evidenza come, nel caso di rigetto dell'ipotesi nulla, l'"intensità" dell'auto-dipendenza negativa (positiva) risulti tanto più "forte" quanto più H sia vicino allo zero (all'uno). L'illustrazione di questa analisi

nella sua versione classica necessita previamente della seguente definizione (per i cui maggiori dettagli si veda [23], [18], [24], [10] e [2]):

Definizione 3.1. Sia data la serie temporale $\underline{x} = \{x_j,\ j = 1, \ldots, T\}$, realizzazione dell'insieme finito di variabili casuali $\underline{X} = \{X_j,\ j = 1, \ldots, T\}$. Si definisce rescaled range classico la quantità

$$\frac{R(\underline{x};T)}{s(\underline{x};T)} \stackrel{def}{\equiv} \frac{\max_{1\leq i\leq T}\{x_i^*\} - \min_{1\leq i\leq T}\{x_i^*\}}{s(\underline{x};T)} \tag{3.1}$$

dove
$x_i^* \stackrel{def}{\equiv} \sum_{k=1}^{i}(x_k - m_T)$, con $m_T \stackrel{def}{\equiv} (\sum_{l=1}^{T} x_i)/T$ media campionaria della serie temporale $\underline{x}$,
$s(\underline{x};T) \stackrel{def}{\equiv} \{[\sum_{l=1}^{T}(x_i - m_T)^2]/T\}^{1/2}$ scarto quadratico medio della serie temporale $\underline{x}$.
È da notare come il *range* $R(\underline{x};T)$ rappresenti il campo di variazione della serie temporale $\underline{x}^* = \{x_i^*, i = 1, \ldots, T\}$ degli scarti dalla media cumulati della serie temporale $\underline{x}$ e, come, la sua riscalatura, mediante lo scarto quadratico medio campionario $s(\underline{x};T)$ della serie temporale $\underline{x}$, ne effettui una standardizzazione.
Ora, è possibile verificare l'esistenza di un legame tra il rescaled range classico (3.1) e l'esponente di Hurst H, legame rappresentabile mediante la seguente relazione di equivalenza asintotica (ad esempio si veda [10]):

$$E\left[\frac{R(\underline{x};T)}{s(\underline{x};T)}\right] \sim aT^H \text{ quando } T \to +\infty \tag{3.2}$$

dove
$a > 0$: costante,
o, equivalentemente,

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{E[R(\underline{x};T)/s(\underline{x};T)]}{aT^H} = 1. \tag{3.3}$$

È quasi superfluo porre in evidenza come, in corrispondenza di valori opportunamente elevati della numerosità campionaria T, dalla (3.2), in termini approssimati, si abbia

$$\ln\left\{E\left[\frac{R(\underline{x};T)}{s(\underline{x};T)}\right]\right\} \simeq \ln(a) + H\ln(T). \tag{3.4}$$

Al fine di determinare il valore dell'esponente di Hurst sono state affinate e successivamente coordinate a sistema distinte tecniche (per maggiori dettagli si veda [22], [13], [23], [18], [24], [4], [8], [9] e [10]). La procedura di stima così approntata si articola come segue a partire dalla realizzazione $\underline{x} = \{x_j, j = 1, \ldots, T\}$ che specifica la serie temporale da indagare:

Passo 1: si inizializza la numerosità campionaria N associata a delle sotto-serie temporali da ottenere da $\underline{x}$ a $N_0 \leq T$;

Passo 2: si determinano le sotto-serie temporali (non sovrapponentesi) ottenibili da $\underline{x}$ come $\underline{x}_{1,N} \stackrel{def}{\equiv} \{x_j, j = 1, \ldots, N\}$, $\underline{x}_{2,N} \stackrel{def}{\equiv} \{x_j, j = N+1, \ldots, 2N\}$, ..., $\underline{x}_{i,N} \stackrel{def}{\equiv} \{x_j, j = (i-1)N+1, \ldots, iN\}$, ..., $\underline{x}_{K,N} \stackrel{def}{\equiv} \{x_j, j = (K-1)N+1, \ldots, KN\}$, con $K = \mathrm{Int}(T/N)$;

