1993 Volumi trentesimo e trentunesimo

RENDICONTI

del Comitato per gli studi economici

VOL. XXX/XXXI

Cafoscarina

Titolo della rivista e ISSN

RENDICONTI DEL COMITATO PER GLI STUDI ECONOMICI 1591-9781

Recapito
Dipartimento di Matematica Applicata ed Informatica
Università di Venezia
Dorsoduro 3825/E
30123 Venezia
Tel 041 5242706–5298266
Fax 041 5221756

Il presente volume è stato composto con TEX

Edizione Libreria Editrice Cafoscarina
Società Cooperativa a r.l.
Ca' Foscari, Dorsoduro, 3246, 30123 Venezia

Stampato in Italia presso Stamperia Cetid s.r.l., via Ca' Rossa, 129, 30174 Mestre.
Novembre 1993

ANALISI DELLA STRUTTURA FRATTALE DEL MERCATO FINANZIARIO ITALIANO*

MARCO CORAZZA

Dipartimento di Metodi Quantitativi, Università degli Studi di Brescia

CARLA NARDELLI

Dipartimento di Matematica Applicata ed Informatica, Università degli Studi di Venezia

ABSTRACT The standard hypothesis on Normal (or Log-normal) distribution of the variations of the stock returns seems to be not verified in empirical works. In particular many outliers, unstationarity in the variance level and asymmetry suggest the use of a Pareto-Lévy stable probability distribution. In our work, we have estimated the four parameters of this distribution for some time series concerning both stock market indexes and securities of the Italian financial market. These estimates lead to formulate the assumption that the stochastic process generating the analysed stock returns be characterized by a fractal structure. In order to check this assumption, we have empirically verified that the random variable concerning stock returns shows the property of statistical self-similarity, that is one of the properties of the fractal objects. Finally, we have empirically verified the property of invariance with respect to the sum (under the hypothesis of indipendence of the random variables), property caracterizing only this family of distributions.

KEYWORDS Pareto-Lévy stable distribution, fractal structure, invariance with respect to the sum.

---

* Ricerca finanziata dal M.U.R.S.T. (quota 60%).

1. INTRODUZIONE

L'approccio classico all'analisi delle serie temporali riguardanti il mercato finanziario consiste nell'investigare le distribuzioni di probabilità delle variazioni delle quotazioni azionarie. La maggior parte dei modelli sviluppati si basa sull'ipotesi di indipendenza e di identica distribuzione di tali variazioni, in particolare quella Normale o Log-normale a seconda dell'ipotesi che la deviazione standard delle variazioni non risulti, o risulti, dipendente dal livello delle stesse quotazioni azionarie. Tra i modelli sviluppati in questo ambito è da ricordare quello di F. Black e M. Scholes per la valutazione del prezzo delle opzioni. Peraltro in molti lavori si evidenzia che queste distribuzioni teoriche non sono caratterizzate dalle stesse proprietà di cui godono le distribuzioni empiriche, in particolare un alto livello di curtosi, ovvero la presenza di una distribuzione di probabilità più "appuntita" di quella Normale (o Log-normale) avente stessa media e stessa varianza, la non stazionarietà della varianza, ovvero la dipendenza del momento del secondo ordine anche dal tempo oltre che dal lag temporale, e l'asimmetria, ovvero l'assenza di simmetria della distribuzione rispetto alla propria mediana. In particolare B. Mandelbrot ([16]) rileva che la distribuzione dei tassi di rendimento risulta invariante rispetto alla somma, ovvero non dipende dal grado di aggregazione dei dati, proprietà nota come stabilità.

L'insieme di questi aspetti particolari ha suggerito l'uso della famiglia di distribuzioni di probabilità Pareto-Lévy stabili, che sono distribuzioni di tipo frattale, aventi funzioni di densità statisticamente auto-simili.

Inoltre, come già suggerito da B. Mandelbrot ([16]) e verificato da E. Peters ([23]) su dati americani, da un elementare confronto fra i grafici dei tassi di rendimento azionari per crescenti valori del passo temporale è stata evidenziata una sorta di similitudine, proprietà questa che ci ha fatto congetturare la presenza di una struttura auto-affine rispetto al tempo, tipica dei processi stocastici frattali.

Nel presente lavoro, dapprima vengono stimati i quattro parametri che individuano la funzione caratteristica delle variabili casuali stabili, usando dati relativi sia ad alcuni indici che ad alcuni titoli del mercato azionario italiano. Viene poi verificata la proprietà di invarianza rispetto alla somma per la serie storica relativa all'indice COMIT che è combinazione lineare di alcuni altri indici, sotto l'ipotesi di indipendenza di questi ultimi, proprietà che è caratteristica delle variabili casuali stabili.

