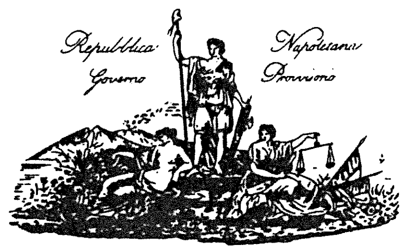
ASSOCIAZIONE PER LA MATEMATICA APPLICATA
ALLE SCIENZE ECONOMICHE E SOCIALI



Sotto gli auspici dell'Istituto Italiano per gli studi Filosofici

ATTI
DEL DICIANNOVESIMO
CONVEGNO A.M.A.S.E.S.

Pugnochiuso, 25-28 settembre 1995

Ha contribuito alla pubblicazione del Volume
il Consiglio Nazionale delle Ricerche

Cacucci Editore - Bari -1995

Università degli Studi di Bari, sedi di Bari e Foggia

Università degli studi di Lecce

COMITATO ORGANIZZATORE

Luigi Albano (Presidente), Pancrazio Amato (Tesoriere), Antonio Attalienti, Giancarlo Capozza, Maria Chiarolla, Luigi De Cesare, Andrea Di Liddo, Lorenza Diomeda, Francesco Grattagliano, Lucia Maddalena, Michele Mininni, Donato Scolozzi.

UNA VERSIONE FRAZIONARIA DELLE LEGGI FINANZIARIE IN REGIME DELL'INTERESSE COMPOSTO

Marco CORAZZA

Dipartimento di Matematica Applicata ed Informatica
Universita' degli Studi "Ca' Foscari" di Venezia
E-mail: corazza@vega.unive.it

Carla NARDELLI

Dipartimento di Matematica Applicata ed Informatica
Universita' degli Studi "Ca' Foscari" di Venezia
E-mail: nardelli@vega.unive.it

1. Introduzione

L'approccio classico relativo all'analisi dei vari aspetti inerenti al prezzo P(t) delle attivita' finanziarie (aspetti quali la natura dei processi generatori, la struttura delle leggi dinamiche di evoluzione, l'indagine delle serie temporali, la verifica delle implicazioni economico-finanziarie, ...), come si e' venuto determinando in letteratura fino dai primi pionieristici lavori di Bachelier L. ([2]) e di Working H. ([20]), si e' sostanziato nell'impiego, nello sviluppo e nella elaborazione di ipotesi, di teorie, di metodi e di strumenti propri dell'ambito stocastico, tradizionalmente sintetizzabili nella assunzione di indipendente ed identica distribuzione di probabilita' delle variabili casuali

(1.1) $P(t+\Delta t) - P(t)$, con $t = 1, 2, \ldots, N - \Delta t$, per ogni prescelto valore di Δt, variabili casuali che, congiuntamente, specificano un opportuno processo stocastico (ad esempio si veda [10], [15] e [16]). In particolare, nelle moderne teorie economico-finanziarie, quali, ad esempio, quelle sull'impossibilita' di effettuare l'arbitraggio e sul derivative pricing, si e' venuta a determinare quale paradigma l'assunzione dell'ipotesi di una distribuzione di probabilita' indipendente (per maggiori dettagli si veda [15], [18] e [16]).

Peraltro, in un crescente numero di analisi empiriche si e' posta in evidenza la parziale inadeguatezza dell'assunzione di una tale ipotesi, a causa delle costanti presenze di auto-dipendenza (non solo lineare) sia a breve-medio termine che a lungo termine (ad esempio si veda [6], [7], [14], [15], [1] e [16]). Queste peculiarita' hanno condotto molti autori a rigettare l'ipotesi di efficienza in forma debole dei mercati finanziari ed a congetturare la non-markovianita' per i processi stocastici che generano le variazioni sia dei prezzi delle attivita' finanziarie che dei loro logaritmi. Tali risultati empirici hanno favorito un crescente interesse nei confronti dei processi stocastici di tipo "moti Browniani frazionari" ([11], [12], [6], [7], [14], [9], [15], [18], [1], [3] e [4]) dovuto alla loro capacita' di rappresentare processi stocastici Gaussiani i cui generici incrementi siano stocasticamente dipendenti. In termini approssimati, ognuno di questi processi stocastici si puo' interpretare come una somma, debitamente ponderata, delle realizzazioni passate di un moto Browniano standard (ad esempio si veda [11], [7] e [9]); questa specifica caratterizzazione dei moti Browniani frazionari viene opportunamente formalizzata mediante il calcolo differo-integrale frazionario stocastico (ad esempio si veda [11]).