Passo 3: in corrispondenza di ognuna delle sotto-serie temporali $\underline{x}_{i,N}$, con $i = 1, \ldots, K$, si determina la media campionaria $m_{i,N}$, si determina la sotto-serie temporale degli scarti dalla media cumulati $\underline{x}^*_{i,N} \stackrel{def}{\equiv} \{x^*_{(i-1)N+n} = \sum_{l=1}^{n}(x_{(i-1)N+l} - m_{i,N}), n = 1, \ldots, N\}$, si determina il campo di variazione di quest'ultima sotto-serie temporale, $R_i(\underline{x}; N) = \max_{1 \leq i \leq N}\{\underline{x}^*_{i,N}\} - \min_{1 \leq i \leq N}\{\underline{x}^*_{i,N}\}$, si determina lo scarto quadratico medio campionario di $\underline{x}_{i,N}$, $s_i(\underline{x}; N)$, e si determina il rapporto $R_i(\underline{x}; N)/s_i(\underline{x}; N)$;

Passo 4: si determina la media campionaria $R(\underline{x}; N)/s(\underline{x}; N) = \{\sum_{i=1}^{K}[R_i(\underline{x}; N)/s_i(\underline{x}; N)]\}/K$;

Passo 5: si reinizializza la numerosità campionaria N associata alle sotto-serie temporali a $\tilde{N} = N + S$, con $S > 0$;

Passo 6: se si verifica che $N \leq T$ si va al Passo 2, altrimenti si va al Passo 7;

Passo 7: si determina il valore della stima dell'esponente di Hurst $\hat{H}_l$, con $l = N_0 + kS$, in corrispondenza di ognuno dei valori della numerosità campionaria associata alle sotto-serie temporali determinati ponendo $k = 2, 3, \ldots, L$, con $L = \mathrm{Int}[(T - N_0)/S]$, mediante l'utilizzo di un modello di regressione lineare applicato alla relazione (3.4);

Passo 8: si determina il valore della stima dell'esponente di Hurst $H(\underline{x})$ associato alla serie temporale $\underline{x}$ a partire dagli $L-1$ valori $\hat{H}_l$, con $l = N_0 + kS$, con $k = 2, 3, \ldots, L$, mediante l'utilizzo di un opportuno criterio di scelta (per maggiori dettagli si veda [13], [23], [10] e [5]).

In relazione all'analisi R/S nella sua versione classica è da porre in evidenza quanto segue:

(3.D.1) è possibile verificare che la procedura di stima precedentemente introdotta è robusta[1] relativamente all'ipotesi di gaussianità per i processi stocastici che generano le serie temporali (ad esempio si veda [23] e [18]);

(3.D.2) è possibile verificare che tale procedura di stima converge, con probabilità uguale a uno, anche per processi stocastici che generano le serie temporali aventi momento del secondo ordine non esistente in quanto infinito (ad esempio si veda [22]) e, dunque, risulta "superiore" a quelle statistiche (classicamente) basate su questo stesso momento.

4. RISULTATI TEORICI RELATIVI ALL'ANALISI RESCALED RANGE

In questa sezione si propongono alcuni risultati teorici relativi all'analisi R/S nella sua versione classica.