Successivamente, al fine di verificare se la congetturata proprietà di auto-similarità sia compatibile con i dati disponibili, si è ipotizzato un processo stocastico sottostante con distribuzione stabile ed invariante rispetto ad una contemporanea omotetia sia della scala spaziale che della scala temporale.
I valori delle stime ci inducono a ritenere plausibile che il processo stocastico sottostante i rendimenti azionari sia di tipo Pareto-Lévy stabile, invariante rispetto alla somma e caratterizzato da una struttura auto-affine, il che conduce a congetturare che esso possieda una struttura frattale.
Gli aspetti teorici fondamentali per la nostra analisi sono presentati nella sezione 2. Gli aspetti applicativi ed i risultati sono riportati nella sezione 3. ed in appendice. Nella sezione 4. si presentano delle considerazioni relative ai risultati stessi, mentre nella sezione 5. si traggono alcune conclusioni.

2. ASPETTI TEORICI

In questa sezione si riportano sinteticamente alcune definizioni ed i principali risultati teorici necessari per la comprensione del seguito. Per maggiori approfondimenti si rimanda a [12] e [13].

Definizione 2.1. Una funzione di ripartizione F è stabile in senso debole (o largo) se per ogni m fissato esistono delle costanti reali $a_m > 0$ e b_m tali che

$$\sum_{i=1}^{m} X_i \stackrel{d}{=} a_m X + b_m \tag{2.1}$$

dove
X_i, $i = 1, \ldots, m$: variabili casuali indipendenti ed identicamente distribuite aventi la funzione di ripartizione F;
X: variabile casuale avente la funzione di ripartizione F.

È da notare come alcuni diano una definizione diversa di distribuzione stabile, in modo tale che la (2.1) diventa

$$\sum_{i=1}^{m} X_i \stackrel{d}{=} a'_m X + a'_m b'_m . \tag{2.1.A}$$

Nel presente lavoro noi seguiamo la formulazione precedente, secondo quanto esposto in [13].

Definizione 2.2. Una funzione di ripartizione F è stabile in senso forte (o stretto) se è stabile in senso debole e se $b_m = 0$.

Definizione 2.3. Se F è una funzione di ripartizione stabile, allora la variabile casuale X è detta stabile.

Esempi di variabili casuali stabili in senso stretto sono la Normale e la Cauchy.
Un processo stocastico stabile è perciò una funzione aleatoria $X(t)$ tale che le variazioni $X(t+h) - X(t)$ sono stazionarie ed indipendenti. Inoltre, salvo che in casi particolari, i processi stabili hanno varianza infinita e sono discontinui con probabilità uno ([6]).
Dal momento che tutte le variabili casuali stabili in senso debole sono assolutamente continue ([13]), per ognuna di esse è possibile definire una funzione di densità; in generale, però, non è possibile esprimerla in una forma che non sia quella integrale, tranne che in pochi casi particolari ([4]). Si può tuttavia specificare ciascun membro di questa famiglia di distribuzioni mediante la funzione caratteristica (ovvero la trasformata di Fourier della funzione di densità), nella sua forma canonica data da Lévy-Khintchine:

$$\Phi(t) = \exp\{i\,\delta\,t - |\gamma\,t|^{\alpha}[1 + i\,\beta\,\mathrm{sgn}(t)\,\omega(t,\alpha)]\} \tag{2.2}$$

dove
$i = \sqrt{-1}$;
$\mathrm{sgn}(t) = |t|/t$;
$\omega(t,\alpha) = \begin{cases} \tan(\alpha\pi/2) & \text{se } \alpha \neq 1 \\ (2/\pi)\log|t| & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$;
$\alpha \in]0,2]$: esponente caratteristico;
$\beta \in [-1,1]$: indice di asimmetria;
$c = |\gamma|^{\alpha} \in]0,+\infty[$: parametro di scala;
$\delta \in]-\infty,+\infty[$: parametro di locazione (o localizzazione).

In particolare, l'esponente caratteristico α individua il tipo di distribuzione della famiglia, quantificando sia il grado di "peakedness" della funzione di densità che la probabilità totale contenuta nella parte estrema delle code della distribuzione (il