Questo lavoro si propone di determinare le leggi finanziarie secondo le quali debba evolvere la componente priva di rischio di un portafoglio aleatorio immunizzato al fine di evitare la possibilita' di arbitraggi, nell'assunzione in cui la dinamica della componente aleatoria di tale portafoglio sia descrivibile mediante un moto Browniano frazionario. In particolare, nella sezione 2. si illustrano sinteticamente gli aspetti teorici necessari per la determinazione di tali leggi, nella sezione 3. si ricava un'equazione differenziale frazionaria che descrive la dinamica di una tale componente priva di rischio di un portafoglio aleatorio immunizzato, nella sezione 4. si determina la soluzione della equazione differenziale frazionaria precedentemente ricavata e nella sezione 5. si presentano delle osservazioni e considerazioni finali.

2. Aspetti teorici: il calcolo differo-integrale

frazionario

Il concetto di differenziazione ed integrazione di ordine non intero risale al 1695, anno in cui Leibnitz parla di derivate di ordine reale e complesso e dà significato ad espressioni quali "$d^{1/2}x$". Soltanto dopo più di un secolo Liouville (1832) opera e sviluppa questo campo di indagine, applicando i risultati ottenuti a problemi di meccanica e geometria.

Successivamente, Riemann (1847) dà una definizione di integrazione frazionaria, seguendo l'impostazione di Liouville ([13] e [17]).

Anche durante il XX secolo si assiste ad un crescente interesse della ricerca in questo campo, nonché alle possibili applicazioni del calcolo frazionario alla risoluzione di problemi relativi ai settori più disparati. Per questo motivo, esso può a rigore essere considerato come una parte della matematica applicata, ed in questo senso va visto il Convegno tenutosi nel 1974 su "Fractional Calculus and its Applications to the Mathematical Sciences" ([17]).

Vediamo ora quali definizioni di integrale e derivata frazionari sono stati dati in letteratura, per la classe di funzioni f definite nell'intervallo [a, b], che siano limitate in]a, b] e ben definite in x=a, cioè tali che $\lim_{x \to a} (x-a)\, f(x) = 0$.

La prima definizione riguarda congiuntamente le operazioni di integrazione ($q<0$) e di derivazione

($q \geq 0$) frazionaria:

(2.1)
$$\frac{d^q f(x)}{d(x-a)^q} = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{\left(\frac{x-a}{N}\right)^{-q}}{\Gamma(-q)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} f\left(x-j\,\frac{x-a}{N}\right)\right)$$

dove $\Gamma(\cdot)$ e' la funzione Gamma di Eulero.

La seconda invece, nota come definizione di Riemann-Liouville, permette di definire l'integrale frazionario di ordine $q<0$ in questo modo:

(2.2)
$$\frac{d^q f(x)}{d(x-a)^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_a^x (x-y)^{-q-1}\, f(y)\, dy.$$

Tale definizione si può estendere al caso in cui $q \geq 0$ (derivazione) nel seguente modo:

(2.3)
$$\frac{d^q f(x)}{d(x-a)^q} = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{d^{q-n} f(x)}{d(x-a)^{q-n}}\right],\quad n \in \mathbb{N},\ n>q.$$

Le ultime due definizioni sono generalmente le più note e verranno da noi usate nel seguito.

Inoltre è stata data la definizione di derivata di Riemann solamente per potenze intere positive:

(2.4)
$$\frac{d^q\, x^p}{dx^q} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-q+1)}\, x^{p-q},\quad q \geq 0,\ p \in \mathbb{N}.$$

Analogamente, la derivata di Liouville viene definita soltanto per le funzioni che assumono la forma:

$$(2.5) \qquad f(x) = \sum_{j=o}^{\infty} c_j \exp(b_j x)$$

e quindi

$$(2.6) \qquad \frac{d^q f(x)}{dx^q} = \sum_{j=o}^{\infty} c_j \, b_j \exp(b_j x).$$