Proposizione 4.1. (Corazza M.) Sia data una serie temporale $\underline{x} = \{x_i,\ i = 1, 2, \ldots, T\}$ avente esponente di Hurst $H(\underline{x})$ e siano date delle costanti reali a e b, con $a \in \mathbf{R}_0$ e $b \in \mathbf{R}$. Allora la serie temporale $\underline{z} = \{z_i = ax_i + b,\ i = 1, 2, \ldots, T\}$ ha esponente di Hurst

$$H(\underline{z}) = H(\underline{x}). \tag{4.1}$$

Dimostrazione. Verificare la relazione (4.1) è equivalente, per la relazione (3.4) e per i Passi 7 e 8 della procedura di stima precedentemente introdotta, a verificare che

$$\frac{R(\underline{z}; l)}{s(\underline{z}; l)} = \frac{R(\underline{x}; l)}{s(\underline{x}; l)},\ l = N_0 + kS,\ k = 2, 3, \ldots, L. \tag{4.2}$$

[1] Una procedura di stima $S_T(\underline{X})$ di un parametro ϑ, dove T è la numerosità campionaria, si dice che è robusta relativamente ad una specificata ipotesi se le sue "caratteristiche" dedotte, rispettivamente, assumendo e non assumendo quella specificata ipotesi, non differiscono "significativamente".

Relativamente al campo di variazione $R(\cdot;l)$, per la Definizione 3.1. e per le proprietà degli operatori media campionaria, *minimum* e *maximum*, si ha

$$R(\underline{z};l)=\max_{1\le i\le l}\{z_i^*\}-\min_{1\le i\le l}\{z_i^*\}=\max_{1\le i\le l}\left\{\sum_{j=1}^{i}[z_j-m_l(\underline{z})]\right\}-\min_{1\le i\le l}\left\{\sum_{j=1}^{i}[z_j-m_l(\underline{z})]\right\}=$$

$$=\max_{1\le i\le l}\left\{\sum_{j=1}^{i}[ax_j+b-m_l(a\underline{x}+b)]\right\}-\min_{1\le i\le l}\left\{\sum_{j=1}^{i}[ax_j+b-m_l(a\underline{x}+b)]\right\}=$$

$$=\max_{1\le i\le l}\left\{\sum_{j=1}^{i}[ax_j+b-am_l(\underline{x})-b]\right\}-\min_{1\le i\le l}\left\{\sum_{j=1}^{i}[ax_j+b-am_l(\underline{x})-b]\right\}=$$

$$=\begin{cases}a\left\{\max_{1\le i\le l}\left\{\sum_{j=1}^{i}[x_j-m_l(\underline{x})]\right\}-\min_{1\le i\le l}\left\{\sum_{j=1}^{i}[x_j-m_l(\underline{x})]\right\}\right\} & \text{se } a>0\\ -a\left\{\max_{1\le i\le l}\left\{\sum_{j=1}^{i}[x_j-m_l(\underline{x})]\right\}-\min_{1\le i\le l}\left\{\sum_{j=1}^{i}[x_j-m_l(\underline{x})]\right\}\right\} & \text{se } a<0\end{cases}$$

$$=|a|R(\underline{x};l),\ l=N_0+kS,\ k=2,3,\dots,L. \tag{4.3}$$

Relativamente allo scarto quadratico medio campionario $s(\cdot;l)$, per le proprietà dell'operatore varianza campionaria, si ha

$$s(\underline{z};l)=[s^2(\underline{z};l)]^{1/2}=[s^2(a\underline{x}+b;l)]^{1/2}=[a^2s^2(\underline{x};l)]^{1/2}=|a|s(\underline{x};l),$$
$$l=N_0+kS,\ k=2,3,\dots,L. \tag{4.4}$$

Ora, sostituendo le (4.3) e (4.4) nel primo membro della (4.2) si ottiene

$$\frac{R(\underline{z};l)}{s(\underline{z};l)}=\frac{|a|R(\underline{x};l)}{|a|s(\underline{x};l)}=\frac{R(\underline{x};l)}{s(\underline{x};l)},\ a\neq 0,\ l=N_0+kS,\ k=2,3,\dots,L. \tag{4.5}$$