parametro α è, dunque, un indicatore di curtosi); la varianza ed i momenti di ordine maggiore esistono finiti solo se $\alpha = 2$ (distribuzione Normale) mentre la media esiste solo se $\alpha \in]1, 2]$.
Se l'indice di asimmetria β è uguale a 0 allora la distribuzione è simmetrica attorno al parametro di locazione δ, se invece è maggiore di 0 la distribuzione è asimmetrica a destra (asimmetria positiva) con una sola coda lunga a destra e se, viceversa, il parametro è minore di 0 allora la distribuzione è asimmetrica a sinistra[1] (asimmetria negativa) con una sola coda lunga a sinistra ([25]). In particolare il grado di asimmetria è tanto più grande quanto maggiore è il valore assoluto di β; inoltre, quando β è attorno al valore 0, la densità delle distribuzioni stabili con $\alpha < 2$ risulta tanto più leptocurtica quanto più α è minore di 2. Se α tende al valore 2, l'effetto del parametro β sull'asimmetria della distribuzione tende sempre più a svanire. Quando $\beta \in \{+1, -1\}$, si ha perfetta asimmetria, ovvero la funzione di densità ha una sola coda lunga, con l'altra coda che tende a zero più rapidamente che nel caso Normale se $1 < \alpha < 2$, mentre scompare se $\alpha < 1$. È da notare che se $\alpha = 1$ allora $\beta = 0$ ([15] e [16]). In particolare quando $\alpha = 2$ il parametro di scala c è legato alla varianza σ^2 della distribuzione dalla relazione $c = \sigma^2/2$. Infine il parametro di localizzazione δ coincide con la media della distribuzione quando $\alpha \in]0, 1]$ mentre è la mediana della distribuzione quando $\beta = 0$.
È da mettere in evidenza che per le distribuzioni stabili vale il seguente teorema ([13]):

Teorema 2.1. Ogni distribuzione stabile con esponente caratteristico $0 < \alpha < 2$ ha momenti assoluti $E[|X|^d]$ finiti di ordine $0 < d < \alpha$. Tutti i momenti assoluti di ordine $d \geq \alpha$ non sono finiti.

Al fine di indagare la possibile struttura frattale del processo stocastico sottostante una serie temporale, ovvero per indagare la presenza o meno della proprietà statistica di auto-similitudine, già introdotta nella sezione 1., è necessario verificare la proprietà di autosimilarità (auto-affinità statistica) del processo stesso, cioè verificare se valga la seguente relazione:

$$X(\tau) \overset{d}{\sim} \lambda^{-1/\alpha} X(\lambda\tau) \tag{2.3}$$

[1] È da notare come alcuni associno il segno di β e l'asimmetria in maniera opposta a quanto presentato.

dove

$X(\cdot)$: processo stocastico con distribuzione stabile;

τ: parametro temporale;

$\lambda > 0$: lag temporale;

α: esponente caratteristico di $X(\cdot)$.

Questo significa che le funzioni caratteristiche dei due processi stocastici considerati nella (2.3) dipendono dagli stessi parametri e, dunque, significa che la distribuzione delle variabili casuali associate non è influenzata né da un'espansione della scala temporale ($\lambda\tau$) né da una contemporanea omotetia della scala spaziale ($\lambda^{-1/\alpha}$). Ciò è dovuto al fatto che vale il seguente

Teorema 2.2. I fattori di normalizzazione a_m della **Definizione 2.1.** sono tutte e sole le costanti del tipo $m^{1/\alpha}$, con α esponente caratteristico appartenente all'intervallo $]0, 2]$.

Inoltre è possibile caratterizzare la serie temporale generata da una data classe di processi stabili ([6], [19] e [22]) mediante i seguenti teoremi:

Teorema 2.3. Con probabilità uno, il grafico di un processo stabile simmetrico ($\beta = 0$) di indice α ha dimensione di Hausdorff pari a

$$\max\{1, 2 - 1/\alpha\}. \tag{2.4}$$

Teorema 2.4. L'esponente caratteristico α rappresenta la dimensione frattale della serie storica generata da un processo stabile.

Relativamente alla verifica della proprietà di invarianza rispetto alla somma di cui godono le variabili casuali stabili, si tratta di osservare se l'esponente caratteristico dell'indice COMIT sia coincidente con tutti quelli dei sette indici settoriali la cui combinazione lineare dà, come segue, l'indice COMIT stesso:

$$X_{COMIT} = \sum_{i=1}^{7} a_i X_i \tag{2.5}$$

dove

a_i: numeri reali;

X_i: tassi di rendimento aleatori, supposti indipendenti ed identicamente distribuiti.

Quanto premesso discende da una importante caratteristica di queste distribuzioni, nota con il nome di "proprietà di stabilità di Lévy" ([13]), riportata nella seguente proposizione:

Proposizione 2.1. Siano X, X_1 e X_2 variabili casuali con distribuzione stabile in senso stretto di esponente caratteristico α. Allora per ogni $a, b \in R_0^+$ si ha:

$$a^{1/\alpha}X_1 + b^{1/\alpha}X_2 = (a+b)^{1/\alpha}X. \tag{2.6}$$

Ciò equivale ad affermare che se le variabili casuali X_1 e X_2 sono stabili in senso stretto e possiedono esponente caratteristico comune α, allora anche la variabile casuale $X = a_1X_1 + a_2X_2$, oltre a distribuirsi secondo una legge stabile in senso stretto, ammette lo stesso esponente caratteristico α.
Lo stesso B. Mandelbrot ([16]) afferma al riguardo: "tale proprietà esprime un tipo di stabilità o di invarianza che è così fondamentale nella teoria della probabilità da essere semplicemente definita dal termine stabilità".
La proprietà appena presentata può essere estesa ad m variabili casuali indipendenti ed identicamente distribuite che siano stabili in senso stretto.
Anche se le variabili casuali stabili in senso stretto costituiscono una sottoclasse delle variabili casuali stabili in senso debole, esistono delle condizioni sotto cui i teoremi e le proprietà presentati finora, validi per le variabili casuali stabili in senso forte, possono venire generalizzati; uno di questi è dato nella seguente proposizione:

