TEMI DEL NOSTRO TEMPO

a cura di Dario Antiseri

Eleonora Montuschi – Pietro Daniel Omodeo

(a cura di)

ORDINARE IL MONDO

Prospettive logiche ed epistemologiche
su scienza, natura e società

ARMANDO
EDITORE

Università Ca'Foscari Venezia
Dipartimento di Filosofia e Beni Culturali

European Research Council
Established by the European Commission

This project has received funding from the European Research Council (ERC) under the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme (Grant Agreements No 725883 – *EarlyModernCosmology* / and No 667526 – K4U).

ISBN: 978-88-6992-679-2

Via Leon Pancaldo 26, Roma.

www.armandoeditore.it
segreteria@armando.it – 06/5894525

Sommario

Prefazione

Eleonora Montuschi, Pietro D. Omodeo

Questo volume prende le mosse da un workshop organizzato nel 2019 all'Università Ca' Foscari di Venezia sul rapporto fra logica, epistemologia e le scienze. Un gruppo di studiosi di filosofia della scienza, storia della scienza, logica ed epistemologia storica si sono confrontati sul tema dei fondamenti logici dei loro ambiti disciplinari e sulle relative ed emergenti questioni logico-epistemologiche. L'incontro, il cui titolo è ripreso in questo volume ("Ordering the world: logical and epistemological perspectives on science, nature and society"), nasceva da precisi interessi scientifici e pedagogici. Competenze di analisi e sensibilità di ricerca disciplinare si sono incontrate con una interrogazione più generale, riguardante l'opportunità di rinnovare l'attenzione verso un tipo di insegnamento della logica a vocazione applicata e interdisciplinare nei curricula di filosofia, anche ma non solo in connessione con aree specialistiche come la filosofia della scienza e storia della scienza. In sede di workshop si è altresì discusso del ruolo che la logica intrattiene con le diverse discipline e su quali strumenti essa, nelle sue diverse declinazioni, mette a disposizione per il perseguimento di una variegata gamma di obiettivi di analisi e ricerca. Le domande e le questioni emerse in quel contesto trovano riscontro nei contributi di questo volume.

Ringraziamo gli autori, sia i presenti al workshop sia chi tra loro, pur non avendo potuto partecipare di persona, hanno ugualmente ed entusiasticamente preso parte alla messa in forma di questo volume.

Ringraziamo Springer per aver concesso la pubblicazione di una versione italiana dell'articolo di Tranchini e Pistone «Intensional harmony as isomorphism» in corso di pubblicazione nel volume *Peter*

Schroeder-Heister on Proof-Theoretic Semantics (Thomas Piecha e Kai Wehmeier eds.) nella serie *Outstanding Contributions to Logic.* L'articolo 'La Geometria come scienza dello spazio' riproduce in versione italiana parti di Vincenzo De Risi, *Mathematizing Space. The Objects of Geometry from Antiquity to the Early Modern Age*, Birkhäuser, 2015.

Ringraziamo il Dipartimento di Filosofia e Beni Culturali dell'Università Ca' Foscari di Venezia per il sostegno finanziario al workshop del 2019 e alla pubblicazione di questo volume. Un ringraziamento particolare va a Giulia Gandolfi e Filippo Batisti per il lavoro di editing.

Questo volume collettaneo si inserisce all'intersezione di due progetti finanziati dal Consiglio Europeo della Ricerca: *EarlyModernCosmology: Institutions and Metaphysics* (Horizon 2020, GA 725883), e *Knowledge for Use: Making the most of social science to build better policies* (Horizon 2020, GA 667526).[1] I curatori di questo volume sono grati al lavoro svolto nel contesto di ciascun progetto da cui hanno tratto idee e ispirazione per l'ideazione del workshop e la pubblicazione del presente volume.

Venezia, 11 Novembre 2020

[1] Per informazioni sui progetti si rimanda riferimento a: unive.it/earlymoderncosmology; https://www.dur.ac.uk/k4u/

Studiare la logica a cavallo tra le discipline

Eleonora Montuschi, Pietro D. Omodeo

Al giorno d'oggi siamo abituati a pensare che la logica sia una disciplina a sé stante o magari una sottodisciplina della matematica. Ma la logica è anche una parte della riflessione filosofica, e per tradizione affiancata alla metafisica, all'ontologia, all'epistemologia. Come questo rapporto sia emerso e si sia consolidato, e come la logica sia venuta ad assumere un ruolo 'fondativo', appaiono questioni tutt'altro che scontate. A questo si deve aggiungere che la logica, per la sua natura normativa (in quanto studio delle regole, dei principi e delle condizioni che garantiscono il ragionamento corretto), ha trovato una sua collocazione in ambiti disciplinari eterogenei, ma pure accomunati da una vocazione al pensiero rigoroso, sistematico. Quali percorsi applicativi sono stati seguiti? Per esempio, quale compito può avere la logica nella riflessione epistemologica, scientifica, scientifico-sociale? E quale tipo di logica meglio si fa carico di questo compito (o compiti)? Quali applicazioni può avere nel mondo delle scelte umane? In che rapporto si pongono logica e matematica nei mutevoli scenari filosofici odierni?

L'accento cosmologico del titolo di questo volume, "metter ordine al mondo" intende porre in evidenza che una prospettiva interessante da percorrere dovrà essere "meno pura" e "meno astratta" di quanto l'intrinseca normatività della logica stessa possa far pensare. Il riferimento alla concretezza del reale sta altresì a significare che la risposta ai nostri interrogativi non potrà risolversi *ex parte subjecti* senza tener conto del referente, delle problematiche e dei contesti pratici delle scienze (al plurale).

L'idea di una costruzione logica del mondo, *eines logischen Aufbaus der Welt,* e la convinzione che la logica (in particolare la moderna logica simbolica) svolga un ruolo cruciale nello stabilire i confini della conoscenza legittima, oggettiva, marca una fase importante nella filosofia della scienza del XX secolo, come notoriamente avanzato da Carnap e i positivisti logici del Circolo di Vienna. La logica fornisce un ‘neutrale sistema di formule’, un simbolismo scevro di ‘scorie storiche’, in grado di chiarire i problemi e le asserzioni e fornire un sistema unitario di concetti tramite cui ricostruire l’esperienza e restituirla alla conoscenza. Ma l’idea non è nuova. La tradizione aristotelica ha giocato una parte fondamentale nello stabilire una connessione essenziale fra scienza e logica (seppur con un tipo diverso di logica rispetto a quella formale odierna). Aristotele era interessato a una logica come strumento (‘organon’) di ordinamento e sistematizzazione del pensiero scientifico. La logica, anche se per la prima volta nella storia ad essere studiata come una disciplina a sé stante, è pensata al servizio della scienza, tesa ad assicurare a questa uno strumento formale di indagine e di ricostruzione dei suoi domini conoscitivi. Aristotele pensò alle diverse scienze come strutture deduttive (o ‘dimostrative’) sul modello della sua logica sillogistica. Questo non va pensato nella direzione di un tentativo di unificazione di tutte le scienze, ma piuttosto di una ricostruzione enciclopedica: ogni scienza è dotata di una sua autonomia di dominio oggettuale ma partecipa ad un ordine condiviso di realtà che la logica è in grado rivelare e descrivere.

Anche le discussioni filosofiche della prima età moderna tendono a giustificare l’esistenza di una *mathesis universalis* ritenuta la base sia della cosmologia razionale che dell’arte del buon ragionamento. L’idea sottostante, già presente in Aristotele, riguarda la possibilità d’uso di un ordinamento matematico trans-specifico in grado di guidare la spiegazione di qualsiasi cosa che la scienza indaghi, come suggerisce Cartesio, o in grado di fornire un metodo logico combinatorio che garantisca certezza e universalità di applicazione (Leibniz).

Parallelamente, dall’antichità alla prima modernità, studiosi di diversa provenienza sottolinearono la rilevanza metodologica come pure il possibile utilizzo pratico della logica nei diversi campi del sapere – dai praticanti dell’arte medica, che invocarono il ragionamento sillogistico come base dei successi diagnostici, ai pedagogisti ed enciclopedisti che sostennero la preminenza dell’ordine e della sistematicità sulla conoscenza non unificata, ai riformisti sociali e ai primi utilitaristi che considerarono la conoscenza orientata verso la pratica come dipendente dalla riforma della logica come disciplina e come nuovo organo della conoscenza socialmente utile.[1]

In anni più vicini a noi, nella seconda metà del XX secolo, questa centralità della logica è stata messa in discussione dalle analisi sociologiche e storiche della conoscenza e della scienza.[2] Queste hanno messo in crisi l'idea di criteri universali di verità, storicizzando e relativizzando le categorie di valutazione della conoscenza scientifica, e rendendole a loro volta dipendenti non da strutture statiche e logicamente garantite ma da condizioni socio-politico-economiche e da contesti di uso pratico. Addirittura l'idea della rilevanza di fattori irrazionali di diversa natura e origine ha fatto irruzione in domini tradizionalmente pensati come protetti dall'ordine, dal sistema e dalle regole metodologiche. L'immagine ereditata dalla tradizione, che vede nel metodo una tecnica indiscutibile e indubitabile per interrogare la natura – ovvero un modo sicuro, universale, e apriori di intrattenere un dialogo diretto con il mondo esterno – comincia ad erodersi in conseguenza delle nuove riflessioni che guardano alla scienza dal punto di vista dei suoi cambiamenti storici, dei suoi variegati contesti di perseguimento, e dei diversi linguaggi che entrano e vengono impiegati nella costituzione e formulazione dei concetti scientifici. Al posto delle "sensate esperienze e necessarie dimostrazioni" di Galileo, delle "tavole" e "precetti metodologici" di Bacone, delle "regole per la direzione della mente" di Descartes, dei "canoni dell'induzione" di Mill, e, in una tradizione più recente, delle "regole di demarcazione" fra scienza e non scienza di Popper e poi Lakatos, si insinua il dubbio che nell'immaginato 'dialogo' con la natura i ruoli non siano fissi e determinati una volta per tutte, e che le comunità scientifiche mettano in campo apparati comunicativi, prima ancora che esplicativi, in grado di dare ampio spazio a fattori e strumenti che esulano dal novero previsto in modo rassicurante dalla

[1] Tali tendenze trassero impulso da una varietà di correnti che vanno dal Ramismo al progetto baconiano di un *Novum organum* sino all'Aristotelismo metodologico delle università tedesche e al Cartesianesimo logico.

[2] Il riferimento è qui ad un'ampia gamma di autori: Kuhn, Feyerabend, Barnes-Bloor, Daston-Galison, et alii.

tradizione. Questo non ha significato che la riflessione logica sia stata messa da parte, ma che il suo ruolo sia stato ripensato a partire da una prospettiva diversa, di minore centralità metodologica e di maggiore articolazione interna alla disciplina e ai suoi possibili usi.

A partire da questa riflessione assistiamo così al consolidamento di due specifici orientamenti. Da un lato, la logica si è espansa fino ad includere un numero crescente di forme argomentative e discorsive applicate ai domini più disparati del ragionamento umano: la logica informale, la pragma-dialettica, il pensiero critico, la nuova retorica, per menzionarne solo alcuni, si sono impegnati nell'analisi di forme di argomentazione che prendono ad oggetto i ragionamenti nella pratica (inclusa la vita quotidiana). Dall'altro lato, la logica formale si è applicata con successo crescente a campi di riflessione altamente specializzata, come la computazione, la teoria delle decisioni e l'intelligenza artificiale. I contributi di questo volume si interrogano su entrambi gli orientamenti e presentano prospettive sia storiche che contemporanee sui rapporti fra logica, epistemologia, le scienze e i diversi domini della pratica.

Nel capitolo di apertura, Vincenzo De Risi esplora il lungo processo epistemologico che portò alla trasformazione della geometria delle figure finite dell'antichità ad una geometria dello spazio nel corso della prima età moderna. Si tratta di un caso esemplare di come la concettualità filosofica abbia trasformato una disciplina quale la geometria attraverso un lungo lavorio di elaborazione dei rapporti reciproci tra spazio, relazionalità, estensione e quantificazione. Se le geometrie non-euclidee presuppongono una rivisitazione della geometria quale scienza dello spazio, la rilevanza scientifica ed epistemologica della storia che ci è qui presentata va ben oltre lo specifico interesse disciplinare. Ad esempio, le conseguenze sulla logica moderna non furono estrinseche a tale processo intellettuale. Nella figura di Leibniz, spiega De Risi, fu lo studio di uno spazio relazionale e il concetto ponte di *mathesis universalis* (tra cosmologia, metafisica, gnoseologia, logica e matematica) a promuovere una logica relazionale nuova che sapesse guardare oltre la sillogistica tramandata nelle Scuole. Più in generale questo saggio costituisce un modello esemplare di ricostruzione storico-epistemologica per comprendere il pensiero matematico e logico non in astratto bensì in stretto legame rispetto alla sua genesi e sviluppo.

Il saggio di Pierluigi Graziani, "Idee per un approccio formale alla matematica antica", si interroga sugli strumenti logici adeguati ad una indagine del pensiero matematico dell'antichità classica e, al contempo, apre a considerazioni circa i vantaggi per la ricerca logica derivanti da un confronto con questo terreno di difficile indagine. Graziani ci introduce quindi ai dibattiti in corso sull'opportunità e i vantaggi, le difficoltà e i problemi insiti in un approccio formale alla matematica del passato che cerchi di evitare fraintendimenti e anacronismi ma possa ambire ad un potenziamento sia della comprensione storico-scientifica sia dell'armamentario della logica. Il successo di un tale progetto potrebbe fare della logica il ponte da tempo invocato tra *Geisteswissenschaften* e *Naturwissenschaften* o, come siamo più abituati a dire sulla scia di Charles Percy Snow, tra *humanities* e *natural sciences*.

Paola Cantù apre per noi una finestra sulla dimensione 'impura' della logica pura. Prima delle teorie assiomatizzate, ci spiega, viene la ricerca e quest'ultima non è un processo soltanto mentale, ma anche sociale. Cantù introduce quindi l'approccio degli studi socio-epistemologici attenti alla cosiddetta *practical knowledge* al cuore del pensiero razionale, attraverso uno studio delle pratiche epistemiche di Giuseppe Peano. L'"avventura assiomatica" di questo protagonista della logica e della matematica del secolo scorso serve a denunciare i limiti di una riduzione della logica ad una sorta di analitica a priori poiché, sebbene la procedura ipotetico-deduttiva rappresenti l'ideale epistemico della disciplina nella sua conformazione novecentesca, il processo di astrazione che vi è alla base (dal triplice punto di vista gnoseologico, sociologico e storico) è il terreno su cui indagare la 'contaminazione' esperienziale della ricerca logica oltre che il suo potenziale ampliativo.

Francesca Poggiolesi affronta la nozione di fondazione, oggi ripresa in numerosi ambiti, dalla filosofia della matematica alla metafisica. Tale nozione, nota anche col termine inglese di "grounding", esprimerebbe rapporti logici a cui si ricorre per rispondere a vari "perché?" che intuitivamente non ottengono una risposta causale: "Quel tessuto è rosso perché scarlatto"; "La brocca è fragile perché ha una specifica struttura molecolare"; "Tizio è celibe perché è un uomo e non è sposato". Poggiolesi presenta varie distinzioni per dimostrare come un metodo formale logico possa chiarire in modo efficace e rigoroso la nozione di fondazione messa in campo in questi casi. Pur concentrandosi sull'accezione logica, indica come prospettiva di ulteriore ricerca l'approfondimento del rapporto tra tale nozione e quella di causalità, oltre che lo studio delle relazioni tra la sfera logica e altri ambiti, *in primis* con quello di fondazione concettuale o di fondazione metafisica.

Luca Tranchini e Paolo Pistone nel saggio "Armonia intensionale come isomorfismo" prendono le mosse dai risultati già raggiunti in recenti lavori sulla natura filosofica dell'*uniformità* delle prove di enunciati quantificati universalmente e si interrogano sulla possibilità di definire una nozione *intensionale* di armonia. Impiegando la nozione di isomorfismo tratto dalla logica proposizionale del secondo ordine, si soffermano sul senso dell'aggettivo "intensionale" e sulla strategia generale per ottenere una tale nozione utilizzando l'idea di isomorfismo. La nozione *non-intensionale* di Schroeder-Heister con l'utilizzo della logica proposizionale del secondo ordine è la base per la definizione di una nozione genuinamente intensionale.

Dalla logica formale e la filosofia del linguaggio si passa con Valia Allori alla filosofia della fisica. L'autrice si interroga circa il significato di spiegazioni di regolarità riferite a fenomeni macroscopici, come le leggi della termodinamica, mostrandoci come la logica ci aiuti a comprendere cosa significhi che una teoria scientifica come la meccanica statistica sia in grado di spiegare un fenomeno, nonché a comprendere in termini più generali che cosa costituisca una spiegazione in rilevanti contesti scientifici. Nella fattispecie ci viene mostrato come il tipo di regolarità fornita dalla meccanica statistica è affine rispetto alla spiegazione data dal modello a legge di copertura, secondo la quale una spiegazione è un argomento che ha come premesse leggi di natura.