Infine è noto come integrale di Weyl la funzione seguente:

$$(2.7) \qquad \frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_{-\infty}^{x} (x-y)^{-q-1} f(y)\, dy, \quad q \in \mathbb{R}.$$

In particolare, quest'ultima definizione e' utile per dare la seguente caratterizzazione del moto Browniano frazionario secondo quanto presentato in [11]:

$$(2.8) \qquad B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H+0.5)} \left[\int_{-\infty}^{0} \{(t-s)^{H-0.5} - (-s)^{H-0.5}\} dB(s) + \int_{0}^{t} (t-s)^{H-0.5} dB(s) \right]$$

dove $H \in]0, 1[$ e $B(s)$ e' il moto Browniano standard.

E' da notare come il moto Browniano frazionario risulti il differo-integrale di ordine H-0.5 del moto Browniano standard.

Si può dimostrare che tutte le definizioni precedenti soddisfano le seguenti proprietà:

1) danno lo stesso risultato della derivazione ed integrazione classica quando $q \in \mathbb{N}$ oppure $q \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$;
2) se $q = 0$, allora $d^0/dx^0\ f(x) = f(x)$;
3) $d^q/dx^q\ [\alpha\ f(x) + \beta\ g(x)] = \alpha\ d^q/dx^q\ f(x) + \beta\ d^q/dx^q\ g(x)$;
4) $d^q/dx^q\ d^p/dx^p\ f(x) = d^{q+p}/dx^{q+p}$.

Come esempio di applicazione del calcolo frazionario consideriamo la seguente equazione differenziale:

(2.9) $d^q/dx^q\ f(x)=F(x)$, F funzione nota e $q \in \mathbb{R}^+$,

la cui soluzione si dimostra essere la funzione

(2.10) $f(x) = d^{-q}/dx^{-q}\ F(x) + c_1\ x^{q-1} +\ldots+ c_m\ x^{q-m}$,

dove le costanti c_i sono arbitrarie e $0<q\leq m<q+1$, $m \in \mathbb{N}$; in particolare, se $q\leq 0$ allora le c_i sono tutte nulle.

Un altro esempio interessante per le nostre applicazioni risulta l'equazione semi-differenziale seguente:

$$(2.11)\quad d^{1/2}/dx^{1/2}\, f(x) + f(x)=0,\ f \text{ funzione non nota}$$

che si risolve applicando ad entrambi i membri dell'equazione l'operatore di semi-derivazione $d^{1/2}/dx^{1/2}$, ottenendo

$$(2.12)\quad d/dx\, f(x) + d^{1/2}/dx^{1/2}\, f(x) - c_1\, x^{-3/2} = 0;$$

sostituendo $-f(x)$ al posto di $d^{1/2}/dx^{1/2}\, f(x)$ nella (2.12) si ottiene una equazione differenziale ordinaria lineare del primo ordine non omogenea:

$$(2.13)\qquad d/dx\, f(x) - f(x) - c_1\, x^{-3/2} = 0,$$

la cui soluzione e'

$$(2.14)\qquad f(x) = c\, e^{x} + e^{x} \int_0^x e^{-y}\, c_1\, y^{-3/2}\, dy.$$

3. Modello del regime dell'interesse composto frazionario

Il modello da cui si intende partire è ottenuto generalizzando quello classico dell' interesse composto, assumendo che in un fissato intervallo temporale $[t,t+\Delta t]$ l'interesse prodotto, ovvero la variazione corrispondente di montante $\Delta M(t) = M(t+\Delta t)-M(t)$, sia direttamente proporzionale, secondo un coefficiente $\delta>0$, che rappresenta sempre l'intensità istantanea di interesse, al montante stesso ed all'intervallo temporale Δt, secondo la relazione seguente:

$$(3.1) \quad \Delta^{\alpha}M(t) = M(t+\Delta t^{\alpha})-M(t) = \delta\ M(t)\ \Delta t^{\alpha} + o(\Delta t^{\alpha})$$

dove $\alpha \in\ ]0,1[$, Δ^{α} e' l'operatore differenza finita di ordine α.

Dividendo ambo i membri per Δt^{α} e passando al limite si ottiene l'equazione differenziale frazionaria:

$$(3.2) \qquad d^{\alpha}/dt^{\alpha}\ M(t) = \delta\ M(t)$$

che può essere risolta con il metodo proposto qui, nel caso in cui $\alpha \in\ ]0,1[\ \cap \mathbb{Q}$.