Proposizione 2.2. Se la funzione di ripartizione F è stabile con esponente caratteristico α diverso da 1, allora esiste una costante reale b tale che $F(x-b)$ è stabile in senso stretto.
Se invece $\alpha = 1$, un'appropriata costante di centratura è $b_m = b\ m\ \log(m)$.

Valgono infine le seguenti relazioni tra i parametri che individuano la funzione caratteristica delle variabili casuali stabili.

Proprietà 2.1. Se δ è diverso da 0 ed X è una variabile casuale stabile, allora $(X-\delta)$ è stabile in senso stretto purché α sia diverso da 1.

Proprietà 2.2. Se $\alpha = 1$, X è stabile in senso forte se e solo se $\beta = 0$.

3. ASPETTI APPLICATIVI

Al fine di verificare le proprietà precedentemente elencate abbiamo stimato i quattro parametri (α, β, c e δ) relativi alle serie temporali dei tassi di rendimento logaritmici di alcuni indici e di alcuni titoli del mercato italiano, tassi definiti come segue:

$$X_{t,n} = n^{-1/\alpha_1} \ln\left(\frac{P_{t+n}}{P_t}\right), \quad n = 1, \ldots, 25 \tag{3.1}$$

dove

P_j: prezzo al tempo j;

t: parametro temporale.

È da notare come la (3.1) si ottenga dalla (2.3) ponendo $\tau = 1$ e $n = \lambda\tau = \lambda$.

Gli indici ed i titoli presi in esame, i corrispondenti periodi campionari e le relative numerosità sono riportati nella seguente tabella:

Tab. 3.1

INDICI e TITOLI	da	a	Numerosità
COMIT	1973	1992	$\sim$ 5000
I 7 indici settoriali	1984	1992	$\sim$ 2000
FIAT	1979	1992	$\sim$ 3500
Altri 11 titoli	1986	1992	$\sim$ 1750

In particolare la proprietà di autosimilarità risulta verificata se, stimati[2] i quattro parametri della funzione caratteristica Pareto-Lévy stabile per ognuna delle serie temporali ottenute dalla (3.1) per $n = 1, \ldots, 25$, risultano verificate le seguenti relazioni:

$$\alpha_1 = \alpha_n, \quad n = 2, \ldots, 25, \tag{3.2}$$

$$\beta_1 = \beta_n, \quad n = 2, \ldots, 25, \tag{3.3}$$

$$c_1 = c_n, \quad n = 2, \ldots, 25, \tag{3.3}$$

$$\delta_1 = \delta_n, \quad n = 2, \ldots, 25. \tag{3.4}$$

[2] Per la stima è stata utilizzata una procedura presentata in [3].

Nelle seguenti tabelle sono riportate le stime dei quattro parametri della funzione caratteristica Pareto-Lévy stabile per le serie temporali degli indici e dei titoli suindicati per $n = 1$, mentre nei diagrammi proposti in appendice sono rappresentati graficamente gli andamenti dei valori degli stessi quattro parametri al variare di n per i soli indice COMIT e titolo FIAT; tale scelta è dovuta sia al fatto che l'indice COMIT ed il titolo FIAT presentano un comportamento rappresentativo, rispettivamente, degli indici settoriali e dei titoli, sia al fatto che ad essi risultano associate le serie storiche più numerose.

Tab. 3.2

INDICE	$\hat{\alpha}$	$R^2_{\hat{\alpha}}$	$\bar{R}^2_{\hat{\alpha}}$	$\hat{\beta}$	$R^2_{\hat{\beta}}$	$\bar{R}^2_{\hat{\beta}}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\delta}$
COMIT	1.690	0.997	0.997	0.064	0.838	0.823	0.007	0.001
COMIT Assicurative	1.659	0.998	0.998	0.151	0.956	0.952	0.008	0.002
COMIT Bancarie	1.729	0.998	0.998	0.122	0.972	0.970	0.007	0.001
COMIT Comunicazioni	1.631	0.995	0.995	0.037	0.599	0.566	0.007	0.000
COMIT Diversi	1.636	0.997	0.997	0.110	0.992	0.991	0.006	0.001
COMIT Finanziarie	1.656	0.997	0.997	0.065	0.800	0.782	0.007	0.001
COMIT Immobiliari	1.680	0.997	0.997	0.179	0.971	0.968	0.005	0.001
COMIT Industriali	1.672	0.997	0.997	0.117	0.712	0.686	0.008	0.002