Paolo Maffezioli sposta infine l'attenzione sul contributo della logica in argomentazioni di ambito economico traendo spunto dalle dottrine economiche di David Hume. Come egli mostra, il filosofo ricorse alla cosiddetta "fallacia della composizione", ossia un tipo di ragionamento che è valido solo in apparenza e si basa sull'attribuzione delle proprietà di una o più parti al tutto. Che si tratti di un errore tipico del pensiero economico fu messo in luce da John Maynard Keynes nella sua celebre *Teoria generale dell'occupazione, dell'interesse e della moneta*, in cui Keynes si servì dell'argomento per composizione per formulare il paradosso della parsimonia. Maffezioli mostra che, ben prima di Keynes, già Hume ricorse alla fallacia della composizione per redarguire politici speculativi che non si rendevano conto di come una politica monetaria espansiva fosse incapace di promuovere il benessere generale. In estrema sintesi, Hume fece ricorso a tale fallacia per mostrare che un Paese non può arricchirsi semplicemente "stampando moneta". Oltre a segnalare questo precedente agli storici del pensiero economico, Maffezioli insiste sull'attualità della teoria della moneta di Hume e sul ruolo in essa giocato dal rigore logico.

Nel loro complesso i contributi di questo volume forniscono una risorsa solida e una lettura coinvolgente per lettori interessati sia a specifiche questioni disciplinari sia a più generali possibilità di uso e applicazione dei diversi linguaggi e forme argomentative della logica.

La geometria come scienza dello spazio

Vincenzo De Risi[*]

La geometria è oggi generalmente definita come la *scienza dello spazio*. La geometria si presenta spesso, in effetti, come il ramo della matematica che studia le proprietà degli spazi metrici, degli spazi affini o proiettivi, degli spazi topologici, e di molti altri tipi di strutture che hanno collettivamente il nome di *spazi*. Il concetto di spazialità (in senso generalissimo) è visto come l'oggetto più proprio e distintivo dell'indagine geometrica, ed è oggi persino difficile immaginare che la geometria possa essere stata intesa in maniera diversa nel corso dei secoli.

Dal punto di vista storico, tuttavia, la questione è assai complessa. La geometria antica non tematizzava affatto la nozione di spazio, ed è impossibile trovare nel corso di tutti i tredici libri degli *Elementi* di Euclide (III sec. a.C.) alcuna menzione dello spazio o del luogo (τόπος). L'oggetto della geometria antica erano piuttosto le singole *figure*, i triangoli, i cerchi, i coni e le sezioni coniche, delle quali il geometra investiga le proprietà. Tali figure non erano concepite come immerse in uno spazio ambiente, e le loro proprietà individuali (la somma angolare, le aree e i volumi, etc.) erano l'unico oggetto di ricerca della geometria. L'indagine delle proprietà delle figure rimase il tema principale della geometria anche nel corso degli sviluppi medievali (arabi o europei) della geometria classica, e persino in tutta la geometria rinascimentale e in gran parte della geometria moderna. Occorre aspettare la fine del

[*] Ringrazio molto Mattia Mantovani e Pietro Omodeo per i loro preziosi consigli sulla stesura di questo capitolo.

Per una prima indagine sulla nascita del concetto di spazio geometrico, vedi i contributi in V. De Risi, 2015. Il presente saggio riprende la struttura generale e alcuni dei principali argomenti avanzati nella mia introduzione a quel volume, e prova ad offrire un nuovo punto di vista sullo sviluppo del concetto di spazio in relazione all'epistemologia della geometria.

sedicesimo secolo perché lo spazio venga anche solo nominato in un trattato di geometria (senza che se ne traggano grandi conseguenze), e almeno la fine del diciassettesimo secolo perché qualche matematico incominci a pensare che la geometria possa investigare le proprietà dello spazio. L'idea che la geometria sia la scienza dello spazio, tuttavia, appare non prima della fine del diciottesimo secolo, e prenderà piede nella comunità matematica soltanto nel corso del diciannovesimo. Che la geometria sia scienza dello spazio, insomma, è un'idea relativamente recente, e schiettamente *moderna*.

In questo senso è senz'altro sbagliato, dal punto di vista storico, dire che Euclide stesse investigando le proprietà dello spazio euclideo: tale spazio non era stato ancora concepito. Di conseguenza, per fare un esempio classico della storia della scienza, è impossibile sostenere che i grandi sviluppi dell'astronomia e della cosmologia durante la Rivoluzione Scientifica siano stati dovuti alla trasformazione dell'idea dello spazio cosmico finito della fisica aristotelica nell'idea dello spazio infinito che già si trovava formulata negli *Elementi* di Euclide.[2]

Si può sostenere, in effetti, che la tematizzazione dello spazio come oggetto proprio dell'indagine geometrica sia stato *il maggior punto di svolta* dell'intera storia della geometria, e quello che segna la separazione fra la geometria classica e la geometria moderna. Certo, tale svolta non avvenne da sola, e altre importanti rivoluzioni (come l'algebrizzazione della geometria in Descartes e Fermat, o il successivo impiego di metodi infinitesimali, o ancora la scoperta dell'importanza delle trasformazioni continue e la nascita della topologia) precedettero e seguirono la svolta spaziale della geometria classica. Tuttavia nessun'altra trasformazione andò a toccare altrettanto in profondità non solo i metodi ma anche l'oggetto della geometria, e in generale la comprensione del ruolo della geometria nel sistema delle scienze.

[2] La tesi che Euclide stesse investigando lo spazio geometrico è diffusissima sia in libri di storia della matematica che in volume dedicati alla geometria. La tesi della rilevanza dello "spazio euclideo" per la Rivoluzione Scientifica è anche molto diffusa, e se ne può trovare un esempio celebre nella prefazione di A. Koyré, 1957. Le tesi di Koyré sull'argomento dipendono in maniera significativa da Husserl, e in particolare dalla *Crisi delle scienze europee* (del 1936 ma pubblicata nel 1954); vedi in particolare: E. Husserl, 1954; soprattutto i §§8-9 e l'appendice VI (il celebre saggio sull'*Origine della geometria*).

In questo capitolo vorrei offrire una breve storia degli sviluppi che condussero a concepire per la prima volta la geometria come scienza dello spazio. Questa storia sarà necessariamente molto parziale, perché in effetti la trasformazione della geometria da una scienza delle figure ad una scienza dello spazio fu un fenomeno storico estremamente complesso, che non avvenne puntualmente in un'epoca o in un autore, ma che fu al contrario il risultato di uno sviluppo continuo di molte idee distinte, che si intrecciarono fra loro in vario modo nel corso di molti secoli. Tale sviluppo coinvolse molte discipline: per esempio la geografia, la cosmografia e la prospettiva, che introdussero l'importante idea della possibilità di diverse rappresentazioni matematiche (mappe, proiezioni) di uno stesso spazio; oppure l'astronomia e la cosmologia moderna, che svilupparono l'idea di uno spazio cosmico infinito e misurabile; oppure ancora la meccanica, che contribuì potentemente all'idea della matematizzazione dello spazio; e ancora molte altre scienze.

Restringerò la mia prospettiva soprattutto alla *storia della filosofia* dello spazio geometrico. Si tratta, certamente, di una prospettiva molto ristretta sull'argomento. Si tratta anche, tuttavia, di uno dei (non molti) casi in cui la riflessione filosofica anticipò e influenzò lo sviluppo delle scienze esatte. Credo che si possa dimostrare, in effetti, che la trasformazione della geometria in scienza dello spazio sia dovuta soprattutto all'avvento di alcune nuove idee filosofiche piuttosto che all'insorgere di specifici problemi geometrici prodotti dall'interazione della geometria con le altre scienze. Mi pare, insomma, che nel corso dei secoli vi sia stato un fondamentale sviluppo *metafisico* della nozione di spazio; che a tale sviluppo seguì una diversa concezione *logica* ed *epistemologica* della geometria; e che tale rivoluzione metafisica, logica ed epistemologica produsse poi l'effettiva costituzione di una geometria dello spazio.

Per abbozzare una storia della filosofia dello spazio geometrico, mi servirò di uno schema quadripartito, che pur sacrificando molti dettagli e molte complessità in favore della semplicità e alla perspicuità, mi pare che possa catturare efficacemente le maggiori tappe concettuali che hanno condotto dalla geometria delle figure alla geometria dello spazio. In una prima fase, quella del fiorire della matematica greca, la geometria fu semplicemente intesa come non-spaziale; in una seconda fase, che arriva almeno fino al diciassettesimo secolo, la geometria fu concepita come fondata su un'estensione materiale; in una terza fase, che si sovrappone con la precedente a partire dal sedicesimo secolo, si teorizzò la spazialità delle figure geometriche; e in una quarta fase, a partire dal diciottesimo secolo, si affermò l'idea di una geometria dello spazio.

1. La geometria senza spazio

La prima fase del nostro schema dello sviluppo dell'ontologia della geometria abbraccia la matematica e la filosofia greca del periodo classico ed ellenistico. Essa si caratterizza per la completa assenza di riferimenti allo spazio e per la chiara tematizzazione delle *figure* come oggetto della geometria. Tali figure erano concepite come irrelate le une rispetto alle altre, e non erano viste come immerse in un ambiente spaziale o materiale. Le ontologie matematiche sviluppate in questi secoli furono molto diverse fra loro e le figure geometriche poterono essere riguardate come idee platoniche, come "enti intermedi", o ancora come astrazioni aristoteliche, o forse come corpi materiali (nelle varie scuole ellenistiche); ma in ogni caso, le figure furono sempre concepite come il solo oggetto dell'indagine geometrica.

Nelle opere di Platone (428-348 a.C.), la matematica non è caratterizzata a partire dal proprio oggetto di indagine, ma piuttosto a partire dal metodo da essa impiegato per arrivare alla verità: metodo ipotetico e diagrammatico.[3] Resta piuttosto evidente, tuttavia, che Platone considerasse la *forma* e la *figura* (εἶδος, σχῆμα) come i caratteri essenziali degli oggetti geometrici.[4]

Questo approccio sembra tuttavia mutare già nella generazione successiva a quella di Platone, e crediamo che Eudosso di Cnido possa avere

[3] Su questo punto vedi per esempio I. Mueller, 1991, pp. 85-103; e B. Vitrac, 2005, pp. 269-301.

[4] Gli oggetti indagati dai geometri erano senz'altro per Platone forme o idee: vedi per esempio *Resp*. Z, 510d-e; *Resp*. H, 527c; *Epin*. 990d; *Phaedo* 96e-97b; *Phil*. 62a. Dobbiamo a Platone la più antica definizione rimastaci di "figura" (σχῆμα), come limite di un solido (στερεοῦ πέρας), in *Meno* 76a. Sulla matematica come scienza ipotetica, vedi *Resp*. Z, 510d, *Resp*. H, 533b-c. Sulla matematica come scienza che impiega diagrammi e "icone" delle idee, vedi i celeberrimi passi sulla linea divisa in *Resp*. Z, 509d-511e, *Resp*. H, 533e-534a, e poi per esempio *Phil*. 50c, 62; *Crat*. 436d; *Resp*. H, 529c-d; *Epin*. 976e-979a. Un'introduzione classica all'epistemologia matematica platonica è A. Wedberg, 1955.

introdotto in matematica il concetto generale di *grandezza* (μέγεθος), ossia quantità continua, sul quale poi fondò una nuova teoria delle proporzioni (che troviamo espressa, forse con qualche mutamento, nel successivo Quinto Libro degli *Elementi* di Euclide.[5] Questo concetto di grandezza aveva portata molto vasta, e comprendeva linee, superfici e figure solide, e forse anche altri oggetti, e consentiva alla matematica "generale" di Eudosso di applicarsi a tutti questi diversi ambiti.

Negli stessi anni, Aristotele (384-322 a.C.) discuteva della possibilità (da lui avversata) che la scienza generale delle grandezze consentisse una trattazione uniforme di tutta la matematica, e che quindi questa disciplina potesse essere "univocata" sotto il nome di "matematica universale" (καθόλου μαθηματική, in seguito chiamata *mathesis universalis*).[6] In ogni caso, Aristotele certamente accettò l'idea che almeno la geometria, come disciplina che tratta di linee, superfici e solidi, potesse essere considerata come la scienza delle grandezze; e anzi la definì non attraverso il suo metodo (come aveva fatto Platone), ma attraverso il suo oggetto di indagine.[7] Queste "grandezze" di Eudosso e di Aristotele erano in effetti sempre dotate di forma e figura (che Aristotele considerava come proprietà e accidenti propri della grandezza)[8], ed erano insomma grandezze concrete: segmenti di retta, triangoli, cerchi, sfere. L'ontologia di tali grandezze era modellata su quella della sostanza (esse si comportano, secondo Aristotele, proprio *come se* esse fossero sostanze), e pertanto le grandezze erano viste come figure geometriche indipendenti le une dalle altre che potevano essere studiate individualmente.[9]

[5] Fra i molti studi sulla paternità eudossiana del Quinto Libro degli *Elementi*, vedi per esempio W. Knorr, 1975 che argomenta anche a lungo su possibili differenze fra Eudosso ed Euclide.

[6] *An. Post.* A 24, 85^{a}37-85b1. Altri importanti passi sulla matematica universale in Aristotele sono *An. Post.* A 5, 74^{a}17-25; *Metaph.* Γ 2, 1004^{a}2-9, E 1, 1026^{a}25-27, K 7, 1064^{b}7-9. Sullo sviluppo del concetto di matematica universale da Aristotele all'età moderna, vedi D. Rabouin, 2009; e il classico G. Crapulli, 1969.

[7] La formulazione più chiara è probabilmente quella di *Rhet.* A 2, 1355b30-31: γεωμετρία περὶ τὰ συμβεβηκότα πάθη τοῖς μεγέθεσι. La definizione è comunque ricorrente nelle opere aristoteliche, e si legge per esempio in *Eth. Nic.* Z 11, 1143^{a}3-4; *An. post.* A 7, 75^{b}5; A 10, 76^{a}35; A 32, 88^{b}29.

[8] Vedi per esempio *De an.* Γ 1, 425^{a}18: μέγεθος γάρ τι τὸ σχῆμα.

[9] L'ontologia aristotelica degli enti matematici e il paragone di essi con le sostanze separate (se pure essi non sono sostanze separate) sono in *Metaph.* M 2-3.

Compito della geometria era dunque studiare le proprietà del triangolo, o del cerchio, o di altre simili grandezze figurate. D'altra parte, proprio il fatto di considerare le figure geometriche come grandezze figurate implicava immediatamente un interesse sugli aspetti quantitativi e misurabili di queste figure: perché la loro essenza era la grandezza, e la grandezza è espressa in termini quantitativi. Questa idea aristotelica si sposa bene, in effetti, con la teoria delle proporzioni di Eudosso che, probabilmente, la generò (la teoria delle proporzioni essendo essenzialmente una teoria della misura), e in generale con i principali sviluppi della matematica classica, che era soprattutto volta a trovare aree e volumi di varie figure (il problema generale della "quadratura" geometrica).

L'opinione aristotelica che la geometria fosse *scienza delle grandezze* ebbe una fortuna straordinaria già nella tarda antichità classica, e fu poi prevalente nel medioevo, nel Rinascimento e nella prima età moderna. Per secoli, la geometria fu vista attraverso occhiali aristotelici, e quasi ogni manuale di geometria si apriva con una definizione di questa disciplina come scienza delle grandezze. Tale definizione, d'altra parte, ostacolava l'idea che la geometria potesse occuparsi di proprietà spaziali o posizionali che non avessero nulla a che fare con la misura di aree e volumi, e ancora nel Settecento un'obiezione sollevata contro coloro che sperimentavano una geometria della posizione e dell'ordine, per esempio, era che posizione e ordine non sono oggetti della geometria in quanto essi non sono grandezze.

I filosofi greci, del resto, non solo non inclusero lo spazio nella definizione della geometria, ma si affrettarono addirittura ad *escludere* che la geometria potesse avere relazioni con lo spazio. Platone considerava gli oggetti della geometria come non-spaziali perché puramente ideali, e aggiungeva che le idee non sono nello spazio. Aristotele sosteneva che gli oggetti della matematica, in quanto essi sono (a parer suo) astrazioni, *non sono in nessun luogo*: τὰ μαθηματικὰ οὐ πού.[10]

Il concetto stesso di spazio, del resto, mancava in gran parte alla riflessione filosofica greca. La nozione platonica di χώρα si riferisce a un'esten-

[10] *Metaph.* N 5, 1092^{a}19-20. Vedi anche, per esempio, *Phys.* Δ 1, 208^{b}23-26 (δηλοῖ δὲ καὶ τὰ μαθηματικά· οὐκ ὄντα γνει μενυιονατι πασσiquale questi verrebbero a trovarsi.i enti matematici si creel primo passaggio, mentre nel secondo come ssiὰρ ἐν τόπῳ…), e *De cael.* Γ 6, 305^{a}25-27 (…ἀκίνητον ἔσται καὶ μαθηματικόν· τοιοῦτον δὲ ὂν οὐκ ἔσται ἐν τόπῳ).

sione materiale molto più che a una estensione spaziale (le interpretazioni della χώρα come spazio sono in effetti tutte moderne, e successive all'invenzione rinascimentale dello spazio).[11] Il vuoto dell'atomismo pre-socratico era molto più simile al non-essere di Parmenide che ad un'estensione priva di materia (nei frammenti superstiti, Democrito non afferma mai che il vuoto è esteso, e non sembra consideralo tale). Il vuoto del successivo atomismo epicureo era indubbiamente esteso, ma tuttavia non sembra essere stato uno spazio in senso proprio: è un vuoto che "si ritira" di fronte alla materia, piuttosto che lasciarsi penetrare da essa, e in questo senso si comporta più come una "materia negativa" (un vuoto fluido) che come il moderno spazio "contenitore" delle teorie moderne.[12] L'antichità classica ebbe dunque certamente un concetto di *vuoto*, ma non un concetto di *spazio*.