■

Proposizione 4.2. (Corazza M.) Sia data una serie temporale $\underline{x}=\{x_i,\ i=1,2,\dots,T\}$ avente serie degli scarti dalla media cumulati $\underline{x}^*$ non crescente o non decrescente. Allora per questa si ha

$$R(\underline{x};l)=\phi\sum_{j=2}^{l}[x_j-m_l(\underline{x})],\ l=N_0+kS,\ k=2,3,\dots,L, \tag{4.6}$$

dove

$$\phi = \begin{cases} -1 & \text{se } \underline{x}^* \text{ è non crescente} \\ 1 & \text{se } \underline{x}^* \text{ è non decrescente} \end{cases}$$

Dimostrazione. Per la Definizione 3.1. e per la non crescenza (non decrescenza) della serie temporale $\underline{x}^*$, si ha

$$R(\underline{x};l) = \max_{1\le i\le l}\{x_i^*\} - \min_{1\le i\le l}\{x_i^*\} = \max_{1\le i\le l}\left\{\sum_{j=1}^{i}[x_i - m_l(\underline{x})]\right\} - \min_{1\le i\le l}\left\{\sum_{j=1}^{i}[x_i - m_l(\underline{x})]\right\} =$$

$$= \begin{cases} x_1^* - x_l^* = [x_1 - m_l(\underline{x})] - \sum_{j=1}^{l}[x_j - m_l(\underline{x})] \text{ se } \underline{x}^* \text{ è non crescente} \\ x_l^* - x_1^* = \sum_{j=1}^{l}[x_1 - m_l(\underline{x})] - [x_j - m_l(\underline{x})] \text{ se } \underline{x}^* \text{ è non decrescente} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\sum_{j=2}^{l}[x_j - m_l(\underline{x})] & \text{se } \underline{x}^* \text{ è non crescente} \\ \sum_{j=2}^{l}[x_j - m_l(\underline{x})] & \text{se } \underline{x}^* \text{ è non decrescente} \end{cases}$$

$$= \phi \sum_{j=2}^{l}[x_j - m_l(\underline{x})],\ l = N_0 + kS,\ k = 2,3,\ldots,L. \tag{4.7}$$

■

Proposizione 4.3. (Corazza M.) Siano date due serie temporali $\underline{x} = \{x_i,\ i = 1,2,\ldots,T\}$ e $\underline{y} = \{y_i,\ i = 1,2,\ldots,T\}$ aventi, rispettivamente, serie degli scarti dalla media cumulati $\underline{x}^*$ e $\underline{y}^*$ entrambe non crescenti o non decrescenti. Allora la serie temporale $\underline{z} = \{z_i = x_i + y_i,\ i = 1,2,\ldots,T\}$ ha *rescaled range* classico

$$\frac{R(\underline{z};l)}{s(\underline{z};l)} = \frac{\phi\sum_{j=2}^{l}[x_j - m_l(\underline{x}) + y_j - m_l(\underline{y})]}{[s^2(\underline{x};l) + s^2(\underline{y};l) + 2\rho_{\underline{x},\underline{y}}s(\underline{x};l)s(\underline{y};l)]^{1/2}},$$
$$l = N_0 + kS,\ k = 2,3,\ldots,L, \tag{4.8}$$

dove

$$\phi = \begin{cases} -1 & \text{se } \underline{x}^* \text{ e } \underline{y}^* \text{ sono non crescenti} \\ 1 & \text{se } \underline{x}^* \text{ e } \underline{y}^* \text{ sono non decrescenti} \end{cases},$$

$\rho_{\underline{x},\underline{y}}$: coefficiente di correlazione lineare tra la serie temporale $\underline{x}$ e la serie temporale $\underline{y}$.