La soluzione rappresenta il montante prodotto in questo particolare regime dell'interesse composto frazionario.

4. Metodo di soluzione di una versione della equazione differenziale frazionaria (3.2)

In questa sezione si determina la soluzione dell'equazione differenziale frazionaria (3.2) che descrive come debba evolvere la componente priva di rischio di un portafoglio aleatorio immunizzato al fine di evitare la possibilita' di arbitraggi, nell'assunzione in cui la dinamica della componente aleatoria di tale portafoglio sia descrivibile mediante un moto Browniano frazionario. E' da porre in evidenza come in letteratura, in relazione a tale famiglia di equazioni differenziali frazionarie, non siano presenti metodi risolutivi generali, ovvero validi per ogni valore assumibile da α nell'intervallo]0,1[. In particolare, risulta opportuno considerare quella sotto-famiglia di equazioni differenziali frazionarie caratterizzate da un $\alpha \in \mathbb{Q}$ o, equivalentemente, tale che

$$(4.1) \qquad 0 < \alpha = \frac{m}{n} < 1, \ \forall\, m, n \in \mathbb{N}.$$

A tal fine e' opportuno riesprimere la (3.2) nella seguente forma:

$$(4.2) \qquad D^{m/n}\,(M(t)) = \delta\, M(t).$$

Ora, dato quanto premesso nella sezione 2. in relazione agli aspetti teorici relativi al calcolo differo-integrale, applicando ad ambo i membri della equazione differeziale frazionaria (4.2) l'operatore di differenziazione $D^{m/n}(\cdot)$, si ha

$$(4.3.1) \quad D^{m/n}(D^{m/n}\,(M(t)))=D^{m/n}\,(\delta\, M(t))+c_1\, t^{-(m/n)-1},$$

o, equivalentemente, si ha

$$(4.3.2) \quad D^{2(m/n)}\,(M(t))=\delta\, D^{m/n}\,(M(t)) + c_1\, t^{-(m/n)-1}$$

e, sostituendo la (4.2) nel secondo membro della (4.3.2), si ha

$$(4.4) \qquad D^{2(m/n)}(M(t)) = \delta^2 M(t) + c_1 t^{-(m/n)-1}.$$

In generale, e' possibile verificare che, iterando n volte la applicazione dell'operatore di differenziazione $D^{m/n}(\cdot)$ ad ambo i membri della equazione differeziale frazionaria di volta in volta ricavata, si ha

$$(4.5) \qquad D^{m}(P(t)) =$$

$$= \delta^n P(t) + \sum_{j=1}^{n-1} c_j D^{(n-1-j)(m/n)}(t^{-(m/n)-1}).$$

E' da notare come l'operatore di differenziazione che compare nel primo membro della (4.5) sia, ora, di ordine intero, mentre, in generale, cio' non sia vero per gli operatori di differenziazione che compaiono nel secondo membro della (4.5). Peraltro, e' anche possibile verificare come, mediante l'utilizzo del secondo metodo di Liouville (per maggiori dettagli si veda [13] e [17]), si abbia che per ogni j=1, ..., n-1

$$(4.6) \qquad D^{(n-1-j)(m/n)}(t^{-(m/n)-1}) =$$

$$= \frac{(-1)^{(n-1-j)(m/n)}\,\Gamma((m/n)(n-j)+1)}{\Gamma((m/n)+1)} t^{-(m/n)(n-j)-1}.$$

In particolare, sostituendo la (4.6) nel secondo membro della (4.5) e ponendo

$$(4.7)\quad k_j = c_j \; \frac{(-1)^{(n-1-j)(m/n)}\;\Gamma((m/n)(n-j)+1)}{\Gamma((m/n)+1)} \quad \forall\; j,$$

e' possibile ricavare la seguente equazione differenziale lineare, non omogenea, di ordine (intero) m

$$(4.8)\qquad D^m\,(M(t)) = \delta^n\, M(t) + \sum_{j=1}^{n-1} k_j\; t^{-(m/n)(n-j)-1},$$

equazione differenziale la cui soluzione risulta, dunque, equivalente alla soluzione della originaria equazione differenziale frazionaria (4.2); peraltro, e' da porre in evidenza come, ai fini della individuazione della soluzione della equazione differenziale ordinaria (4.8), in generale, non risulti agevole la determinazione di una sua soluzione particolare.