Il concetto di *luogo* (τόπος) fu invece molto discusso nel corso dalla filosofia greca, e in particolare Aristotele dedicò un'importante parte della *Fisica* a questa nozione.[13] Il luogo aristotelico, tuttavia, è una nozione ecologica e non matematica. Esso concerne l'orientamento nell'ambiente circostante, la posizione geografica, la disposizione cosmica degli elementi, ma nulla che possa essere oggetto di un'indagine geometrica. Gli esempi aristotelici di luogo sono la bottiglia nella quale si trova il vino, il fiume nel quale si muove la barca, il cielo come luogo dell'aria. Chiaramente, non è possibile nessuna geometria del luogo in questo senso (una geometria della bottiglia o della barca). Per Aristotele, i luoghi non erano altro che oggetti mondani che *hanno la funzione di luogo* in un determinato contesto, e non c'era affatto l'idea dell'esistenza dello *spazio* come di un ente ulteriore e sottostante ai singoli luoghi concreti.[14]

[11] Le letture della χώρα come spazio, in effetti, divennero dominanti solo alla metà dell'Ottocento, e manifestamente sotto l'influenza della filosofia kantiana. Già Hegel, nelle *Lezioni sulla storia della filosofia*, identificava senz'altro il ricettacolo con lo spazio. Dopo di lui, uno dei più influenti sostenitori di questa lettura fu Eduard Zeller nella sua monumentale *Die Philosophie der Griechen* (iniziata nel 1844), essa trovò una delle sue punte estreme in Paul Natorp, il quale sostenne senza esitazioni che la χώρα rappresenterebbe pienamente lo spazio della scienza moderna. cfr. P. Natorp, 1925. Una delle migliori rassegne delle varie posizioni interpretative sulla spazialità della χώρα dall'antichità ad oggi si trova nel primo capitolo di D. Miller, 2003. Vedi anche J.-F. Pradeau, 1995, pp. 375-99; F. Fronterotta, 2014.

[12] Per una rassegna, vedi K. Algra, 1994. Sulla concezione dello spazio di Epicuro, vedi B. Inwood, 198, pp. 273-85.

[13] Soprattutto in *Phys.* Δ 1-5.

[14] Sulla storia del concetto di spazio vedi per esempio i saggi raccolti in M. Schemmel, 2016.

In definitiva, quindi, nel periodo greco classico non troviamo nessuna tematizzazione filosofica o scientifica del concetto di spazio (né relazionale, né assoluto, né astratto), e la geometria era teorizzata come scienza di grandezze o figure: una scienza di oggetti individuali, che non si trovano in alcuno spazio o luogo.

2. La geometria nella materia

Questo quadro generalissimo della metafisica e dell'epistemologia della geometria, tuttavia, incominciò a mutare già in età tardo-antica.

La trasformazione principale della metafisica degli enti geometrici avvenne attraverso le discussioni neoplatoniche sul concetto di materia. Molti filosofi neoplatonici volevano accettare l'idea di Platone che la materia, come χώρα, fosse estesa; al tempo stesso, però, intendevano anche affermare che essa dovesse essere materia prima (in senso aristotelico), e dunque priva di qualsiasi proprietà, incluse l'estensione e la grandezza. Plotino (205-270 d.C.), e forse altri prima di lui, sostenne allora che la materia prima fosse per sé stessa inestesa; ma che essa assumesse come sua *prima* determinazione formale proprio la grandezza e la quantità. Solo dopo essere diventata materia quantificata ed estensione pura, la materia poteva poi ricevere altre qualità, e farsi materia impenetrabile e corporea (e calda, fredda, colorata, etc.). Plotino distingueva dunque fra (1) la materia prima inestesa, (2) la materia dotata *soltanto* di quantità, che egli chiamava ὄγκος, ossia *volume* (o anche *massa*), e (3) la materia corporea segmentata in corpi individuali impenetrabili (materia estesa dotata di ἀντιτυπία). Il concetto intermedio di ὄγκος caratterizzava dunque un'estensione materiale ma incorporea, penetrabile, che può essere guardato come un importante antenato della nozione di spazio.[15]

Questo aspetto della teoria plotiniana della materia ebbe un grande seguito nelle successive ontologie neoplatoniche, tanto che quasi tutte accettarono che la grandezza fosse la prima determinazione della materia. Ecco un passo riassuntivo del neoplatonico Ammonio di Ermia (440-520):

[15] La principale trattazione del concetto di ὄγκος in Plotino si trova in *Enn.* II 4 [12], 11; ma vedi anche almeno *Enn.* VI 1 [42], 26. Su questo importante e difficile capitolo delle *Enneadi* vedi L. Brisson, 2000, pp. 87-111, si veda anche V. De Risi, 2012, pp. 143-63.

> La materia prima, che è priva di forma e di corporeità, riceve per prima cosa le tre dimensioni, e diventa un oggetto tridimensionale noto come il "secondo soggetto". Successivamente, esso riceve le qualità e diventa un composto corporeo quantificato.[16]

Questa nuova metafisica della materia quantificata aveva importanti conseguenze sull'ontologia matematica. I filosofi neoplatonici, infatti, accettavano generalmente l'idea che la grandezza fosse l'oggetto proprio della geometria, come aveva detto Aristotele. Essi trovavano pertanto che la materia prima quantificata, che non era ancora corporea e sensibile, fosse il sostrato delle figure geometriche. Ancora di più: se per Aristotele la quantità e la grandezza inerivano a una sostanza, e pertanto erano già sempre quantità e grandezze *determinate*, nelle metafisiche neoplatoniche la grandezza inerisce direttamente alla materia senza la mediazione di alcuna sostanza e di alcun individuo. Pertanto in tali metafisiche si può parlare senz'altro di una estensione quantitativa indeterminata, che è posta a fondamento delle singole figure geometriche. Se per Aristotele la figura precedeva la sua determinazione quantitativa, in queste ontologie neoplatoniche la pura estensione dell' ὄγκος precede ed è condizione delle singole figure geometriche. Le figure geometriche possono vedersi anzi come altrettante parti "ritagliate" nell'estensione indeterminata della materia quantificata.

I dettagli delle teorie neoplatoniche, e le effettive articolazioni fra l'ontologia della materia quantificata e quella degli oggetti matematici, furono piuttosto variegate. Occorre almeno menzionare il fatto che sebbene la teoria plotiniana dello ὄγκος fosse stata inizialmente concepita come una teoria della materia cosmica, alcune metafisiche successive recuperarono il concetto aristotelico di *materia intellegibile* (ὕλη νοητή) e lo declinarono secondo questa nuova ontologia plotiniana.[17] La più famosa metafisica della geometria della tarda antichità, quella di Proclo di Licia (412-485),

---

[16] Amm. *In cat.* 54.

[17] La ὕλη νοητή compare in due passi aristotelici (*Metaph.* Z 10, 1036^{a}9-11, *Metaph*. Z 11, 1037^{a}4-5), in stretta connessione con il problema della molteplicità e divisibilità degli oggetti matematici, a caratterizzare il contrasto fra essi e le pure forme; e una terza volta (in *Metaph.* H 6, 1045^{a}34) a proposito della definizione e del genere delle grandezze. Invece l'espressione "materia matematica", ὕλη τῶν μαθηματικῶν, si trova in un luogo (forse spurio) di *Metaph.* K 1, 1059^{b}14-21.

in effetti, prende in considerazione l'esistenza di una *materia fantastica* (ὕλη φανταστική), pensata su modello della materia intellegibile aristotelica, che rappresenta una sorta di "lavagna ideale" presente nella facoltà immaginativa di ogni uomo, sulla quale il matematico traccia le varie figure geometriche che intende studiare.[18] Secondo Proclo, tutte le figure e i diagrammi geometrici esistono innanzitutto come immagini formate in questa materia immaginativa, ed è lì che le dimostrazioni sono eseguite e condotte a termine. Proclo articolò quindi una estesa ontologia degli oggetti geometrici come proiezioni delle idee intellettuali sullo "schermo" dell'immaginazione. Questa idea avrà un'importante posterità moderna (specialmente nella dottrina dello schematismo matematico di Kant), ma è fondamentale notare che essa fu originariamente resa possibile da una torsione "soggettivistica" della teoria plotiniana della materia prima quantificata (ὄγκος) come fondamento delle grandezze geometriche.[19]

Sebbene l'estensione materiale indefinita (reale o mentale che sia) teorizzata dai filosofi neoplatonici possa essere considerata come l'antenato della nozione moderna di spazio, essa non deve tuttavia essere confusa con lo spazio stesso. Innanzitutto, perché nessun filosofo neoplatonico avvicinò mai tale estensione al concetto di luogo o di spazio: essa rimase sempre innanzitutto la materia *dalla* quale gli oggetti geometrici sono formati, piuttosto che lo spazio *nel* quale essi si trovano. Ma inoltre restò sempre ferma l'idea che l'oggetto di indagine della geometria fossero le figure geometriche costituite a partire da tale estensione materiale, e non l'estensione stessa. L'estensione, al contrario, era vista come del tutto priva di proprietà geometriche proprie, e come la *condizione di possibilità*, anziché l'oggetto, dell'indagine geometrica. Rispetto a Platone o Aristotele era indubbiamente cambiata l'ontologia fondamentale della geometria, ma tale importante mutamento non aveva tuttavia scalfito l'assunzione epistemologica fondamentale: che la geometria è scienza delle figure e delle grandezze.

[18] Ci è rimasto un commento filosofico al primo libro degli *Elementi* di Euclide scritto da Proclo. La teoria dell'immaginazione matematica e della materia fantastica si trova nelle Seconda Prefazione di Proclo a tale trattato, che è dedicata alla filosofia della geometria. Una traduzione italiana di quest'opera è Proclo, 1978, *Commento al* I libro degli Elementi di Euclide, a cura di M. Timpanaro Cardini, Pisa, Giardini.

[19] Importanti studi sul ruolo dell'immaginazione nella filosofia di Proclo sono A. Charles-Saget, 1982; D. Nikulin, 2008, pp. 153-72; A. Lernould, 2010; D. Rabouin, 2015.

L'importanza di questa tradizione neoplatonica nello sviluppo dell'ontologia matematica successiva fu enorme, ed essa rimase largamente dominante anche in generazioni di pensatori che non vollero definirsi neoplatonici, ma che tuttavia continuarono a sostenere tesi neoplatoniche in filosofia della matematica. Secondo moltissimi autori medievali e della prima età moderna, la quantità e la grandezza sono le prime determinazioni della materia, la geometria si occupa di grandezze figurate che sono parti e limiti della materia prima quantificata, esiste una materia quantificata ideale (mentale), e l'immaginazione è la principale facoltà in gioco nelle dimostrazioni geometriche.

Nel Medioevo, in particolare, una lunga tradizione averroistica (ma non solo) accettò l'idea delle cosiddette *dimensiones indeterminatae* della materia, che altro non era che una variante dell'idea plotiniana della materia prima quantificata come sostrato degli oggetti geometrici.[20] Tale tradizione averroistica influenzò la filosofia della geometria per molti secoli, ed era ancora accettata dall'averroista Alessandro Piccolomini (1508-1578) nel Rinascimento. Piccolomini scrisse nel 1547 un importante saggio di epistemologia della matematica che suscitò molte polemiche e inaugurò la grande disputa nota come la *quaestio de certitudine mathematicarum* dei secoli sedicesimo e diciassettesimo. Tale disputa, alla quale parteciparono numerosissimi filosofi, logici e matematici, fu (anche e in gran parte) una discussione sul ruolo della materia quantificata e dell'immaginazione in geometria.[21]

L'idea che la geometria fosse fondata su un'estensione materiale rimase diffusissima anche in età moderna e fu accettata dalla maggior parte dei filosofi e dei matematici del sedicesimo e del diciassettesimo secolo. In alcuni casi, addirittura, le teorie fisiche sulla natura della materia finirono con l'influenzare le teorie matematiche. Per esempio alcuni pensatori che accettavano l'atomismo fisico, ma anche l'idea

[20] Un'ottima rassegna delle varie teorie delle *dimensiones indeterminatae* nel medioevo è in S. Donati, 2007, pp. 361-93.

[21] Il trattato di Alessandro Piccolomini è lo *In mechanicas questiones Aristotelis*, Roma, Blado, 1547. Sull'importante disputa che scaturì da questa pubblicazione vedi A. De Pace, 1993. Vedi anche P. Mancosu, 1996; A. Axworthy, 2016.

classica che la geometria fosse scienza della materia quantificata, professarono forme di atomismo matematico.[22]

Non è possibile dare conto qui neppure delle principali ontologie matematiche dell'età moderna, perché esse furono assai numerose e molto diverse fra loro. Al di là della loro varietà, tuttavia, praticamente tutte riposavano su questi due pilastri: che l'oggetto delle geometria fossero le grandezze, considerate come figure individuali (i triangoli, i cerchi, eccetera); e che tali figure fossero parti limitate di una indeterminata materia quantificata. A titolo di esempio, riporto un passaggio del grande commento alla *Fisica* di Franciscus Toletus (1532-1596), che esprime bene la teoria classica della materia (intellegibile) quantificata, sia pure volendosi discostare nei dettagli dalla filosofia di Tommaso d'Aquino, il quale

> …intende per "materia intellegibile" lo sostanza concepita come semplice quantità, quale è indagata dal matematico. E ciò è opinione comune. Ma mi sembra che sulla materia intellegibile occorra avere una diversa opinione, ossia che la sola quantità sia materia intellegibile. Bada anche, del resto, che il matematico non ha per oggetto la quantità, ma le figure e le forme… e dunque il geometra non studia la quantità, ma le figure fatte in essa.[23]

[22] La maggior parte degli scolastici e dei filosofi moderni, in effetti, abbracciavano l'idea, già aristotelica, della materia corporea come estensione continua; e non avevano difficoltà ad applicare ad essa i teoremi di Euclide, che riguardavano grandezze (ossia figure) continue e infinitamente divisibili. Tuttavia già nel medioevo vi furono importanti tentativi di fondare una fisica, e quindi anche una *geometria indivisibilista*, secondo la quale l'estensione deve considerarsi costituita da atomi geometrici. Alcune di tali teorie richiedevano una revisione profonda della geometria elementare ed erano apertamente anti-euclidee (e in genere assai ingenue sotto il profilo matematico). Idee atomistiche in geometria continuarono a diffondersi anche nel Rinascimento (con la matematica di Bruno, per esempio), nella tarda scolastica (Arriaga), e arrivarono (profondamente mutate) fino a Berkeley e Hume. Gli studiosi stanno ancora investigando i complessi legami fra questi autori, che abbracciarono dottrine simili, ma non identiche, nel corso di molti secoli; ma è chiaro che fu proprio l'idea fondamentale che le grandezze geometriche siano essenzialmente *materiali* che poté consentire lo sviluppo di tali teorie. Sulle teorie indivisibiliste nel medioevo il testo di riferimento è oggi *Atomism in Late Medieval Philosophy and Theology*, a cura di C. Grellard, A. Robert, Leiden, Brill, 2009. Per alcune simili teorie nel Rinascimento, vedi H. Vedrine, 1976, pp. 239-48; J. Seidengart, 2000, pp. 55-86; P.D. Omodeo, 2013, pp. 285-304. Sull'"isomorfismo" fra spazio e materia, e dunque anche dell'oggetto della geometria, in età moderna, vedi C.R. Palmerino, 2011, pp. 296-330.