Dimostrazione. Relativamente al campo di variazione $R(\cdot;l)$, con $l = N_0 + kS$, $k = 2,3,\ldots,L$, per la Definizione 3.1., per la Proposizione 4.2. e per la non crescenza (non decrescenza) di entrambe le serie temporali $\underline{x}^*$ e $\underline{y}^*$, si ha

$$R(\underline{z};l) = \max_{1\le i\le l}\{z_i^*\} - \min_{1\le i\le l}\{z_i^*\} = \max_{1\le i\le l}\{x_i^* + y_i^*\} - \min_{1\le i\le l}\{x_i^* + y_i^*\} =$$

$$= \max_{1\le i\le l}\{x_i^*\} - \min_{1\le i\le l}\{x_i^*\} + \max_{1\le i\le l}\{y_i^*\} - \min_{1\le i\le l}\{y_i^*\} = \phi \sum_{j=2}^{l}[x_j - m_l(\underline{x}) + y_j - m_l(\underline{y})],$$
$$l = N_0 + kS,\ k = 2, 3, \ldots, L. \tag{4.9}$$

Relativamente allo scarto quadratico medio campionario $s(\cdot; l)$, con $l = N_0 + kS$, $k = 2, 3, \ldots, L$, per le proprietà dell'operatore varianza campionaria, si ha

$$s(\underline{z}; l) = [s^2(\underline{z}; l)]^{1/2} = [s^2(\underline{x} + \underline{y}; l)]^{1/2} = [s^2(\underline{x}; l) + s^2(\underline{y}; l) + 2\rho_{\underline{x},\underline{y}} s(\underline{x}; l) s(\underline{y}; l)]^{1/2},$$
$$l = N_0 + kS,\ k = 2, 3, \ldots, L. \tag{4.10}$$

Ora, sostituendo le (4.9) e (4.10) nel primo membro della (4.8), si ottiene il secondo membro della (4.8). ■

5. OSSERVAZIONI E CONSIDERAZIONI FINALI

Dai risultati proposti nella precedente sezione 4. si hanno le seguenti osservazioni e considerazioni finali:

(5.A) i risultati presentati nelle Proposizioni 4.1., 4.2. e 4.3. permettono, soddisfatte le soggiacenti ipotesi, una determinazione del valore dell'esponente di Hurst computazionalmente più agevole rispetto a quella ottenibile mediante la procedura di stima descritta nella sezione 3.;

(5.B) attualmente, al fine di generalizzare il risultato presentato nella Proposizione 4.1., si sta lavorando su di una nuova versione di tale proposizione in cui la serie temporale $\underline{z} = \{z_i = ax_i + b,\ i = 1, 2, \ldots, T\}$ è sostituita dalla serie temporale $\underline{z} = \{z_i = ax_i + b + \varepsilon_i,\ i = 1, 2, \ldots, T\}$, dove ε_i, $i = 1, 2, \ldots, T$, sono variabili casuali che si distribuiscono indipendentemente ed identicamente con media uguale a 0 e varianza uguale a 1;

(5.C) attualmente, al fine di generalizzare anche il risultato presentato nella Proposizione 4.3., si sta lavorando su di una nuova versione di tale proposizione in cui l'ipotesi di non crescenza o non decrescenza di entrambe le serie degli scarti dalla media cumulati $\underline{x}^*$ e $\underline{y}^*$ è rimossa.

BIBLIOGRAFIA

[1] AMBROSE B. W., ANCEL E. W., GRIFFITHS M. D., "Fractal Structure in the Capital Market Revisited", *Financial Analysts Journal*, May-June, 1993, pp. 73–77.

[2] BERAN J., *Statistics for Long-Memory Processes*, Chapman & Hall, New-York, 1994.

[3] BOOTH G. G., KAEN F. R., KOVEOS P. E., "R/S Analysis of Foreign Exchange Rates under Two International Monetary Regimes", *Journal of Monetary Economics*, 10, 1982, pp. 407–415.

[4] CHEUNG Y.-W., LAI K. S., "Do Gold Market Returns Have Long Memory?", *The Financial Review*, 28(2), 1993, pp. 181–202.

[5] CORAZZA M., *Caso e Caos Deterministico: un Approccio all'Analisi delle Leggi di Evoluzione dei Prezzi Speculativi*, Tesi di Dottorato di Ricerca, Università degli Studi di Brescia, Brescia, 1995.