Tab. 3.3

TITOLO	$\hat{\alpha}$	$R^2_{\hat{\alpha}}$	$\bar{R}^2_{\hat{\alpha}}$	$\hat{\beta}$	$R^2_{\hat{\beta}}$	$\bar{R}^2_{\hat{\beta}}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\delta}$
ALITALIA Privilegiate	1.575	0.989	0.988	0.179	0.994	0.994	0.011	0.001
ANSALDO	1.504	0.994	0.994	0.059	0.994	0.993	0.007	0.001
BENETTON	1.562	0.997	0.997	0.063	0.969	0.966	0.008	0.001
CEMENTIR	1.618	0.995	0.995	0.337	1.000	1.000	0.010	0.003
CIGA HOTEL	1.655	0.997	0.996	0.038	0.998	0.998	0.011	0.000
COGEFAR	1.496	0.990	0.989	0.062	0.995	0.994	0.010	0.001
DALMINE	1.289	0.983	0.981	0.198	0.998	0.997	0.009	0.005
FIAT	1.719	0.998	0.998	0.368	0.998	0.998	0.011	0.003
FIAT Privilegiate	1.675	0.998	0.998	0.095	0.994	0.993	0.011	0.001
GENERALI	1.684	0.999	0.998	0.207	0.931	0.924	0.009	0.002
L'ESPRESSO	0.946	0.934	0.930	-0.087	0.993	0.993	0.008	0.003
MONTEDISON	1.625	0.996	0.996	0.328	0.994	0.994	0.011	0.003

È da notare come il metodo di stima utilizzato fornisca soltanto dei valori puntuali delle stime dei quattro parametri e, per i soli α e β, dia anche una misura della bontà di accostamento al valore "vero" del parametro (per maggiori approfondimenti si veda [3]).

4. CONSIDERAZIONI

Dall'analisi svolta possiamo evincere le seguenti considerazioni:

(4.A) le distribuzioni di probabilità campionarie sono significativamente non Gaussiane, dal momento che tutti gli esponenti caratteristici α_n, $n = 1, \ldots, 25$, sono stati stimati a valori inferiori a 2. Ad ognuno di questi valori della stima risultano associati valori elevati sia di $R^2_{\hat{\alpha}}$ che di $\overline{R}^2_{\hat{\alpha}}$, il cui intervallo di variazione è, rispettivamente, [0.934, 0.999] e [0.930, 0.998].

(4.B.) all'aumentare del passo temporale n, gli esponenti caratteristici tendono ad assumere valori progressivamente vicini a 2;

(4.C) le stime degli esponenti caratteristici relative alle serie temporali dei titoli sono generalmente minori di quelle relative alle serie temporali degli indici e ciò conferma che le distribuzioni dei rendimenti degli indici sono più "vicine" alla distribuzione Normale rispetto a quelle dei singoli titoli ed evidenzia inoltre la bontà della procedura di diversificazione nelle scelte di investimento;

(4.D) risulta verificata l'ipotizzata proprietà di autosimilarità in relazione alle serie storiche degli indici per intervalli temporali di ampiezza maggiore o uguale a 5 circa (è da notare però come, per valori analoghi a quelli ottenuti per intervalli temporali inferiori a 5, alcuni autori ([23] e [25]) reputino comunque verificata l'ipotesi di autosimilarità);

(4.E) per quanto riguarda i rendimenti dei titoli, invece, si puo' notare che il range di variabilità degli esponenti caratteristici ha un comportamento analogo a quello descritto in (4.D), pur non essendo così regolare;

(4.F) si può considerare verificata l'ipotizzata proprietà di invarianza rispetto alla somma, sotto l'assunto di indipendenza dei sette indici settoriali, poiché gli esponenti caratteristici, per un fissato lag temporale, relativi all'indice COMIT ed agli stessi sottoindici settoriali assumono, mediamente, gli stessi valori;

(4.G) le stime dei coefficienti di asimmetria β_1, sia degli indici che dei titoli, risultano positive, ad eccezione del solo titolo L'ESPRESSO, cui è associato un valore negativo, mentre sono presenti delle differenze significative in tutti i β_n rispetto al passo temporale n. Ad ognuno di questi valori della stima risultano associati valori elevati sia di $R^2_{\hat{\beta}}$ che di $\overline{R}^2_{\hat{\beta}}$ (anche se, in media, leggermente inferiori a quelli assunti da $R^2_{\hat{\alpha}}$ e da $\overline{R}^2_{\hat{\alpha}}$), il cui intervallo di variazione è, rispettivamente, [0.599, 1.000] e [0.566, 1.000]. Si può inoltre notare che i valori assunti da β_1

in relazione ai titoli sono, mediamente, superiori a quelli degli indici che, dunque, risultano avere una distribuzione più simmetrica;