[23] F. de Toledo, 1577, p. 8vb (I, I, 3). Si noti che Tommaso ha un'opinione sulla materia intellegibile, la quale è a grandi linee aristotelica: gli oggetti matematici, costituiti di materia

È impossibile, in questo quadro, non menzionare almeno la filosofia di Descartes (1596-1650), che vedeva nella *res extensa* (concepita appunto come estensione materiale quantificata e indeterminata) il sostrato proprio degli oggetti matematici. Da questo punto di vista, se la metafisica e la matematica di Descartes furono entrambe enormemente innovative rispetto alla tradizione precedente, la sua ontologia matematica rimase assolutamente classica e in continuità con la tradizione scolastica in cui egli era stato educato. Si può notare, anzi, come nelle mani di un grande matematico come Descartes la filosofia scolastica potesse condurre a risultati scientifici straordinari. La geometria algebrica cartesiana, in effetti, sarebbe inconcepibile se non si considerassero gli oggetti geometrici come immersi in un *background* esteso con delle coordinate: ma tale sfondo non è poi altro che la materia quantificata della tradizione precedente. In questo senso, sebbene si potessero trovare nella matematica greca e araba gli strumenti per utilizzare le coordinate della geometria, è soltanto la diversa concezione metafisica degli oggetti geometrici immersi nella materia che consentì lo sviluppo della nuova geometria algebrica.[24]

Negli stessi secoli nei quali si affermava l'idea di un'ontologia geometrica fondata nella materia quantificata, anche il concetto classico di luogo (τόπος) subiva importanti trasformazioni. Fu proprio il neoplatonismo della tarda antichità classica a contrastare la concezione aristotelica del luogo come "contenitore", con una nuova idea di luogo come estensione tridimensionale. Tale concetto di luogo non era più, o non soltanto, puramente ecologico: il luogo tridimensionale del tardo neoplatonismo greco è in effetti *quantificato* e *misurabile*. Questa nuova concezione si trova sviluppata già nei tardi commentatori neoplatonici di Aristotele, come Filopono e Simplicio, e godette di una certa fortuna

intellegibile, sono astratti dalla quantità *delle sostanze* materiali. Toletus gli oppone la teoria neoplatonica, in base alla quale la materia intellegibile non è altro che la quantità stessa (senza alcuna mediazione delle sostanze particolari), e le figure geometriche sono frammenti di tale estensione quantificata. Il punto fondamentale, comunque, è la chiara affermazione che il geometra studia le figure individuali, e non questo "ambiente quantitativo" (la materia intellegibile) nel quale le figure si trovano. Sulla teoria della materia quantificata nella tarda scolastica, vedi D. Des Chene, 2000 (che cita il passo di Toletus alle pp. 116-17).

[24] Sulla geometria cartesiana e le sue fonti classiche, vedi H. Bos, 2001. Sulla caratterizzazione della *res extensa* come pura quantità vedi un passo molto esplicito nella lettera di Descartes a Regius del dicembre 1641, dove si parla di "materia sive quantitas" (AT III, p. 455).

nel medioevo arabo e latino.[25] L'idea di un luogo del cosmo, come estensione tridimensionale co-estesa a ogni corpo, è molto vicina all'idea moderna di spazio. Tuttavia occorre sottolineare che tale luogo tridimensionale rimase pur sempre concepito come dipendente dai corpi, e non come condizione di possibilità di essi. Restava ferma l'idea che il luogo fosse essenzialmente un *accidente* delle sostanze corporee. Di conseguenza, anche la quantificazione del luogo era solo una proprietà derivata. Il luogo non era concepito come misurabile *in sé*: soltanto la materia era davvero misurabile (secondo l'ontologia dell'inerenza della quantità alla materia prima), e il luogo lo era derivativamente in quanto co-esteso alla materia. Pertanto, per esempio, secondo Filopono e Simplicio (VI secolo) il luogo è sempre *finito*, perché finita è l'estensione materiale del cosmo. Soprattutto, il luogo non era affatto concepito come il sostrato ontologico degli oggetti geometrici, ma solo come un oggetto misurabile (fra i tanti) in virtù del fatto di possedere un'estensione simile a quella materiale. In questo senso, queste ontologie del luogo neoplatoniche, che furono certamente fonti importanti per la filosofia moderna, non furono teorie dello spazio, e certamente non rilevarono nessun collegamento concettuale fra lo spazio e la geometria.

Si deve almeno menzionare, tuttavia, che il medioevo latino impiegò il termine *spatium* per teorizzare certi *spazi immaginari*, che si estendono al di là del *luogo* cosmico finito. Questi spazi immaginari ricevettero diverse trattazioni in diversi autori, e furono per lo più introdotti per risolvere questioni teologiche.[26] Gli spazi immaginari della scolastica avevano la caratteristica, rispetto alle teorie del neoplatonismo greco, di essere in qualche modo infiniti o indefiniti. Essi erano tuttavia per lo più riguardati come costruzioni mentali alle quali ci conduce la nostra immaginazione, e dunque non come una base ontologica sufficiente per fondarvi sopra la geometria (nonostante il legame stretto, già accennato, fra immaginazione e matematica). In molti autori medievali, in effetti, tali spazi non sono neppure attualmente estesi, e la loro "infinità" è soltanto una infinita collocabilità: Dio potrebbe creare in essi qualsiasi nuova estensione extracosmica, e dunque essi sono solo *potenzialmente*

[25] Sulla teoria antica del luogo quantificato e le sue relazioni con la materia, vedi F.A.J. De Haas, 1996; e ancora K. Algra, 2014.

[26] Sulle teoria del luogo e dello spazio nel medioevo, vedi E. Grant, 1981.

estesi. Ulteriori discussioni teologiche affermavano la presenza di Dio in ogni luogo, ma erano poi attente a sottolineare che l'"immensità" divina non comporta estensione e quantità, giacché "qui" luogo (*locus*) è preso di nuovo in senso ecologico-posizionale piuttosto che come estensione matematica.

Gli sviluppi dei concetti di spazio e di luogo nel medioevo e nella prima età moderna, insomma, rimasero generalmente distinti dalla metafisica della quantità e dall'ontologia della matematica.

3. La geometria nello spazio

Nel corso del Rinascimento, tuttavia, queste diverse tradizioni di filosofia del luogo e della materia quantificata si fusero insieme per produrre qualcosa di nuovo, che ebbe importanti conseguenze anche nella teoria della geometria. I testi dei filosofi neoplatonici (Plotino, Filopono, Simplicio) furono tradotti in latino e ampiamente discussi. Grazie alla loro influenza, il pensiero scolastico rinascimentale, e soprattutto il pensiero non-scolastico allora nascente fece proprie molte idee anti-aristoteliche, e in particolare quella dell'esistenza di uno spazio tridimensionale esteso e infinito.[27]

A me pare che questa moderna concezione dello spazio, che si manifestava in effetti come una pluralità di teorie simili ma tuttavia differenti fra loro, non derivò da una elaborazione del concetto greco di luogo; ma piuttosto da una *spazializzazione* del concetto di materia quantificata.

In particolare, Marsilio Ficino (1433-1499), produsse la più importante edizione latina delle *Enneadi* di Plotino in età moderna (edita postuma nel 1580). Venuto a discutere la cruciale nozione di ὄγκος, Ficino si attenne

[27] La storiografia degli ultimi decenni ha rimesso molto in discussione la distinzione fra pensatori scolastici e anti-scolastici nel Rinascimento, mostrando come, al di là della retorica filoaristotelica o antiaristotelica, essi condividessero molte tesi; e come gli scolastici fossero in grado di andare molto oltre la lettera di Aristotele per accettare le nuove dottrine. In particolare, autori come Pedro Fonseca (1528-1599) accolsero parecchie tesi sullo spazio dei "moderni" (vedi per esempio, P. Fonseca, *In metaphysicam*, V, XIII, q. 7, s. 1; in *Commentariorum in libros Metaphysicorum Aristotelis tomus secundus*, Roma, Tornerio, 1589, vol. 2, p. 604, sul fatto che lo spazio non sia né sostanza né accidente). Resta però che le teorie più radicali sullo spazio furono avanzate, nel Cinquecento, da autori violentemente antiaristotelici come Patrizi e Bruno.

al primo significato greco del termine e lo tradusse con *moles*.[28] Nel suo commento al testo, tuttavia, Ficino notò che lo ὄγκος plotiniano era una estensione incorporea penetrabile, e non ebbe remore a dire che esso era, a ben vedere, niente altro che *spatium*. Ficino non trasse conseguenze da questa osservazione, e continuò a professare una filosofia della matematica neoplatonica e una concezione del luogo aristotelica. Alcuni anni più tardi, tuttavia, un avido lettore di Plotino e Ficino, e grande avversario della filosofia aristotelica, Francesco Patrizi da Cherso (1529-1597), sviluppò questa idea e formulò una nuova concezione dello spazio.[29] Nella nuova metafisica di Patrizi, lo spazio è un ente esteso, tridimensionale, infinito, che è indipendente da, e precede ontologicamente, la materia e i corpi. Come lo ὄγκος plotiniano, esso è strettamente legato alla quantità, ed è detto in effetti la «fonte e l'origine della quantità».[30] Patrizi riteneva che tale spazio fosse coeterno a Dio, e che Dio creasse la materia in questo spazio preesistente e increato (sebbene comunque dipendente da Dio). La materia creata, in sé stessa priva di quantità, si estendeva e quantificava diffondendosi nello spazio. Si vede che in questo senso egli rovesciava completamente la precedente idea neoplatonica secondo la quale la materia è originariamente quantificata, e il luogo è invece misurabile in maniera derivata (in quanto luogo della materia). Per Patrizi è invece lo spazio ad essere quantità, e la materia è quantificata solo in quanto essa si estende nello spazio. È anche chiaro che la principale fonte di Patrizi è proprio Plotino e la metafisica neoplatonica della materia quantificata, e che egli semplicemente trasformò in spazio ciò che Plotino aveva chiamato volume e ὄγκος. Patrizi espose queste sue nuove idee in un'opera del 1587, il *De spacio physico et mathematico*, nella quale si legge, per esempio:

> Sebbene le categorie possano essere impiegate per le cose mondane, lo spazio non è una cosa mondana… Esso precede qualunque cosa sia corpo, o che non sia corpo, o che sia sostanza o accidente. E in effetti

[28] Plotinus, *Operum omnium philosophicorum libri LIV*, Basel, Perna, 1580.

[29] Sulle concezioni dello spazio di Patrizi in relazione alla geometria, vedi il mio V. De Risi, 2014. Sulla metafisica dello spazio di Patrizi vedi, fra gli altri, J. Henry, 1979, pp. 549-75; L. Deitz, 1999, pp. 139-169; H. Vedrine, 1996 (che contiene un'edizione francese del testo di Patrizi); O. Ribordy, 2019, pp. 133-56.

[30] *De spacio physico*, p. 15v; *Nova philosophia*, p. 65r.

> non solo gli accidenti espressi dalle categorie, ma le stesse sostanze, non sono che accidenti dello spazio… Lo spazio è infinito in atto.[31]

Patrizi non era il solo a tentare una nuova ontologia anti-aristotelica fondata su una nuova nozione di spazio come estensione infinita indipendente dai corpi, e negli stessi anni altri pensatori, come Giordano Bruno o Tommaso Campanella, svilupparono delle metafisiche dello spazio abbastanza simili. Patrizi, tuttavia, fu il solo che volle esplicitamente applicare la sua nuova teoria dello spazio all'ontologia degli oggetti geometrici. Nel suo trattato *Della nuova geometria* (1586), Patrizi sostenne che una nuova geometria si rendeva necessaria per il fatto che gli oggetti geometrici devono considerarsi come parti e figure nello spazio, e che pertanto l'oggetto della geometria deve considerarsi lo spazio stesso:

> Le Matematiche tutte, e principali, e subalterne, né si astraggono dalle cose naturali, né sono nella fantasia, né nella dianea, ma lo spazio è generale lor subietto.[32]

Si tratta, credo, della prima volta che la connessione fra spazio e geometria venne espressa e tematizzata. Una conseguenza importante dell'idea di geometria di Patrizi è che egli non fornì, all'inizio del suo trattato, i soliti postulati euclidei su linee rette o cerchi, ma li sostituì *con assiomi che riguardano lo spazio stesso*. In questo senso, Patrizi aveva certamente inaugurato una importantissima stagione della storia della geometria.[33]

---

[31] I due trattati di Patrizi sullo spazio apparvero come F. Patrizi, *De rerum natura libri II priores. Alter de spacio physico, alter de spacio mathematico*, Ferrara, Baldini, 1587; e furono successivamente rieditì con qualche modifica all'interno del capolavoro patriziano: F. Patrizi, *Nova de universis philosophia*, Ferrara, Mammarelli 1591. I passi citati si trovano in *De spacio physico*, pp. 12v, 15v; *Nova philosophia*, p. 64r, 55r. La polemica contro la filosofia di Aristotele e la concezione aristotelica delle categorie è ripresa spesso nei contenuti e nei toni dalle *Enneadi* di Plotino.

[32] F. Patrizi, 1587, p. 2. Le opzioni esplicitamente scartate da Patrizi erano quelle maggiormente in voga nella letteratura filosofica: che gli oggetti matematici fossero astratti dalle cose naturali era l'opinione di Aristotele e degli aristotelici; che fossero nell'immaginazione, l'opinione di Proclo e di molti neoplatonici moderni; che fossero nell'intelletto (διάνοια), l'opinione di Platone e dei platonici.

[33] Per un elenco di assiomi impiegati nella matematica in età moderna, inclusi quelli di Patrizi, vedi V. De Risi, 2016, pp. 591-676.

Tuttavia gli effettivi risultati della nuova geometria di Patrizi furono grandemente deludenti. Egli non era un matematico, e il suo tentativo produsse soltanto una riscrittura (neppure ben fatta) dei primi teoremi degli *Elementi* di Euclide. E sebbene Patrizi potesse assicurare il lettore che i triangoli e i quadrati dei quali egli parlava fossero parti e figure dello spazio, nulla era veramente mutato nella teoria geometrica. Pur tematizzando lo spazio come oggetto di indagine, Patrizi faceva tuttavia ancora *una geometria delle figure nello spazio*, piuttosto che una geometria dello spazio stesso. In questo senso, egli era rimasto all'idea neoplatonica di un'estensione quantificata come condizione di possibilità degli oggetti geometrici; estensione che era tuttavia sprovvista, essa stessa, di proprietà geometriche. Patrizi era arrivato a tematizzare lo spazio come oggetto della geometria perché esso era da lui concepito come *quantità*, ed egli condivideva ancora l'idea aristotelica della geometria come scienza della grandezza e della quantità. I rapporti spaziali e posizionali non erano presi in considerazione dalla sua "nuova" (ma invece classicissima) geometria. Patrizi, insomma, aveva cambiato l'ontologia della geometria senza cambiare la geometria stessa.[34]

Le idee sullo spazio di Patrizi (e degli altri suoi contemporanei) ebbero una vasta eco, e nel corso del Seicento esse furono accettate da diversi autori che si impegnarono in nuove metafisiche dello spazio esteso e infinito, come per esempio Pierre Gassendi (1592-1655), Henry More (1614-1687) e i neoplatonici di Cambridge, e infine Isaac Newton (1642-1727) stesso. Le vedute di Patrizi sulla geometria impiegarono più tempo ad essere generalmente accettate, e nel corso del diciassettesimo secolo è comune imbattersi sia in pensatori che ancora sostenevano che la geometria fosse fondata sulla materia quantificata, che in filosofi e scienziati che avevano già abbracciato l'idea che il fondamento della geometria fosse invece lo spazio. Gassendi, ad esempio, pur accettando una moderna metafisica dello spazio, riteneva che

[34] Abbiamo l'opinione di Leibniz sulla *Nuova geometria* di Patrizi, che ne apprezzava molto l'epistemologia sottostante ma riteneva che il contenuto matematico non fosse all'altezza: Patrizi "volle raddrizzare la maniera di dimostrare dei geometri, avendo visto che in effetti essa è difettosa, e volle fare altrettanto nella metafisica. Ma gliene mancarono le forze. La prefazione della sua *Nuova Geometria*, dedicata al Duca di Ferrara, è ammirevole, ma il suo contenuto fa pietà" (*Projet et essais pour avancer l'art d'inventer*, in A VI, 4A, n. 205, p. 966).

gli oggetti geometrici fossero astratti dalla materia corporea. Newton, qualche anno dopo, che essi fossero spaziali. Ecco un celebre passo del *De gravitatione* che sembra avere forti echi patriziani:

> E infatti tutti i generi di figure geometriche sono ovunque, ovunque ci sono sfere, ovunque cubi, ovunque triangoli, ovunque linee rette, ovunque linee circolari, ellittiche, paraboliche e tutte le altre, di qualsiasi forma e grandezza, anche se non sono delineate alla vista. Infatti la delineazione di una figura nella materia non è una nuova produzione di tale figura nello spazio, ma soltanto una rappresentazione corporea di essa, affinché appaia ai sensi ciò che già prima si trovava insensibilmente nello spazio.[35]

Un secolo dopo, in seguito al forte declino dell'aristotelismo e del cartesianesimo, la maggior parte dei filosofi e dei matematici accettava senza difficoltà che le figure geometriche fossero spaziali, e che lo spazio dovesse essere considerato, in qualche misura, l'oggetto della geometria.

Immanuel Kant (1724-1804) fu probabilmente l'autore che sviluppò in maniera più ricca e originale l'idea che gli oggetti della geometria debbano considerarsi figure spaziali. Nella filosofia critica di Kant, l'intuizione pura dello spazio è in effetti posta a fondamento della geometria, e lo spazio è concepito come pura estensione quantitativa (l'"immagine pura della quantità", secondo un importante passo dello schematismo trascendentale) nella quale sono tracciate le figure geometriche.[36] Come molti altri filosofi di questi secoli, Kant riteneva che l'oggetto della matematica fosse la quantità, e gli "assiomi dell'intuizione" menzionati nell'*Analitica Trascendentale* sono appunto assiomi della categoria di quantità che dovrebbero essere posti alla base della matematica. Egli riteneva anche che lo spazio puro esemplificasse e realizzasse *a priori* il concetto di quantità, e che pertanto la geometria, come scienza non empirica della quantità, fosse fondata sullo spazio.