5. Osservazioni e considerazioni finali

Da quanto presentato nelle sezioni precedenti, e' da notare come, se $\alpha \in \mathbb{Q}$, la soluzione dell'equazione differenziale frazionaria sia riconducibile alla soluzione di una equazione differenziale ordinaria, lineare, non omogenea. In particolare, nel futuro ci si prefigge di individuare un metodo generale per la risoluzione dell'equazione differenziale frazionaria anche nel caso in cui $\alpha \in \mathbb{R}$. Inoltre, ci si propone anche di analizzare le proprieta' di questo particolare regime di interesse composto frazionario e di confrontarlo con quelli tradizionali.

BIBLIOGRAFIA

[1] AMBROSE, B. W., ANCEL, E. W. e GRIFFITHS, M. D. (1993) Fractal Structure in the Capital Market Revisited, Financial Analysts Journal, May-June, 73-77.

[2] BACHELIER, L. (1900) Theory of Speculation, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., in COOTNER, P. H. (ed.) (1964) The Random Character of Stock Market Prices, 17-78, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusets.

[3] CHEUNG, Y.-W. e LAI K. S. (1993) Do Gold Market Returns Have Long Memory?, The Financial Review, 28, 2, 181-202.

[4] CUTLAND, N. J., KOPP, P. E. e WILLINGER, W. (1993) Stock Price Return and the Joseph Effect: Fractional Version of the Black-Scholes Model, Mathematics Research Reports. School of Mathematics. University of Hull., 6, 12, 1-29.

[5] DATTOLI, G., RICHETTA, M. e TORRE, A. (1990) Cosa e' e a Cosa serve il Calcolo Frazionario, Il Nuovo Saggiatore, 5/6, 19-28.

[6] GREENE, M. T. e FIELITZ, B. D. (1977) Long-term Dependence in Common Stock Returns, J. of Fin. Econ., 4, 339-349.

[7] GREENE, M. T. e FIELITZ, B. D. (1979) The Effect of Long-term Dependence on Risk-Return Models of Common Stocks, Operations Research, 27, 5, 944-951.

[8] JANICKI, A. e WERON, A. (1994) Simulation and Chaotic Behaviour of α-stable Stochastic Processes. Dekker, New York.

[9] LO, A. W. (1991) Long-term Memory in Stock Market Prices, Econometrica, 59, 5, 1279-1313.

[10] MANDELBROT, B. B. (1963) The Variation of Certain Speculative Prices, Journal of Business, in

COOTNER, P. H. (ed.) (1964) The Random Character of Stock Market Prices, 307-332, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusets.
[11] MANDELBROT, M. M. e Van NESS, J. W. (1968) Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications, SIAM Review, 10, 4, 422-437.
[12] MANDELBROT, B. B. (1972) When Can Price Be Arbitraged Efficiently? A Limit to the Validity of the Random Walk and Martingale Models, The Review of Economics and Statistics, 53, 225-236.
[13] OLDAM, K. B. e SPANIER, J. (1974) The Fractional Calculus. Academic Press, New York.
[14] PETERS, E. E. (1989) Fractal Structure in the Capital Markets, Financial Analysts Journal, July-August, 32-37.
[15] PETERS, E. E. (1991) Chaos and Order in the Capital Market. J. Wiley, New York.
[16] PETERS, E. E. (1994) Fractal Market Analysis. J. Wiley, New York.
[17] ROSS, B. (ed.) (1974) Proceedings of the International Conference "Fractional Calculus and Its Applications". Springer-Verlag, Berlin.
[18] ROSSI, F. M. e SCACCIAVILLANI, F. (1992) Non-Semimartingale Behavior in Asset Pricing: Arbitrage, Fractional Brownian Motion and Self-Similar Processes, comunicazione personale.
[19] SAMORODNITSKY, G. e TAQQU, M. S. (1994) Stable non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance. Chapman & Hall, London.
[20] WORKING, H. (1934) A Random-Difference Series for Use in the Analysis for Time Series, Journal of the American Statistical Association, 29, 11-24.

RAGUSA GRAFICA MODERNA - BARI