(4.H) le stime del parametro δ_1, che nel caso in cui $\alpha \in]1,2]$ rappresenta la media della distribuzione, relative alle serie temporali degli indici e dei titoli assumono, mediamente, gli stessi valori, anche se i primi ammettono un intervallo di variabilità di ampiezza "evidentemente" inferiore a quella dei secondi;

(4.I) per quanto riguarda le stime dei parametri c_n e δ_n, si può ragionevolmente affermare che esse rimangono pressoché costanti per ogni valore di n;

(4.L) poiché gli esponenti caratteristici α_n, $n = 1, \dots, 25$, assumono mediamente il valore 1.8, si può ipotizzare l'esistenza di un moto browniano frattale ([23]), caratterizzato da correlazioni a lungo termine ed autosimilarità statistica, che è possibile quantificare anche tramite un diverso indicatore (detto esponente di Hurst), la stima del quale ([5]) ha confermato per altra via i risultati qui ottenuti;

(4.M) poiché gli esponenti caratteristici α_n, $n = 1, \dots, 25$, rappresentano la dimensione frattale delle serie storiche generate da tale processo, si può affermare che essa assume circa il valore 1.8, discostandosi quindi dalla dimensione frattale del moto browniano standard pari a 2 (dimensione coincidente con quella del piano stesso).

5. CONCLUSIONI

Dall'analisi precedente, nonché dalle prove empiriche effettuate in [5] per stimare l'esponente di Hurst, si può pensare di proporre un criterio alternativo per la selezione fra alternative di investimento che tenga in considerazione sia le diverse distribuzioni di probabilità che, per quanto visto finora, meglio si adattano alla descrizione delle distribuzioni empiriche delle variazioni delle quotazioni azionarie, sia il parametro legato, in casi particolari, alla varianza che, per tali distribuzioni, non sempre esiste finita. In particolare, dal momento che l'esponente caratteristico delle distribuzioni stabili rappresenta la dimensione frattale delle serie storiche generate dal processo dei tassi di rendimento azionari (**Teorema 2.4**), si potrebbe ipotizzare un criterio alternativo a quello classico media-varianza, basato su tale indicatore. Più precisamente, il decisore che si trovi di fronte a due alternative di investimento A e B, cui sono associati rispettivamente gli esponenti caratteristici α_A e α_B, con $\alpha_A < \alpha_B$, potrebbe, a parità di altre condizioni, preferire l'investimento A all'investimento B, sulla base del fatto che l'investimento A è più "prevedibile" dell'investimento B, possedendo dimensione frattale minore. Infatti, la serie storica dei rendimenti del titolo A sarebbe in tal caso meno "frastagliata" di quella del titolo B, e ciò potrebbe essere sintomo della scarsa presenza di frequenti movimenti ed inversioni di tendenza, comportamenti questi di gran lunga preferibili da un investitore con avversione al rischio.