---

[35] I. Newton, 1962, p. 100. Non è evidente che Newton conoscesse Patrizi di prima mano, ma egli certamente conosceva More e Gassendi, che citano Patrizi esplicitamente.

[36] Per la caratterizzazione dello spazio come "das reine Bild aller Grössen", vedi I. Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, A142 / B182.

La geometria, secondo Kant, è tuttavia ancora una scienza delle figure nello spazio: lo spazio non è assunto come oggetto di indagine (esso non è costruibile, mentre la matematica si occupa appunto di oggetti costruiti *a priori*), ma rappresenta la condizione di possibilità delle costruzioni geometriche, e dunque il fondamento dell'ontologia della geometria.[37] Kant recuperò anche la tradizione neoplatonica (di Proclo) dell'immaginazione produttiva come facoltà che consente di costruire le figure nello spazio, e più in generale trasformò l'idea di una "materia immaginativa" quantificata in quella di uno spazio *a priori*, secondo gli sviluppi moderni che abbiamo già visto.

È anche importante sottolineare che la moderna concezione dello spazio come fondamento della quantità produsse fin da subito un'importante argomento a favore della matematizzabilità del cosmo, e dunque dell'efficacia della geometria nel descrivere il mondo secondo il modello della nuova fisica. In questo senso si può dire che vi fu una via "platonica" alla giustificazione della Rivoluzione Scientifica, che assumeva semplicemente che «il gran libro della natura fosse scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche»,[38] perché così creato da Dio; e una diversa via "neoplatonica", che affermava che lo spazio è il sostrato proprio della geometria, che il mondo materiale è nello spazio, e che pertanto il mondo materiale dev'essere geometrizzabile. Questa idea è già chiaramente espressa in Patrizi e in Campanella, che vissero nei primi anni della Rivoluzione Scientifica, ma fu sviluppata in un sistema proprio da Kant, che affermò che lo spazio ricopre il duplice ruolo di essere il sostrato delle costruzioni geometriche dell'immaginazione produttiva (in quanto "intuizione formale"), ma anche la condizione di possibilità del mondo naturale come fenomeno (in quanto "forma dell'intuizione"), e che quindi la matematica può applicarsi, per mezzo dello spazio, alla natura.

[37] Questa tesi interpretativa è ancora assai controversa, ed è comune intendere lo spazio kantiano come una struttura geometrica che si aggiungerebbe alla struttura logica prodotta dalle categorie. Io credo tuttavia che quest'ultima interpretazione del pensiero di Kant sia erronea, e fondata sulla proiezione di teorie geometriche ottocentesche (strutturali o protostrutturali) sulla filosofia della matematica kantiana, che era invece assai più classica. Per una lettura ancora strutturalista, ma tuttavia più equilibrata, dello spazio kantiano vedi M. Friedman, 2015, pp. 275-310.

[38] G. Galilei, 1968, vol. 6, p. 232.

4. La geometria dello spazio

La trasformazione in senso spaziale dell'ontologia geometrica, che avvenne fra il sedicesimo e il diciassettesimo secolo, non produsse inizialmente importanti cambiamenti nella geometria stessa. Col passare degli anni, tuttavia, gli sviluppi filosofici indussero anche sviluppi matematici. I matematici, convinti ormai che la geometria fosse scienza di figure nello spazio, incominciarono a prendere in considerazione le *relazioni spaziali* fra tali figure. Nel quadro epistemologico aperto dalla filosofia moderna, un geometra può domandarsi se una figura sia *dentro* o *fuori* un'altra, o *al di qua* o *al di là* di una certa linea, o se due figure *si intersechino* l'un l'altra oppure no, o se un certo numero di punti siano disposti in un determinato *ordine* oppure in un altro, o ancora quale sia la *posizione* reciproca di certe figure. I concetti di *direzione*, *orientazione* o *simmetria* diventano rilevanti per la prima volta.[39] La nuova ontologia spaziale della geometria, insomma, indusse i geometri a porsi domande sulla spazialità delle figure geometriche, e a cominciare a sviluppare gli strumenti matematici adatti a rispondervi. Incominciò così a nascere una *geometria dell'ordine e della posizione*, che non si curava delle proprietà *metriche* delle figure. In questo modo il vecchio concetto aristotelico della geometria come scienza delle grandezze (o delle figure in quanto grandezze) veniva sostituito da un'idea nuova della geometria come studio di relazioni. Per dirla con una felice formula di Cassirer, si era passati da una geometria delle sostanze (le figure), a una geometria delle funzioni (la struttura spaziale).[40]

[39] Sul concetto di direzione nella fisica e nell'astronomia dell'età moderna, vedi D. Miller, 2014. Sullo sviluppo matematico concetto di simmetria, vedi G. Hon, B.R. Goldstein, 2008. Il concetto di orientazione, strettamente connesso con i precedenti, fu investigato da Kant nel suo celebre saggio sugli incongruenti del 1778 (e in altre opere). Per una prima introduzione al problema, vedi il celebre M. Gardner, 1964; e la raccolta di studi su Kant curata da J. van Cleve e R.F. Frederick, 1991.

[40] Il celebre volume cassireriano *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* (1910) dedica in effetti alla geometria una parte del terzo capitolo, nel quale tuttavia Cassirer non affronta direttamente la questione della trasformazione della geometria da scienza delle figure in scienza dello spazio, perché riteneva anch'egli, come gran parte della sua epoca, che la geometria di Euclide già tematizzasse lo spazio. Tuttavia Cassirer insisteva su una trasformazione degli oggetti geometrici da "sostanze" a "funzioni" nel senso che il concetto "statico" di figura geometrica che era impiegato da Euclide si sarebbe trasformato, in geometria moderna, nel

Questa diversa considerazione della geometria si vede già con chiarezza, per esempio, negli studi sulla matematica della prospettiva. Nei trattati tardo-rinascimentali sull'arte della pittura, in effetti, si sviluppò una serie di complesse tecniche geometriche che non erano interessate direttamente alla misura dei corpi o delle superfici, ma unicamente alla rappresentazione delle loro posizioni reciproche, e quindi a relazioni di ordine e "situazione" che erano sconosciute alla matematica precedente. Con il passare degli anni, tali tecniche furono sviluppate in teorie, e abbandonarono l'ambito degli studi artistici per trasformarsi in nuove branche della geometria pura. Nel 1639, l'ingegnere francese Girard Desargues (1591-1661) applicò le tecniche matematiche dei libri sulla prospettiva per risolvere problemi classici di geometria euclidea; applicò insomma la prospettiva allo spazio geometrico. Trattando dunque relazioni non quantitative ma puramente spaziali, Desargues inaugurò una stagione di studi che proseguì nel seguito del diciassettesimo secolo con le opere di Pascal, La Hire e altri, e si sviluppò ampiamente nel diciottesimo secolo culminando poi nella geometria descrittiva, la geometria di posizione, e la geometria proiettiva. Tali teorie miravano esplicitamente a fornire una trattazione matematica delle relazioni spaziali fra le figure geometriche, e il concetto di grandezza non era più considerato da esse come il fondamento della matematica.[41]

L'idea che le relazioni spaziali fra le figure possano essere trattate con strumenti matematici, tuttavia, fu centrale anche negli studi sui fondamenti della geometria in età moderna. Ci si avvide che gli *Elementi* di Euclide mancavano completamente di una trattazione delle relazioni di ordine e posizione. Euclide, per stabilire che una figura fosse *dentro* un'altra figura, o che due linee avessero un punto di *intersezione*, per esempio, non utilizzava nessun principio e nessuna dimostrazione: perché non riteneva che tali relazioni cadessero nell'ambito della ricerca geometrica. Egli ricavava semplicemente la reciproca posizione delle

---

concetto "dinamico" della produzione delle figure attraverso funzioni. Si tratta, come si vede, di una interpretazione assai più classica di quella che vorrei offrire qui.

[41] Sul rapporto fra teoria della prospettiva e scienza dello spazio, vedi V. De Risi, 2015, vol. 1, pp. 219-72; e anche T. De Vittori, 2009. Per una storia della matematica della prospettiva nel rinascimento e oltre, vedi K. Andersen, 2007. L'idea che la trattatistica rinascimentale sulla prospettiva abbia influenzato la nascita del concetto moderno di spazio era stata avanzata con forza nel celebre saggio di E. Panofsky, 1927, pp. 258-330.

figure e delle linee dall'ispezione del diagramma (la figura che accompagna il testo). I geometri moderni, invece, poiché tematizzavano esplicitamente tali relazioni spaziali, incominciarono ad aggiungere *assiomi* che le formalizzassero, e vere e proprie *dimostrazioni* volte a provare la posizione reciproca delle figure. Come conseguenza della rivoluzione spaziale in geometria, pertanto, gli *standard* di rigore delle dimostrazioni cambiarono: e una dimostrazione che sembrava corretta a Euclide e a tutti i matematici antichi e medievali, incominciò ad essere considerata bisognosa di nuovi passaggi deduttivi e di nuovi principi. Sorsero così discussioni sui più elementari teoremi di geometria, che a loro volta si riverberarono in maniera potente sulla matematica avanzata, e arrivarono a investire il metodo della geometria nel suo complesso. Il ruolo dei diagrammi e delle figure nelle dimostrazioni diminuì radicalmente, e nacque una nuova attenzione alla possibilità di una dimostrazione puramente simbolica (o almeno puramente verbale) in geometria.[42]

Si può almeno accennare al fatto che tale rigorizzazione della geometria rappresentò uno stimolo assai forte alla formulazione di sistemi logici che potessero dar conto delle dimostrazioni matematiche, e che pertanto la nascita della logica moderna (nelle opere di Leibniz, per esempio) è stata fortemente influenzata dalla tematizzazione dello spazio come oggetto della geometria. Lo studio delle relazioni spaziali, in effetti, richiedeva la costituzione di una *logica delle relazioni* che superasse l'antica teoria del sillogismo.[43] Vale anche la pena di notare

[42] Un esempio classico delle critiche moderne alla geometria classica riguarda la necessità di dimostrare l'intersezione fra le figure, la quale richiede certi principi sulla *continuità* delle figure stesse, ma anche principi sulla *posizione* reciproca delle figure. Un assioma semplicissimo (e oggi ritenuto fondamentale in geometria elementare) come quello che afferma che una retta, la quale abbia punti *all'interno* e *all'esterno* di una circonferenza, deve intersecare tale circonferenza, era del tutto inconcepibile per Euclide, il quale non si occupava della posizione dei punti. Tale assioma fu invece formulato per la prima volta proprio in occasione della grande rivoluzione spaziale della geometria nel corso del Rinascimento e della prima età moderna. Vedi V. De Risi, 2020, pp. 12-32; V. De Risi, 2019, pp. 111-69.

[43] Esistevano tentativi di formalizzare le dimostrazioni di Euclide già nel Rinascimento, e per esempio il volume di C. Herlin e C. Dasypodius, *Analyseis geometricae sex librorum Euclidis*, Strasbourg, Rihel, 1566, offriva una riduzione in sillogismi dei primi sei libri degli *Elementi*. L'operazione non era naturalmente possibile, perché per formalizzare la geometria elementare occorre una logica delle relazioni, che mancava alla sillogistica classica. I (molto parziali) risultati di questo libro del 1566, così come di altri ad esso simili, dipendevano, da un lato, dall'aver inteso il concetto di "sillogismo" in forma molto lata; e dall'altro (e soprattutto) di aver ammesso inferenze diagrammatiche. Nelle dimostrazioni, cioè, si ammetteva l'intro-

che tutte le epistemologie della matematica dell'antichità classica (e poi anche del medioevo e del Rinascimento) posero a fondamento della geometria le *definizioni* degli oggetti geometrici; perché una geometria volta a indagare le proprietà delle figure non può che fondarsi sulle loro definizioni (che ne esprimono l'"essenza"). Gli assiomi, in questa tradizione, erano considerati derivati dalle definizioni, e assai meno importanti di esse. Nel corso dell'età moderna, viceversa, le definizioni persero progressivamente di importanza, e gli assiomi assunsero il ruolo di autentici principi della matematica. Ciò dipese, in larghissima parte, dal fatto che un sistema di assiomi è appropriato per descrivere una *struttura*, quale è lo spazio moderno, ossia un sistema di relazioni. Si vede dunque che gli sviluppi dell'assiomatica e della logica furono potentemente influenzati dall'idea di una scienza dello spazio.

Uno dei culmini della riflessione geometrica sulla spazialità si ebbe negli scritti geometrici e filosofici di Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), il quale riunì insieme gli sviluppi fondazionali della geometria secentesca con la riflessione sull'ontologia dello spazio e della quantità. Come è molto noto, infatti, Leibniz fu l'autore di una nuova e importante metafisica dello spazio, che egli oppose a quella dello "spazio assoluto" di Newton (che non era poi altro che una variante della teoria di Patrizi).[44] Leibniz caratterizzò lo spazio come un sistema di relazioni, e precisamente come un sistema di relazioni *situazionali*: «lo spazio è l'ordine che rende i corpi situabili, e grazie a cui i corpi hanno una situazione reciproca quando esistono insieme».[45]

Leibniz non ritenne che si potesse definire il concetto di *situazione*, che rappresenta la relazione spaziale più elementare; e si limitò a dire che le relazioni situazionali fra un certo insieme di oggetti sono uguali alle relazioni situazionali fra un altro insieme di oggetti, se i due insiemi sono congruenti fra loro (ossia se possono sovrapporsi perfettamente).

duzione di premesse sillogistiche che non erano state precedentemente dimostrate, ma che semplicemente "si vedono" nella figura. Sui rapporti fra logica e matematica in età moderna, vedi M. Mugnai, 2010, pp. 297-314.

[44] Il documento più importante di questa disputa è la corrispondenza fra Leibniz e Samuel Clarke, che si può leggere in edizione critica in A. Robinet, 1957. Una traduzione italiana della corrispondenza è nel terzo volume di G.W. Leibniz, *Opere*, a cura di M. Mugnai e E. Pasini, Torino, UTET, 2000.

[45] *Quarta Lettera* di Leibniz a Clarke, §41.

Ne deriva che la situazione di un oggetto rispetto a un altro è, grosso modo, la distanza fra questi due oggetti. Di conseguenza, uno spazio come "ordine di situazioni" è una struttura costituita da un sistema di distanze (per esempio, il sistema delle distanze di ciascun punto rispetto a ciascun altro punto). Leibniz concepiva dunque lo spazio come una *struttura*. Il fatto che tale struttura fosse essenzialmente costituita da distanze, faceva sì che lo spazio leibniziano fosse uno spazio metrico, e che pertanto esso fosse quantificabile e matematizzabile secondo la geometria classica. Tuttavia, l'essenza dello spazio non si trovava più nella quantità, ma bensì nelle relazioni spaziali, e Leibniz affermò chiaramente che la geometria non si doveva intendere come scienza delle grandezze, o dell'estensione quantitativa (materiale o spaziale), ma proprio come scienza delle relazioni spaziali in se stesse. Leibniz battezzò la nuova geometria che doveva occuparsi di queste relazioni spaziali col nome di «analisi di situazione», *analysis situs*.[46]

Leibniz, tuttavia, non offrì soltanto un tentativo di produrre una geometria delle relazioni spaziali. Visto che lo spazio era per lui un sistema di relazioni situazionali, e tali relazioni erano indagate dall'*analysis situs*, quest'ultima disciplina non doveva occuparsi solo di figure geometriche e relazioni fra figure geometriche, ma anche *della struttura dello spazio stesso*. Leibniz fu forse il primo matematico a concepire lo spazio non già e non più come uno "sfondo" nel quale costruire le figure, ma come l'oggetto dell'indagine geometrica. Lo spazio, in quanto concepito come una struttura, ha esso stesso proprietà geometriche. Leibniz tentò allora di definire proprietà geometriche esatte, quali la "omogeneità" dello spazio (in termini moderni, grosso modo, il fatto che esso sia una varietà topologica), la "uniformità" dello spazio (oggi, isotropia), la dimensionalità dello spazio, la continuità dello spazio (assai difficile a definirsi in maniera esatta), o il fatto che lo spazio sia "piatto" (ossia la validità del Postulato delle Parallele).[47] Tali proprietà non erano mai state definite prima, perché nessuno aveva mai indagato lo spazio stesso come oggetto della geometria. Leibniz provò poi anche a studiare i complessi rapporti intercorrenti fra tali proprietà, e tentò

[46] Su questo progetto geometrico leibniziano, vedi V. De Risi, 2007.

[47] Sui tentativi di Leibniz di dimostrare il Postulato delle Parallele, vedi V. De Risi, 2015. Su Leibniz e le geometrie non-euclidee, V. Debuiche, D. Rabouin, 2019, pp. 171-202.

persino di dimostrare che lo spazio deve avere "necessariamente" alcune di queste proprietà.

Quest'ultima parte del progetto leibniziano, che si può qualificare come una sorta di logicismo applicato alla geometria (secondo il quale esiste una sola possibile geometria, e una sola struttura spaziale "assoluta" che include tutte le altre, ovvero quella dello spazio euclideo tridimensionale) era destinata al fallimento e fu spazzata via un secolo più tardi dalla scoperta delle geometrie non-euclidee. Tuttavia, Leibniz aveva fatto il passo fondamentale: egli aveva visto che è possibile costituire una *geometria dello spazio*, e non soltanto una geometria delle figure *nello* spazio.