[6] CORAZZA M., "Long-Term Memory Stability in the Italian Stock Market", in corso di pubblicazione su *Economic and Financial Modelling*, (inizialmente pubblicato su *Rapporto del Dipartimento di Matematica Applicata ed Informatica dell'Università degli Studi di Venezia*, 26/95), 1996.

[7] CORAZZA M., MALLIARIS A. G., NARDELLI C., "Searching for Fractal Structure in Agricultural Futures Market", accettato per la pubblicazione su *The Journal of Futures Markets*, (inizialmente pubblicato su *Rapporto del Dipartimento di Matematica Applicata ed Informatica dell'Università degli Studi di Venezia*, 37/96), 1996.

[8] CORAZZA M., NARDELLI C., "Fenomeno della Dipendenza a Lungo Termine nel Mercato Finanziario Italiano", *Atti del XVII Convegno A.M.A.S.E.S.*, Ischia, 1993a, pp. 359–382.

[9] CORAZZA M., NARDELLI C., "Looking for Fractal Structure in the Italian Capital Market", lecture presentata all'*International Conference on Predictability and Nonlinear Modelling in Natural Sciences and Economics*, Wageningen, 1993b.

[10] CUTLAND N. J., KOPP P. E., WILLINGER W., "Stock Price Return and the Joseph Effect: Fractional Version of the Black-Scholes Model", *Mathematics Research Reports. School of Mathematics. University of Hull.*, 6(12), 1993, pp. 1–29.

[11] DAVIES R. B., HARTE D. S., "Tests for Hurst Effect", *Biometrika*, 74(1), 1987, pp. 95–101.

[12] FALCONER K., *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons, Chichester, 1990.

[13] GREENE M. T., FIELITZ B. D., "Long-term Dependence in Common Stock Returns", *Journal of Fin. Econ.*, 4, 1977, pp. 339–349.

[14] GREENE M. T., FIELITZ B. D., "The Effect of Long-term Dependence on Risk-Return Models of Common Stocks", *Operations Research*, 27(5), 1979, pp. 944–951.

[15] HELMS B. P., KAEN F. R., ROSENMAN R. E., "Memory in Commodity Futures Contracts", *The Journal of Future Market*, 4(4), 1984, pp. 559–567.

[16] JACOBSEN B., "Classical and Modified Rescaled Range Analysis: Some Evidence", in GRASMAN J. e VAN STRATEN G. (eds.) *Predictability and Nonlinear Modelling in Natural Sciences and Economics*, 1994, pp. 638–647, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.

[17] KARATZAS I., SHREVE S. E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[18] LO A. W., "Long-term Memory in Stock Market Prices", *Econometrica*, 59(5), 1991, pp. 1279–1313.

[19] MALLIARIS A. G., BROCK W. A., *Stochastic Methods in Economics and Finance*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1982.

[20] MANDELBROT B. B., "New Methods in Statistical Economics", *The Journal of Political Economy*, LXXI, 5, 1963, pp. 421–440.

[21] MANDELBROT B. B., VAN NESS J. W., "Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications", *SIAM Review*, 10(4), 1968, pp. 422–437.

[22] MANDELBROT B. B., "Statistical Methodology for Nonperiodic Cycles: from the Covariance to R/S Analysis", *Annals of Economic and Social Measurement*, 1, 1972, pp. 250–290.

[23] MANDELBROT B. B., TAQQU M. S., "Robust R/S Analysis of Long Run Serial Correlation", lecture presentata all'*International Statistical Institute*, 42nd Session, Manila, 1979.

[24] PETERS E. E., *Chaos and Order in the Capital Market*, John Wiley, New-York, 1991.

[25] PETERS E. E., *Fractal Market Analysis*, John Wiley, New-York, 1994.

[26] ROSSI F. M., SCACCIAVILLANI F., "Non-Semimartingale Behavior in Asset Pricing: Arbitrage", Fractional Brownian Motion and Self-Similar Processes, comunicazione personale, 1992.