Fig. 1 Andamento dei parametri dell'indice COMIT

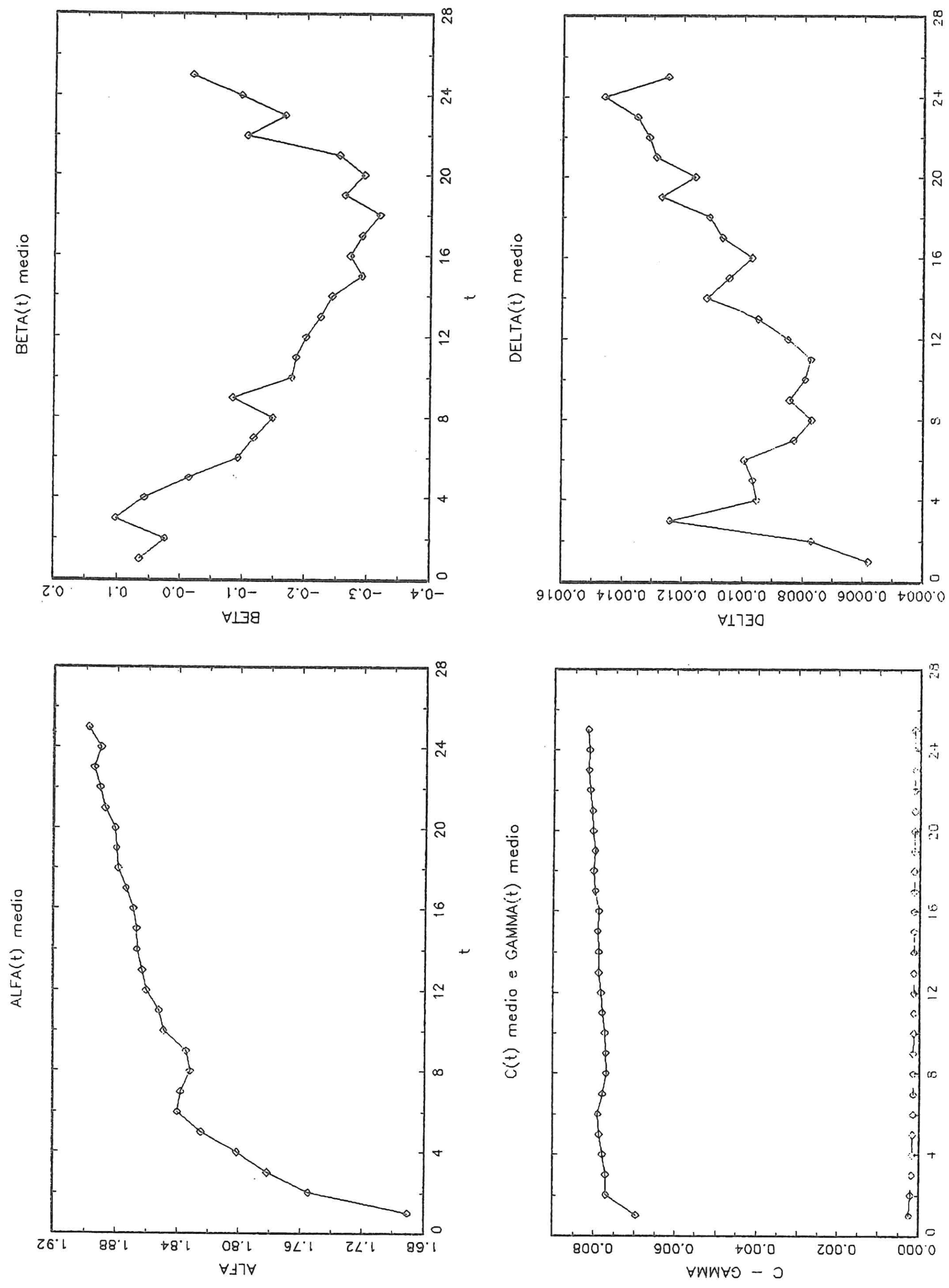
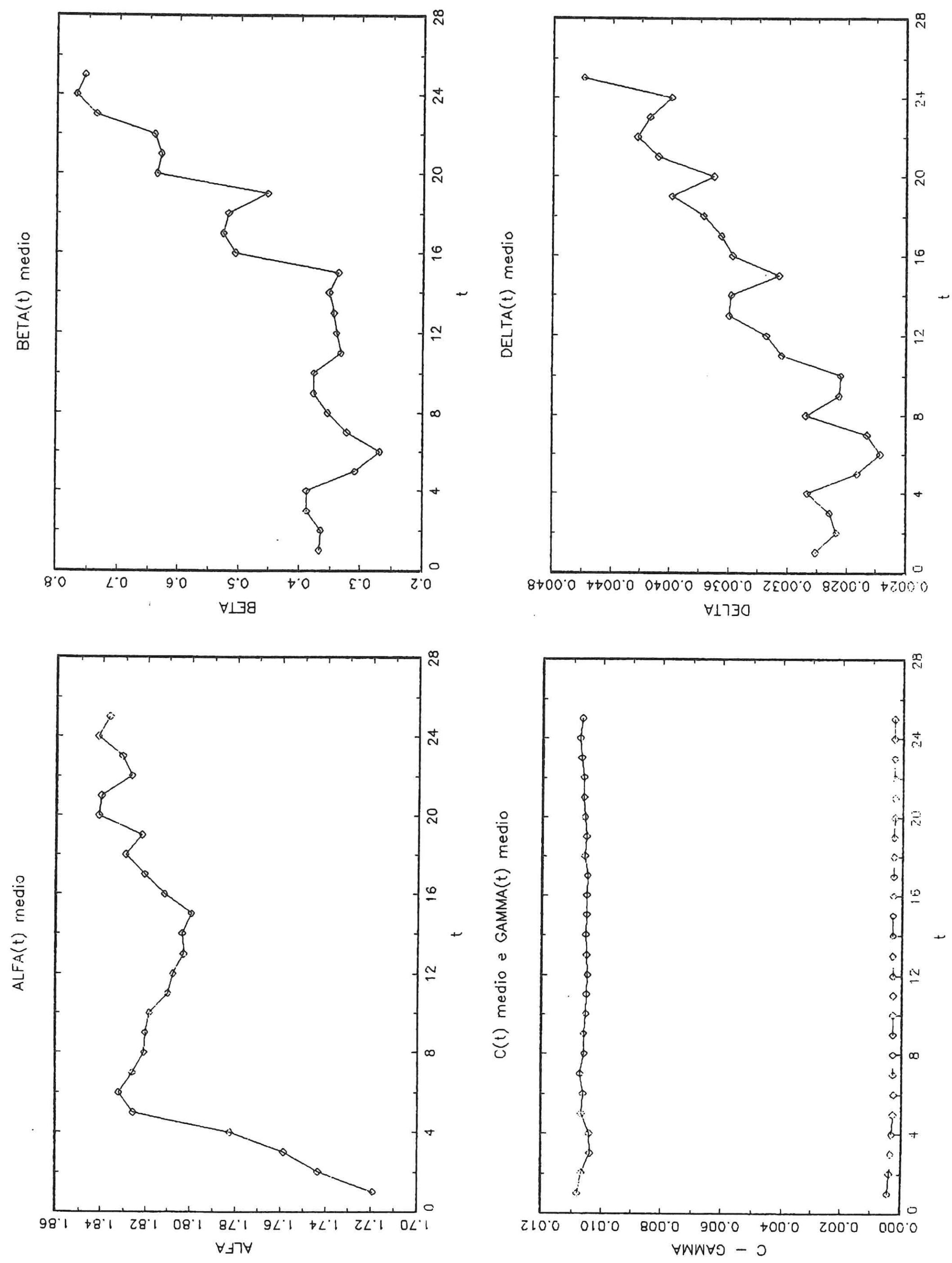