Leibniz dedicò migliaia di pagine allo sviluppo di questa nuova *analysis situs*, ma non ne pubblicò alcuna. Egli aveva però menzionato la possibilità di costituire una geometria dello spazio nelle sue opere epistemologiche e nel corso della sua ampia corrispondenza, e il diciottesimo secolo fu avvertito di questo grande progetto. Alcuni autori, nelle discipline più diverse, salutarono con entusiasmo l'idea che la geometria potesse essere una scienza delle relazioni e delle posizioni delle cose, senza essere necessariamente una scienza della misura. Il grande naturalista Buffon (1707-1788), per esempio, immaginò che una speciale *analysis situs* potesse essere utilizzata per la descrizione dei viventi, e che quindi fosse possibile una geometria della biologia.[48] Altri matematici credettero di resuscitare l'analisi di situazione leibniziana producendo esempi di geometria non-metrica che ebbero grandissimo successo (come per esempio Eulero, che inventò la topologia combinatoria sotto il nome di *analysis situs*).[49] Molti matematici e molti filosofi, tuttavia, discussero a lungo se la geometria fosse una scienza delle figure, come quella di Euclide, o una scienza dello spazio, come Leibniz aveva suggerito. Il dibattito epistemologico fu specialmente acuto in Germania, e trovò in Christian Wolff (1679-1754) un importante difensore delle idee leibniziane. Nel corso del dibattito, come abbiamo visto, Kant si schierò piuttosto con Euclide, e continuò a ritenere che la

[48] Vedi G.L.L. De Buffon, 1818, vol. 4, p. 663.

[49] I saggi più importanti di Eulero riguardanti la "*analysis situs*" sono la formula sul rapporto fra vertici, angoli e facce dei poliedri convessi, e il cosiddetto "problema dei ponti di Königsberg", che è considerato come uno degli atti fondativi della topologia.

geometria dovesse essere la scienza delle figure costruite nello spazio, piuttosto che la scienza dello spazio stesso. In un certo senso, però, Kant fu l'ultimo degli epistemologi classici, e già nella generazione successiva la maggior parte dei filosofi kantiani finirono per convertirsi alle idee leibniziane in geometria. Alla svolta del diciannovesimo secolo, l'idea che la geometria fosse scienza dello spazio era largamente diffusa, e nel corso del secolo essa divenne maggioritaria.

Un contributo fondamentale in questo senso arrivò senza dubbio dalla scoperta delle geometrie non-euclidee, le quali mostrarono come diversi sistemi di assiomi possano descrivere *spazi diversi*. È fondamentale, tuttavia, rendersi conto che la rivoluzione non-euclidea in matematica fu resa possibile proprio dalla (precedente) trasformazione della geometria in scienza dello spazio. In effetti, la scoperta delle geometrie non-euclidee non richiese nessuno progresso tecnico in matematica, e venne anzi inizialmente sviluppata con gli strumenti classici della geometria euclidea (le costruzioni con riga e compasso). Essa richiese piuttosto una fondamentale svolta *logica ed epistemologica*, che consentì di immaginare la possibilità di una pluralità di spazi diversi. Tale svolta fu appunto prodotta dal dibattito settecentesco sulla geometria dello spazio.

Nel 1733, il gesuita Gerolamo Saccheri (1667-1733) scrisse un importante libro, l'*Euclides ab omni naevo vindicatus*, nel quale provava a dimostrare il postulato delle parallele e sviluppava con una certa ampiezza una geometria nella quale il postulato era falso (allo scopo di mostrarne l'impossibilità); si trattava della prima trattazione, inconsapevole, di geometria non-euclidea.[50] Saccheri era un classicista in geometria, e il concetto di spazio non è mai menzionato nell'intero volume (ma parla solo di figure e grandezze). Nel 1766, il filosofo e matematico tedesco Johann Heinrich Lambert (1728-1777) riprese il tentativo di Saccheri e elaborò egli stesso alcuni nuovi teoremi di geometria non-euclidea, anch'essi volti a dimostrarne l'impossibilità.[51] Le opere di Lambert erano

[50] G. Saccheri, 1733. Un'edizione italiana commentata di quest'opera è G. Saccheri, 2011, *Euclide vendicato da ogni neo*, a cura di V. De Risi, Pisa, Edizioni della Normale.

[51] L'opera di Lambert sulle parallele fu pubblicata postuma come J.H. Lambert, 1786, pp. 13-64. Essa era accompagnata, nella riflessione di Lambert, da due importanti opere epistemologiche sull'assiomatica: J.H. Lambert, 1764, *Neues Organon*, Leipzig, Wendler e J.H. Lambert, 1771, *Anlage zur Architectonic*, Riga, Hartknoch.

tuttavia diversissime da quelle di Saccheri, perché nel frattempo, in Germania, si era affermato il progetto geometrico leibniziano di una geometria dello spazio. Lambert riteneva che l'assiomatizzazione della geometria dovesse essere una assiomatizzazione dello spazio; e certamente concepiva almeno la *possibilità* (la "possibilità simbolica" come lui diceva) che si desse una molteplicità di strutture spaziali differenti, anche se poi il suo libro di geometria mirava a dimostrare la necessità della geometria euclidea. In questo senso egli intraprese lo studio dell'ipotesi non-euclidea con uno spirito affatto nuovo, e aprì la via all'effettiva proclamazione di una pluralità di geometrie possibili, che avvenne nella generazione successiva, con Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Nikolaj Lobačevskij (1792-1856), e János Bolyai (1802-1860). Non stupisce, anzi, che pochi decenni dopo l'opera di Lambert, che era ancora una "teoria delle parallele" (*Theorie der Parallellinien*), Bolyai intitolò il suo saggio matematico *Scientia spatii*, e Gauss parlasse anch'egli esplicitamente di scienza dello spazio (*Raumlehre*) a proposito della geometria.[52]

All'inizio dell'Ottocento, l'idea che la geometria fosse la scienza dello spazio cominciò ad essere accettata quasi unanimemente. Negli stessi anni della nascita delle geometrie non-euclidee, seguendo una diversa tradizione di studi (che derivava dalla teoria della prospettiva) Jean Victor Poncelet (1788-1867) metteva a punto una nuova geometria interessata alle relazioni spaziali anziché quantitative, che venne poi chiamata *geometria proiettiva*. Nei decenni ancora successivi, l'importante opera matematica di Bernhard Riemann (1826-1866) offrì una teoria generale degli spazi metrici (euclidei e non-euclidei). Pochi anni dopo, Felix Klein (1849-1925) unificò la geometria proiettiva con la teoria delle geometrie non-euclidee. Egli si pose allora il problema generale della *unità della geometria* come disciplina, e lo risolse (nel celebre programma di Erlangen) ricorrendo alla nozione di *spazio* e di trasformazione spaziale. A distanza di oltre un secolo, importanti matematici contemporanei come William Thurston hanno

[52] Le ricerche di Gauss sulla teoria delle parallele e la *Raumlehre* sono raccolte in H. Reichardt, 1976. Delle opere di Lobačevskij sono stati tradotti parzialmente in italiano i *Nuovi principi della geometria*, a cura di L.R. Radice, Torino, Bollati Boringhieri, 1991. Per Bolyai, vedi J. Bolyai, 1832-1833. Sulle geometrie non-euclidee vedi l'introduzione in italiano: E. Agazzi, D. Palladino, 1978.

seguito l'esempio di Klein e hanno ritenuto ancora di dover definire la geometria come scienza delle strutture spaziali, e di dover offrire nuove ed esatte nozioni di "spazio" che possano dar conto della complessità della matematica odierna.[53]

Questi sviluppi hanno trasformato in maniera decisiva la geometria, la matematica, la logica e la filosofia moderne. È pertanto fondamentale vedere come queste rivoluzioni concettuali, che fondarono la modernità scientifica, derivassero in buona parte dall'aver tematizzato lo spazio come oggetto della geometria. Dopo molti secoli, la geometria delle figure di Euclide era diventata la moderna geometria dello spazio.

Bibliografia

Agazzi E., Palladino D., *Le Geometrie non Euclidee e i fondamenti della geometria*, Milano, Mondadori, 1978.

Algra K., *Concepts of Space in Greek Thought*, Leiden, Brill, 1994.

Andersen K., *The Geometry of an Art. The History of the Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge*, New York, Springer, 2007.

Axworthy A., *Le Mathématicien renaissant et son savoir. Le statut des mathématiques selon Oronce Fine*, Paris, Garnier, 2016.

Bolyai J., *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens*, in Bolyai F., *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae*, Maros Vásárhelyini, Kali, 1832-1833; tr. it. *La scienza assoluta dello spazio*, (a cura di) Pettoello R., Milano, Meltemi, 2012.

Bos H., *Redefining geometrical exactness: Descartes' transformation of the early modern concept of construction*, New York, Springer, 2001.

Brisson L., *Entre physique et métaphysique. Le terme* ὄγκος *chez Plotin, dans ses rapports avec la matière* (ὕλη) *et le corps* (σῶμα), in *Études sur Plotin*, (a cura di) Fattal M., Paris, L'Harmattan 2000, pp. 87-111.

[53] Esistono traduzioni italiane della dissertazione di Riemann e del programma di Erlangen: B. Riemann, *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria e altri scritti scientifici e filosofici*, a cura di R. Pettoello, Torino, Bollati Boringhieri, 1994; F. Klein, *Il programma di Erlangen*, a cura di E. Agazzi e A. Bernardo, Brescia, La Scuola, 1998. Per la teoria degli spazi geometrici di Thurston, vedi W. Thurston, 1997.

Charles-Saget A., *L'architecture du Divin. Mathématique et philosophie chez Plotin et Proclus*, Paris, Les Belles Lettres, 1982.

Crapulli G., *Mathesis universalis. Genesi di un'idea nel XVI secolo*, Roma, Edizioni dell'Ateneo, 1969.

De Haas F.A.J., *John Philoponus' New Definition of Prime Matter. Aspects of its Background in Neoplatonism and the Ancient Commentary Tradition*, Leiden, Brill, 1996.

De Buffon G.L.L., *Histoire naturelle générale et particulière, avec la description du Cabinet du Roi*, Paris, Imprimerie Royale, 1750.

De Buffon G.L.L., *Histoire des Animaux*, in *Oeuvres Complètes*, Paris, Imprimerie Royale, 1818.

Debuiche V., Rabouin D., *On the Plurality of Spaces in Leibniz*, in *Leibniz and the Structure of Sciences. Modern Perspectives on the History of Logic, Mathematics, Epistemology*, Berlin, (a cura di) De Risi V., Berlin, Springer, 2019, pp. 171-202.

Saccheri G., *Euclides ab omni naevo vindicatus*, Milano, Montani, 1733

Deitz L., *Space, Light, and Soul in Francesco Patrizi's Nova de universis philosophia (1591)*, in *Natural Particulars: Nature and the Disciplines in Renaissance Europe*, (a cura di) Grafton A., Siraisi N., Cambridge, MIT, 1999, pp. 139-169.

De Pace A., *Le matematiche e il mondo. Ricerche su un dibattito in Italia nella seconda metà del Cinquecento*, Milano, FrancoAngeli, 1993

De Risi V., *Francesco Patrizi e la nuova geometria dello spazio*, in *Locus-Spatium*, (a cura di) Giovannozzi D., Veneziani M., Firenze, Olschki, 2014, pp. 269-327.

De Risi V., *Geometry and Monadology. Leibniz's* Analysis Situs *and Philosophy of Space*, Basel/Boston, Birkhäuser, 2007.

De Risi V., *Has Euclid proven Elements I, 1? The early modern debate on intersections and continuity*, in *Reading Mathematics in the Early Modern Europe. Studies in the Production, Collection, and Use of Mathematical Books*, (a cura di) Beeley P., Nasifoglu Y., Wardhaugh B., London, Routledge, 2020, pp. 12-32.

De Risi V., *L'arte dello spazio. La nascita delle geometrie non euclidee e la teoria della prospettiva*, in *Il libro della natura. Scienze e filosofia da Copernico a Darwin*, (a cura di) Pecere P., Roma, Carocci 2015, vol. 1, pp. 219-72.

De Risi V., *Leibniz on the Continuity of Space*, in *Leibniz and the Structure of Sciences. Modern Perspectives on the History of Logic, Mathematics, Epistemology*, Berlin, (a cura di) De Risi V., Berlin, Springer, 2019, pp. 111-69.

De Risi V., *Leibniz on the Parallel Postulate and the Foundations of Geometry*, Basel/Boston, Birkhäuser 2015.

De Risi V., *Mathematizing Space. The Objects of Geometry from Antiquity to the Early Modern Age*, Basel/Boston, Birkhäuser, 2015.

De Risi V., *Plotino e la Rivoluzione Scientifica. La presenza delle Enneadi nell'epistemologia leibniziana dello spazio fenomenico*, in *Il Platonismo e le Scienze*, (a cura di) Chiaradonna R. e De Caro M., Roma, Carocci, 2012, pp. 143-63.

De Risi V., *The Development of Euclidean Axiomatics. The systems of principles and the foundations of mathematics in editions of the Elements from Antiquity to the Eighteenth Century*, "Archive for History of Exact Sciences", 70 (2016), pp. 591-676.

Des Chene D., *Physiologia: Natural Philosophy in Late Aristotelian and Cartesian Thought*, Ithaca, Cornell University Press, 2000.

De Toledo F., *Commentaria una cum quaestionibus in 8 libros Aristotelis de physica auscultatione*, Köln, Birkmann, 1577, p. 8 vb (I, I, 3).

De Vittori T., *Les notions d'espace en géométrie, de l'Antiquité à l'Âge Classique*, Paris, L'Harmattan, 2009.

Donati S., *Materia e dimensioni tra XIII e XIV secolo: la dottrina delle dimensiones indeterminatae*, "Quaestio", 7, 2007, pp. 361-93.

Friedman M., *Kant on Geometry and Experience*, in De Risi V., *Mathematizing Space. The Objects of Geometry from Antiquity to the Early Modern Age*, Basel/Boston, Birkhäuser, 2015 pp. 275-310.

Fronterotta F., *Luogo, spazio e sostrato 'spazio-materiale' nel Timeo di Platone e nei commenti al Timeo*, in *Locus-Spatium*, (a cura di) Giovannozzi D., Veneziani M., Firenze, Olschki, 2014, pp. 7-42.

Galilei G., *Il Saggiatore*, in *Le Opere*, Firenze, Barbera, 1968.

Gardner M., *The Ambidextrous Universe*, New York, Penguin, 1964.

Grant E., *Much Ado about Nothing: Theories of Space and Vacuum from the Middle Ages to the Scientific Revolution*, Cambridge, CUP, 1981.

Henry J., *Francesco Patrizi da Cherso's Concept of Space and its Later Influence*, "Annals of Science", 36 (1979), pp. 549-75.

Hon G., Goldstein B.R., *From Summetria to Symmetry: The Making of a Revolutionary Scientific Concept*, New York, Springer, 2008.

Husserl E., *Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendentale Phänomenologie*, Den Haag, Nijhoff, 1954; tr. it. *La crisi delle scienze europee e la fenomenologia trascendentale*, (a cura di) Paci E., Filippini E., Milano, Il Saggiatore, 1961.

Inwood B., *The Origin of Epicurus' Concept of Void*, "Classical Philology", 76 (1981), pp. 273-85.

Lambert J.H., *Theorie der Parallellinien*, "Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik", 2 (1786), pp. 13-64.

Knorr W., *The Evolution of the Euclidean Elements*, Dordrecht, Reidel, 1975.

Koyré A., *From the Closed World to the Infinite Universe*, Baltimore, John Hopkins, 1957; tr. it. *Dal mondo chiuso all'universo infinito*, Milano, Feltrinelli, 1988.

Lernould A., (a cura di), *Etudes sur le Commentaire de Proclus au premier livre des Eléments d'Euclide*, Lille, Presses du Septentrion, 2010.

Mancosu P., *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, Oxford, Oxford University Press, 1996.

Miller D., *Representing Space in the Scientific Revolution*, Cambridge, Cambridge University Press, 2014.

Miller D., *The Third Kind in Plato's Timaeus*, Göttingen, Vandenhoeck, 2003.

Mueller I., *Mathematics and Education: Some Notes on the Platonic Program*, "Apeiron", 41 (1991), pp. 85-103.

Mugnai M., *Logic and Mathematics in the Seventeenth Century*, "History and Philosophy of Logic", 31 (2010), pp. 297-314.

Natorp P., *Platos Ideenlehre. Eine Einführung in den Idealismus*, Leipzig, Meiner, 1925 (1903[1]), pp. 373-74, tr. it. *Dottrina platonica delle idee*, Milano, Vita e Pensiero, 1999, pp.447-49.

Newton I., *De gravitatione et aequipondio fluidorum*, in *Unpublished scientific papaers of Isaac Newton*, (a cura di) Hall A.R., Hall M.B., Cambridge, CUP, 1962, pp. 89-156.

Nikulin D., *Imagination and mathematics in Proclus*, "Ancient Philosophy", 28 (2008), pp. 153-72.