Fig. 2 Andamento dei parametri del titolo FIAT



BIBLIOGRAFIA

[1] BACHELIER L., "Teorie de la Speculation", *Annales de l'Ecole Normale Superieure*, 1900, pp. 21-86.

[2] BRASOLIN A., CORAZZA M., NARDELLI C., "Autosimilarità e Comportamento Non Lineare di un Indice Azionario nel Mercato Italiano", *Atti del XVI Convegno A.M.A.S.E.S.*, Treviso, 1992, pp. 155-170.

[3] CANESTRELLI E., CIPRIANI M. C., CORAZZA M., "Determinazione dei Parametri di una Funzione di Distribuzione di Probabilità Pareto-Lévy Stabile". In questo stesso volume, 1993.

[4] CANESTRELLI E., NARDELLI C., "Distribuzioni Stabili di Lévy dei Rendimenti del Mercato Azionario Italiano", *Atti del XV Convegno A.M.A.S.E.S.*, Grado, 1991, pp. 145-158.

[5] CORAZZA M., NARDELLI C., "Fenomeno della Dipendenza a Lungo Termine nel Mercato Finanziario Italiano", *Atti del XVII Convegno A.M.A.S.E.S.*, Ischia, 1993, pp. 359-382.

[6] FALCONER K., *Fractal Geometry*, J. Wiley, 1990.

[7] FAMA E. F., "Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis", *J. of Business*, 36, 1963, pp. 420-429.

[8] FAMA E. F., "Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market", *Management Science*, 11, 1965.

[9] FAMA E. F., "Efficient Capital Markets: a Review of Theory and Empirical Work", *J. of Finance*, 25, 1970, pp. 383-417.

[10] FAMA E. F., "Efficient Capital Markets: II", *J. of Finance*, 5, 1991, pp. 1575-1617.

[11] FEDER J., *Fractals*, Plenum Press, 1988.

[12] FELLER W., "The Asymptotic Distribution of the Range of Sums of Independent Variables", *Ann. Math. Stat.*, 22, 1951.

[13] FELLER W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, 1-2, J. Wiley, New York, 1971.

[14] MANDELBROT B. B., "The Pareto-Lévy Law and the Distribution of Income", *Inter. Econ. Rev.*, 1, 1960, pp. 79-106.

[15] MANDELBROT B. B., "Stable Paretian Random Functions and the Multiplicative Variation of Income", *Econometrica*, 29, 1961, pp. 517-543.

[16] MANDELBROT B. B., "The Variation of Certain Speculative Prices", *J. of Business*, 1963, 36.

[17] MANDELBROT B. B., "The Variation of some other Speculative Prices", *J. of Business*, 1967, 40.

[18] MANDELBROT B. B., Van NESS J., "Fractional Brownian Motion", *Fractional Noises and Applications*, SIAM Rev., 1968, 10.

[19] MANDELBROT B. B., "Statistical Methodology for Non-Periodic Cycles: from the Covariance to R/S Analysis", *Annals of Economic and Social Measurement*, 1, 1972.

[20] MANDELBROT B. B., *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, S. Francisco, 1982.

[21] OSBORNE M. F., "Brownian Motion in the Stock Market", *Operation Research*, 7, 1959, pp. 145-173.

[22] PETERS E. E., "Fractal Structure in the Capital Markets", *Finan. Anal. J.*, July 1989.

[23] PETERS E. E., , *Chaos and Order in the Capital Markets*, J. Wiley, New York, 1991.

[24] SINAI Y. G., "Self-Similar Probability Distributions", *Th. of Prob. and its Applic.*, 1, 1976, pp. 64-80.

[25] WALTER C., "Lévy-Stable Distributions and Fractal Structure on the Paris Market", *AFIR Intern. Colloq.*, Paris, 3, 1990, pp. 242-259.