Omodeo P.D., *Minimum und Atom: eine Begriffserweiterung in Brunos Rezeption des Cusanus*, in *Die Modernitäten des Nikolaus von Kues: Debatten und Rezeptionen*, (a cura di) Müller T. e Vollet M., Bielefeld, Transcript, 2013, pp. 285-304.

Palmerino C.R., *The Isomorphism of Space, Time and Matter in Seventeenth-century Natural Philosophy*, "Early Science and Medicine", 16 (2011), pp. 296-330.

Panofsky E., *Die Perspektive als „symbolische Form"*, "Vorträge der Bibliothek Warburg", 4 (1927), pp. 258-330; tr. it. *La prospettiva come "forma simbolica"*, Milano, Feltrinelli, 1961.

Patrizi F., *Della nuova geometria libri XV*, Ferrara, Baldini, 1587.

Patrizi F., *Nova de universis philosophia*, Ferrara, Mammarelli 1591.

Plotino, *Operum omnium philosophicorum libri LIV*, Basel, Perna, 1580.

Pradeau J.-F., *Être quelque part, occuper une place. ΤΟΠΟΣ et ΧΩΡΑ dans le Timée*, "Les études philosophiques", 3 (1995), pp. 375-99.

Rabouin D., *Mathesis Universalis. L'idée de « mathématique universelle » d'Aristote à Descartes*, Paris, PUF, 2009.

Rabouin D., *Proclus' Conception of Geometric Space and Its Actuality*, in De Risi V., *Mathematizing Space. The Objects of Geometry from Antiquity to the Early Modern Age*, Basel/Boston, Birkhäuser, 2015.

Reichardt H., *Gauss und die nicht-euklidische Geometrie*, Leipzig, Teubner, 1976.

Ribordy O., *Francisco Suárez and Francesco Patrizi: Metaphysical Investigations on Place and Space*, in *Space, Imagination and the Cosmos from Antiquity to the Early Modern Period*, (a cura di) Bakker F.A., Bellis D., Palmerino C.R., Cham, Springer 2019, pp. 133-56.

Robinet A., *Correspondance Leibniz-Clarke*, Paris, PUF, 1957.

Schemmel M., (a cura di) *Spatial Thinking and External Representation Towards a Historical Epistemology of Space*, Berlin, Max Planck Research Library, 2016.

Seidengart J., *La metaphysique du minimum indivisible et la réforme des mathématiques chez Giordano Bruno*, in *Atomismo e continuo nel XVII secolo*, (a cura di) Festa E. e Gatto R., Napoli, Vivarium, 2000, pp. 55-86.

Thurston W., *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Princeton, Princeton University Press, 1997.

Van Cleve J., Frederick R.F., *The Philosophy of Right and Left. Incongruent Counterparts and the Nature of Space*, Dordrecht, Springer, 1991.

Vedrine H., *L'obstacle réaliste en mathématique chez deux philosophes du seizième siècle: Bruno et Patrizi*, in *Platon et Aristote à la Renaissance*, (a cura di) Margolin J.-C., Aquilon P., Paris, Vrin, 1976, pp. 239-48.

Vedrine H., *Patrizi. De spacio physico et mathematico*, Paris, Vrin, 1996

Vitrac B., *Les classifications des sciences mathématiques en Grèce ancienne*, "Archives de philosophie", 68 (2005), pp. 269-301.

Wedberg A., *Plato's philosophy of mathematics*, Stockholm, Almqvist, 1955.

Idee per un approccio formale alla matematica antica

Pierluigi Graziani*

1. Introduzione

In un recente articolo riguardante gli studi sull'antica matematica greca, Nathan Sidoli[1] ha riassunto nel modo seguente i metodi che i ricercatori applicano in questo ambito di studio:

> Many of the methods employed by scholars during this period have been used for decades, even centuries – such as manuscript studies and mathematical formalization – while others are techniques emphasized by historians of science working on more modern periods – such as studies of material culture, or contextualization in various social and religious milieus.[2]

Sidoli, più avanti nel suo articolo, include correttamente ed esplicitamente tra i tipi di studi rivolti alla matematica antica anche "Mathematical and Logical Studies". Questa aggiunta appare un'interessante novità. Se infatti consideriamo alcuni precedenti articoli di tipo storio-

* Università degli Studi di Urbino Carlo Bo, Dipartimento di Scienze Pure e Applicate, pierluigi.graziani@uniurb.it

[1] N. Sidoli, *Research on ancient Greek mathematical sciences, 1998-2012*, in N. Sidoli, G., Van Brummelen (eds.), *From Alexandria, Through Baghdad*, Berlin: Springer, 2014, pp. 25-50.

[2] Cfr. ivi, p. 26.

grafico come quelli di Sabetai Unguru[3] e Ken Saito[4], il riferimento di Sidoli ai "logical studies" costituisce un'importante ampliamento della visione metodologica precedente. In una prospettiva intermedia si pone forse il lavoro di Lennart J. Berggren[5] che rivolge la sua attenzione anche agli studi di filosofia della matematica sottolineando però come essi siano "more common elsewhere in the history of science":

> An account of ancient analysis that is, to some extent, an alternative to that offered in [Mahoney 1968] is found in [Hintikka and Remes 1974] […]. From the point of view of historical method the work is an attempt to use the philosophy of mathematics to shed light on historical questions, an approach that is more common elsewhere in the history of science.[6]

Quale ruolo, dunque, ha la logica formale negli studi della matematica antica? La logica formale può avere per lo storico del pensiero matematco antico un qualche ruolo come strumento di indagine? Oppure deve essere confinata/riservata ad un diverso ambito di riflessione, magari più filosofico che storico? O addirittura deve essere trascurata nelle indagini storiche?.

Il presente contributo intende affrontare queste domande mettendo in luce sotto quali condizioni la logica formale possa essere intesa non solo come un importante strumento di indagine della matematica antica, ma anche come questa applicazione della logica possa essere considerata un interessante campo di sviluppo delle stesse ricerche logiche.

Nel § 2 saranno considerate alcune possibili ragioni di diffidenza relative all'utilizzo della logica formale come strumento di studio dei testi

---

[3] S. Unguru, *On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics*, «Archive for History of Exact Sciences», 15, 1, 1975, pp. 67-114.

[4] K. Saito, *Mathematical Reconstructions out, textual studies in: 30 years in the historiography of Greek mathematics*,

«Revue d'Histoire des Mathématiques», 4, 1998, pp. 131-142. Si noti come Saito in lavori più recenti, ad esempio N. Sidoli e K. Saito, *Comparative Analysis in Greek Geometry*, «Historia Mathematica», 39, 2012, pp. 1-33, ha mostrato un'apertura verso le indagini logiche contenute in P. Mäenpää, *The art of analysis. Logic and history of problem solving*, PhD Thesis, University of Helsinki, 1993.

[5] J.L. Berggreen, *History of Greek mathematics: A survey of recent research*, «Historia Mathematica» 11, 4, 1984, pp. 394-410.

[6] Cfr. ivi, p. 396.

matematici antichi. Nel § 3 saranno invece introdotti alcuni possibili principi e criteri sotto i quali guidare l'utilizzo degli strumenti formali nell'analisi di tali testi. Nel § 4 saranno tratte alcune conclusioni e descritte alcune prospettive di ricerca.

2. Le ragioni del sospetto

È sempre difficile indicare per quale ragione, in quale momento e in quale studioso si sia generato il primo sospetto verso una certa tesi. Tuttavia, possiamo notare che alcuni dibattiti sul ruolo della logica nello studio della matematica antica erano già presenti con riferimento ai casi di applicazione della sillogistica agli *Elementi* di Euclide. Ricerche, ad esempio, come quelle di Conradus Dasydopius e Christianus Herlinus[7], di Christophorus Clavius[8], e di Píerre Hérrigonne[9] furono oggetto di dibattito da parte di studiosi come G. Leibniz, W. Hamilton, A. De Morgan, C. Dodgson, solo per citare i più famosi[10], che si interrogarono sull'opportunità della modellazione sillogistica[11] di un testo come gli *Elementi*. Ma è soprattutto con i lavori di Jakko Hintikka e Unto

[7] C. Dasypodius e C. Herlinus, *Analyseis Geometricae Sex Librorum Euclidis*, Strasbourg, Rihelius, 1566.

[8] C. Clavius, *Euclidis Elementorum libri XV Accessit XVI. de solidorum regularium comparatione. Omnes perspicuis demonstrationibus, accuratisque scholijs illustrati*. Auctore Christophoro Clauio. Rome: Apud Vincentium Acc., 1574.

[9] P. Hérrigonne, *Cursus Mathematicus nova, brevi et clara methodo demonstratus, Per NOTAS reales & universales, citra usum cuiuscumque idiomatis, intellectu, faciles*, 6 vols., second edition. For Simeon Piget, Paris, 1644.

[10] Con riferimento a tali dibattiti si vedano: M. Mugnai, "Logic and Mathematics in the Seventeenth Century", in *History and Philosophy of Logic*, vol. 31, 4, 2010, pp. 297-314; F. M. Bertato, *Sobre as formalizações sillogísticas dos Elementos, effettuadas por Herlinus, Dasypodius, Clavius e Hérrigone*, in S. Nobre, F.M. Bertato, L. Saraiva (eds.) *Anais/Actas do 6 Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática*, Sociedade Brasileira de História da Matemática, Natal, 2014.

[11] Uno studio interessante potrebbe essere quello che valuti eventuali dibattiti simili circa l'utilizzo della logica formale per lo studio della logica aristotelica come, ad esempio, quello proposto nelle ricerche di J. Łukasiewicz, *Aristotle's Sillogistic from the standpoint of modern formal logic*, Oxford, Oxford University Press, 1957; di J. Corcoran (ed. by), *Ancient Logic and its Modern Interpretations*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1974; e di P. Thom, *The Logic of Essentialism. An Interpretation of Aristotles Modal Syllogistic*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Nederland, 1996.

Remes[12] e quello di Ian Muller[13] che il dibattito sul ruolo della logica formale come strumento di indagine del pensiero matematico antico ha ricevuto un profondo impulso, rafforzato poi negli anni Novanta dello scorso secolo dai lavori di Petri Mäenpää e Jan von Plato[14] e in anni a noi più vicini dalle ricerche di Nathaniel Miller[15], John Mumma[16], Jeremy Avigad, Edward Dean e John Mumma[17] e ricerche di Michael Beeson.[18]

---

[12] J. Hintikka e U. Remes, *The method of analysis: Its Geometric Origin and Its General Significance*, Reidel, Dordrecht, 1974; J. Hintikka e U. Remes, *Ancient geometric analysis and modern logic*, in R.S. Cohen *et al.* (eds.), *Essay in memory of Imre Lakatos*, Reidel, Dordrecht, 1976, pp. 253-276.

[13] I. Mueller, *Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Element*, MIT Press, Cambridge, 1981.

[14] P. Mäenpää e J. von Plato, *The logic of Euclidean construction procedures*, in L. Haaparanta, M. Kusch e I. Niiniluoto (eds.), *Language, Knowledge, and Intentionality. Perspectives on the Philosophy of Jaakko Hintikka*, *Acta Philosophica Fennica* 49 (The Philosophical Society of Finland, Helsinki), 1990, pp. 275-293; P. Mäenpää, *The art of analysis. Logic and history of problem solving*, PhD Thesis, University of Helsinki, 1993; P. Mäenpää, *From backward reduction to configurational analysis*, in M. Otte and M. Panza (eds.) *Analysis and Synthesis in Mathematics*, Boston Studies in the Philosophy os Science 196, Reidel, Dordrecht, 1997, pp.201-226.

[15] N. Miller, *Euclid and his Twentieth Century Rivals: Diagrams in the Logic of Euclidean Geometry*, CSLI, Stanford, 2008.

[16] J. Mumma, *Intuition Formalized: Ancient and Modern Methods of Proof in Elementary Geometry*, PhD thesis, Carnegie Mellon University, 2006.

[17] J. Mumma, J. Avigad e E. Dean, *A formal system for Euclid's Elements*, «The Review of Symbolic Logic», 2, 2009, pp. 700-768.

[18] M. Beeson, *Constructive geometry*, in: Arai, T. (ed.) *Proceedings of the Tenth Asian Logic Colloquium*, Kobe, Japan, World Scientific, Singapore, 2009, pp. 19-84; M. Beeson, *Logic of ruler and compass constructions*, in Cooper, S. B., Dawar, A. and Loewe, B., editor(s), *Computability in Europe 2012*, volume 7318, of *Theoretical Computer Science and General Issues*, Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 2012, pp. 46-55; M. Beeson, *Foundations of Euclidean Constructive Geometry*, Typescript, URL: <http://www.michaelbeeson.com/research/papers/ConstructiveGeometryLong.pdf>; M. Beeson, *A constructive version of Tarski's geometry*, «Annals of Pure and Applied Logic», 166(11), 2015, pp. 1199-1273; M. Beeson, *Constructive geometry and the parallel postulate*, «Bulletin of Symbolic Logic», 22, 2016, pp. 1-104; M. Beeson, *Brouwer and Euclid*, «Indagationes Mathematicae», 29, 2018, pp. 483-533; M. Beeson, J. Narboux e F. Wiedijk, F., *Proof-Checking Euclid*, «Annals of Mathematics and Artificial Intelligence», 85(2), 2019, pp. 213-257. Non va dimenticata l'influenza su tali scritti del lavoro di R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, New York, Spinger-Verlag, 2000 e di V. Panbuccian, *Axiomatizing Geometric Constructions*, «Journal of Applied Logic» 6, 2008, pp. 24-46. In questo ambito di ricerche possono essere collocati anche contributi come P. Graziani, *Analisi Strutturale e Fondazionale della Geometria del Piano di Euclide*, PhD Thesis, University of Rome "La Sapienza", 2007; P. Graziani, *A structural and Foundational Analysis of Euclid's plane geometry: the case study of continuity*, in

Se da un lato, dunque, i lavori appena citati[19] propongono interessanti casi studio di applicazioni della logica formale all'indagine di testi della matermatica antica, essi per contro non forniscono uno sguardo unitario e una riflessione metodologica comune, anzi costituiscono un aggregato disorganizzato di pubblicazioni di autori diversi, molto spesso reciprocamente critici.

Quale logica, dunque, utilizzare per formalizzare ad esempio gli *Elementi* di Euclide? La *Logica dei Predicati*?. La *Teoria Intuizionista dei Tipi*?. Una logica classica?. Una logica non classica? Possiamo sempre utilizzare in questo contesto i metodi della logica formale oppure solo in alcuni casi e quali? Quale deve essere il rapporto tra l'uso degli strumenti della logica formale e gli usuali strumenti di analisi dei testi e artefatti utilizzati dagli storici della matematica antica? E soprattutto: quali vantaggi/svantaggi derivano dall'uso di uno strumento come la logica formale applicata alla matematica antica? Se da un lato la presenza di risposte sistematiche a queste domande avrebbe certamente contribuito a dare corpo ad un programma di ricerca collettivo sull'uso della logica formale nello studio della matematica antica e più in generale nelle scienze antiche, l'assenza di tali risposte sistematiche, dall'altro, contribuì sia a vedere spesso gli studi che impiegavano la logica formale come irrilevanti o meramente filosofici, sia a vederli spesso come problematici. Fu subito noto, ad esempio, come i lavori di Hintikka e Remes[20] se da un lato avevano il merito di aver illuminato alcuni aspetti dell'antico metodo di analisi e sintesi descritto da Pappo, dall'altro avevano anche il demerito di aver oscurato diversi aspetti di tale metodo antico proprio attraverso l'uso di un formalismo ritenuto inadeguato, come messo in luce da Mäenpää[21]. Allo stesso modo se

V. Fano, F. Orilia and G. Macchia (ed. by), *Space and Time. A Priori and A Posteriori Studies*, Berlin/Boston, DeGruyter-Ontos Verlag, 2014, pp.63-106.

[19] La letteratura è molto più vasta, vedi le bibliografie in Pierluigi Graziani, *Analisi Strutturale*, cit.; in Pierluigi Graziani, *A structural,* cit.; in P. Graziani e M. Colucci, *Formal Logic and Ancient Mathematical Reasoning*, in A. Moktefi and A. Moretti and F. Shang (ed. by), *Let's be Logical*, London, College Publications, 2016, pp. 97-116; e nei lavori di Michael Beeson citati nella nota 18.

[20] Jakko Hintikka e Unto Remes, *The method of analysis*, cit.; Jakko Hintikka e Unto Remes, *Ancient geometric analysis and modern logic*, cit..

[21] Petri Mäenpää, *The art of analysis*, cit..

le modellazioni formali di Mäenpää e von Plato[22] avevano messo in luce importanti elementi della logica delle costruzioni euclidee e del metodo analitico-sintetico (vedi Graziani[23] e Sidoli and Saito[24] rispettivamente), dall'altro avevano mostrato i propri limiti nel catturare alcuni elementi del sistema euclideo come nel caso dell'interpretazione e formalizzazione del terzo postulato (vedi Sidoli[25]).

Quale vantaggio dunque attendersi da un approccio così problematico? In questa prospettiva non dovrebbero più stupire né l'indifferenza di Unguru[26] né l'affermazione di Berggreen[27] descritte inizialmente. Ciò nonostante, la presenza di così tanti lavori[28] in grado di mettere in evidenza aspetti spesso nascosti a una semplice analisi testuale e aspetti spesso coerenti con altre analisi tradizionali dei documenti antichi e artefatti, non può essere ignorata o semplicemente confinata all'ambito dell'interesse filosofico. La domanda, dunque, è se sia possibile conferire agli utilizzi della logica formale come strumento di studio della matematica antica una dimensione sistematica, ovvero lo statuto di una vera e propria disciplina in grado di riflettere sui propri strumenti e metodi, determinando le condizioni stesse della loro applicabilità.

3. Un'ipotesi di lavoro

La domanda, dunque, è se possiamo definire dei principi e criteri in grado di guidare e monitorare l'utilizzo di strumenti della logica formale

[22] Petri Mäenpää e Jan von Plato, *The logic of Euclidean construction procedures*, cit.; Petri Mäenpää, *The art of analysis*, cit..

[23] Pierluigi Graziani, *Analisi Strutturale*, cit..

[24] Nathan Sidoli e Ken Saito, *Comparative Analysis,* cit..

[25] Nathan Sidoli, *On the use of term diastema,* cit.; N. Sidoli, *Constructions in Euclid's Elements I-IV*, PhilMath InterSem, 2015, URL:<http://individual.utoronto.ca/acephalous/Paris_2015_06.pdf>.

[26] Sabetai Unguru, *On the Need to Rewrite*, cit..

[27] Lennart J. Berggreen, *History of Greek mathematics*, cit..

[28] Per esempio si veda: Petri Mäenpää, *The art of analysis*, cit.; John Mumma, Jeremy Avigad e Edward Dean, *A formal system*, cit.; Nathan Sidoli e Ken Saito, *Comparative Analysis,* cit.; Nathan Sidoli, *Constructions*, cit.; Pierluigi Graziani e Maurizio Colucci, *Formal Logic*, cit.; N. Sidoli, *Uses of Construction in Problems and Theorems in Euclid's Elements I-VI*, «Archive for History of Exact Sciences» 72, 2018, pp. 403-452; Michael Beeson, *op. cit.* in nota 18.

nella loro applicazione allo studio di testi di matematica antica, garantendo così che lo strumento formale favorisca l'analisi dei concetti e procedure presenti in tali testi e non li oscuri o fuorvii. Con questo spirito nel 2016, in un lavoro congiunto con Maurizio Colucci[29], venne presentata l'idea della *Formal History of Science* (FHS) intendendo raggruppare sotto questa etichetta tutti gli studi di storia della scienza che fanno uso di strumenti della logica formale per analizzare specifici concetti e procedure presenti in testi di scienza antica. La motivazione soggiagente alla costituzione della FHS fu ed è la convinzione che adeguate analisi attraverso la logica formale possano rivelare la struttura logica di principi e argomenti che, a causa dell'opacità del linguaggio naturale e della mancanza spesso di prove testuali o più in generale materiali, non sarebbero altrimenti immediatamente visibili. In particolare il saggio del 2016 si rivolse alla matematica greca, provando ad isolare dei principi e dei criteri per l'uso di strumenti della logica formale nello studio di testi matematici antichi confrontando così argomentazioni matematiche rigorose e informali come quelle, ad esempio, presenti negli *Elementi* di Euclide, con argomenti matematici rigorosamente formalizzati attraverso un linguaggio logico e nel contesto di un sistema formale adeguatamente definito. Lo studio di tali principi e criteri, ovviamene, è oggetto della FHS stessa, al fine di garantire lo sviluppo di uno standard di rigore metologico e la possibilità di confronto fra le varie ricerche di questo tipo all'interno delle quali gli strumenti logici sono intesi come ulteriori strumenti a disposizione dello storico della scienza e in dialogo costante – in equilibrio riflessivo – con tutti gli altri strumenti tipici dello studio di testi scientifici antichi.

Da dove dunque inizare per la ricerca di tali principi e criteri. Un buon punto di inizio può essere l'osservazione di ciò che è stato fatto nelle ricerche già svolte e che riteniamo a buon diritto facciano parte della FHS. In quelle, ad esempio, citate nel paragrafo precedente, relative all'uso della logica formale come strumento di studio dell'antica matematica greca, ciò che si propone è appunto l'utilizzo di uno strumento formale (es. *Teoria Intuizionista dei Tipi*) per formalizzare un principio (es. *Postulati* di Euclide) o un dato argomento (es. Teoremi e Problemi degli *Elementi*) o metodo (es. il metodo analitico-sintetico di

[29] Pierluigi Graziani e Maurizio Colucci, *Formal Logic,* cit..

Pappo), dunque siamo davanti a un processo di formalizzazione di un testo informale, ma rigoroso, attraverso un linguaggio logico all'interno di un rigoroso sistema formale. È dunque dalla riflessione sull'attività di formalizzazione che l'indagine sui principi e criteri cercati dovrebbe, a nostro avviso, prendere il suo inizio.

In merito alla formalizzazione di un testo come quello degli *Elementi* di Euclide, Nathaniel Miller[30] ha recentemente sostenuto che:

> In a formal system, we have a clearly defined notion of whether or not a proposed inference rule is valid – it is valid if it always gives a true conclusion when provided with true hypotheses. Euclid's proofs, however, are not part of a formal system in the modern sense, so we can't apply this test to them. This, by itself, doesn't mean that his methods are incorrect – only that they are informal. There are certainly informal proofs that mathematicians accept as being correct; in fact, practicing mathematicians almost never give proofs of their results in a formal system. Rather, they accept the idea that a formal system for doing mathematics exists, and if pressed might claim that their proofs could be translated into such a formal system.[31]

Sebbene la traduzione di una prova informale (contenuta ad esempio in un testo antico) in un sistema formale si riveli spesso un compito complesso per le ragioni accennate, con buona ragionevolezza è possibile accettare quale primo principio della FHS un'ipotesi proposta da Miller[32] e denominata da lui *Ipotesi di Formalità* (*Formality Hypothesis*):

> Un metodo di dimostrazione informale è valido se e solo se è possibile dare un sistema formale con la proprietà che le dimostrazioni informali che utilizzano i metodi informali possono sempre essere tradotte in equivalenti dimostrazioni corrette nel sistema formale.[33]

[30] Nathaniel Miller, *Euclid and his Twentieth Century Rivals,* cit.
[31] Cfr. ivi, p.12.
[32] *Ibidem*.
[33] "An informal proof method is sound if and only if it is possible to give a formal system with the property that informal proofs using the informal methods can always be translated into equivalent correct proofs in the formal system."

Potremmo, senza perdita di ragionevolezza, estendere questa ipotesi da dimostrazioni informali, in senso stretto, come quelle di Euclide, a più generali argomentazioni informali includendo così, ad esempio, argomenti come quelli contenuti nel pensiero dei filosofi presocratici e matematici pre-euclidei[34].

Correttamente Miller in merito all'*Ipotesi di Formalità* sottolinea come:

- It gives us a basis for evaluating informal methods of proof.
- It is inherently subjective and non-mathematical, because the question of what constitutes an "equivalent" formal proof is necessarily subjective.
- For this reason, it isn't possible to prove or disprove this hypothesis, and thus it is more like a definition than like a conjecture.
- It differs from a more traditional formalist position in that the basic objects being considered are proofs rather than statements. That is, we aren't just saying that a statement is true if a formal version of that statement can be proven in a formal system. We are saying that a proof of the statement is correct if the formal version of the statement can be proven by a formal version of that proof in a formal system.[35]

Il tema dell'equivalenza delle dimostrazioni, il secondo punto di Miller, è al centro di numerosi dibattiti all'interno della logica, dell'informatica teorica e della filosofia della logica e della matematica[36] che mostrano come il tema non sia in senso stretto "inherently subjective and non-mathematical", tuttavia, certamente i criteri che vogliamo qui proporre sono appunto criteri pragmatici che tengono conto in modo

[34] Si veda il paragrafo conclusivo.

[35] Cfr. ivi, pp. 12-13.

[36] Si pensi al dibattito sull'identità delle dimostrazione in *Deep Inference*, vd. A. Guglielmi, *The problem of bureaucracy and identity of proofs from the perspective of deep inference*, in Bruscoli, P., Lamarche, F., Stewart, C. (eds.) *Structures and Deduction*, Technische Universität Dresden, 2005, pp. 53–68; oppure si pensi al dibattito sull'equivalenza di algoritmi, vd. A. Blass, N. Dershowitz, e Y. Gurevich, *When are two algorithms the same?*, Technical Report MSR-TR-2008-20*,* Microsoft Research, 2008, o al dibattito sul 24° Problema di Hilbert, vd. R. Thiele, *Hilbert's twenty-fourth problem*, «American Mathematical Monthly», 110: 2003, pp.1-24.

rilevante di un equilibrio riflessivo tra analisi filologica dei testi e loro analisi logico-formale.

Data l'Ipotesi (Principio) di Formalità, possiamo domandarci come scegliere il sistema formale più adeguato per fornire una traduzione formale dei principi, delle inferenze, metodi contenuti nel testo informale che intendiamo fare oggetto della nostra indagine. Un secondo principio che può aiutare in tal senso è quello che chiameremo il *Principio di Scopo*:

> Ogni sistema logico è stato concepito con l'obiettivo di rendere conto del comportamento di una certa parte del vocabolario logico del linguaggio naturale e degli argomenti che valgono in virtù di questo stesso vocabolario.

L'idea, tratta da Vladimír Svoboda e Jeroslav Peregrin[37] è espressa chiaramente da tali autori attraverso il concetto di "intended scope of the system" (ambito di applicazione previsto/scopo previsto del sistema):

> We assume that each logical system has been conceived with the goal of accounting for the behavior of a certain part of the logical vocabulary of natural language and the arguments that hold in virtue of this very vocabulary. Classical propositional logic focuses on the behavior of the well-known connectives, classical predicate logic adds the basic quantifiers to this and modal logic further adds a certain modal vocabulary, etc. The intended scope of the system is then constituted by the arguments that are correct solely in virtue of the specific kind of vocabulary that the logical system is supposed to capture.[38]

I due principi precedenti ci danno, rispettivamente, una base per valutare rigorose argomentazioni informali contenute in testi scientifici antichi e un primo modo per discriminare tra vari sistemi logici in vista di una formalizzazione, tuttavia ancora molto resta da fare. Ad esempio come riconoscere la più adeguata forma logica di un'enunciato

[37] V. Svoboda e J. Peregrin, *Logical Form and Reflective Equilibrium*, in M. Peli and V. Punoch (eds.), «The Logic Yearbook 2011», 2012, pp. 191-210. Versione consultata: URL =< http://jarda.peregrin.cz/mybibl/PDFTxt/581.pdf>.

[38] Vladimír Svoboda e Jeroslav Peregrin, *Logical Form*, cit., nota 8.

del ragionamento informale in analisi? Una risposta può venire da un approccio inferenzialista[39] e dall'accettazione di un terzo principio che chiameremo appunto *Principio Inferenzialista*[40]:

> Per riconoscere la forma logica di un enunciato è necessario, prima di tutto, riconoscere la correttezza/scorrettezza degli argomenti contenenti l'enunciato, cioè identificare il ruolo inferenziale dell'enunciato.[41]

È evidente che il riferimento agli argomenti contenenti l'enunciato (*arguments in which the sentence features*), è uno di quegli elementi che, come si è già sottolineato, nella prospettiva della FHS fanno della logica uno strumento in dialogo con gli altri strumenti in possesso dello storico della scienza come, ad esempio, lo studio dell'occorrenza di certi termini o pattern all'interno di un testo, o all'interno di testi di uno stesso autore, o all'interno di testi di autori di uno stesso periodo.

Per illustrare meglio quest'ultimo principio, Peregrin e Svoboda[42] hanno fornito un'interessante analisi del processo di selezione della forma logica più appropriata di un enunciato. Sebbene il loro contesto di riferimento non sia quello dei testi di scienza antica, le loro analisi, *muatatis mutandis*, possono essere importate in tale ambito di applicazione, e nello specifico in quello della matematica greca antica oggetto del presente contributo. Senza entrare nei dettagli delle ricerche di Peregrin e Svoboda, per le quali si rimanda ai loro testi già indicati, è possibile prendere qui in esame un loro semplice esempio[43].

Supponiamo che a tre studenti sia assegnato il compito di formalizzare l'enunciato

---

39 Si vedano: J. Peregrin, *Inferentialism: Why Rules Matter*, Palgrave Macmillan, 2014; J. Peregrin e V. Svoboda, *Reflective Equilibrium and the Principles of Logical Analysis: Understanding the Laws of Logic*, Routledge, 2017.

40 Vladimír Svoboda e Jeroslav Peregrin, *Logical Form,* cit. p. 7 versione online.

41 "Recognizing the logical form of a sentence is, first and foremost, recognizing the correctness/incorrectness of the arguments in which the sentence features, i.e. identifying its inferential role."

42 J. Peregrin e V. Svoboda, 2013, *Criteria for logical formalization*, «Synthese», 190, 2013, pp. 2897-2924; Peregrin e Svoboda, *Reflective Equilibrium,* cit..

43 Vladimír Svoboda e Jeroslav Peregrin, *Logical Form*, cit.; Jeroslav Peregrin e Vladimír Svoboda, *Reflective Equilibrium*, cit..

(D) No grey donkeys are lazy

nella Logica Classica dei Predicati (LCP) e che essi facciano le seguenti tre proposte[44]:

$$[a] \quad \neg\exists x((P(x) \land Q(x)) \rightarrow R(x))$$
$$[b] \quad \neg\exists x(P(x) \land Q(x) \land R(x))$$
$$[c] \quad \forall x((\neg Q(x) \lor \neg P(x)) \rightarrow \neg R(x))$$

Quale tra le tre proposte è la migliore?

Seguendo il Principio di Scopo e il Principio Inferenzialista considereremo il comportamento di (D) all'interno di inferenze, che rientrano nell'ambito di applicazione della LCP, nelle quali normalmente (D) può occorrere, ovvero considereremo il ruolo inferenziale di (D). Consideriamo, dunque, a titolo di esempio, una lista di *argomenti di riferimento* (*reference arguments*) che noi riteniamo appunto rientrare nell'ambito di applicazione della LCP e che sono *perspicui* nel senso che ognuno di loro, in cui (D) occorre come una premessa o come una conclusione, è intuitivamente corretto o scorretto:

No grey donkeys are lazy
Batu is not lazy
Batu is not grey

No grey donkeys are lazy
Batu is not grey
Batu is not lazy

Every donkey is a herbivore
No herbivore is lazy
No grey donkeys are lazy

[44] Dove *P* sta per l'espressione "is grey", *Q* per "is a donkey" e *R* per "is lazy". Nella Figura 1, inoltre, *S* sta per "is herbivore" e *a* sta per "Batu".

Ora possiamo mettere al fianco di tali argomenti una lista di loro formalizzazioni o schemi (*argument forms*), attraverso la LCP, in cui (D) occorre formalizzata nei tre modi proposti [a], [b] e [c] [Figura 1].

	(a)	(b)	(c)
No grey donkeys are lazy	$\neg\exists x((P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow R(x))$	$\neg\exists x(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x))$	$\forall x((\neg Q(x) \vee \neg P(x)) \rightarrow \neg R(x))$
Batu is not lazy	$\neg R(a)$	$\neg R(a)$	$\neg R(a)$
Batu is not grey	$\neg P(a)$	$\neg P(a)$	$\neg P(a)$
No grey donkeys are lazy	$\neg\exists x((P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow R(x))$	$\neg\exists x(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x))$	$\forall x((\neg Q(x) \vee \neg P(x)) \rightarrow \neg R(x))$
Batu is not grey	$\neg P(a)$	$\neg P(a)$	$\neg P(a)$
Batu is not lazy	$\neg R(a)$	$\neg R(a)$	$\neg R(a)$
Every donkey is a herbivore	$\forall x(Q(x) \rightarrow S(x))$	$\forall x(Q(x) \rightarrow S(x))$	$\forall x(Q(x) \rightarrow S(x))$
No herbivore is lazy	$\neg(\exists x(S(x) \wedge R(x))$	$\neg\exists x(S(x) \wedge R(x))$	$\neg\exists x(S(x) \wedge R(x))$
No grey donkeys are lazy	$\neg\exists x((P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow R(x))$	$\neg\exists x(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x))$	$\forall x((\neg Q(x) \vee \neg P(x)) \rightarrow \neg R(x))$

Figura 1. *Immagine tratta da Peregrin e Svoboda (2017, p. 68).*

Per semplicità, seguendo Peregrin e Svoboda[45], abbiamo messo in evidenza sia i *reference argument* che sono corretti intuitivamente, sia le *argument form* che sono valide nella LCP.

Come può questa lista, dunque, aiutarci a scegliere quale preferire tra le formalizzazioni di (D)?

La risposta di Peregrin e Svoboda è molto semplice:

> where we have an intuitively incorrect argument that is rendered as having a valid form by the formalization, or where we have, conversely, an intuitively correct argument that is rendered as having an invalid form, the formalization is undermined (though not necessarily ultimately).[46]

Più precisamente:

> First, we can say that if the formalization of a statement leads us to render an intuitively incorrect reference argument as having a valid form within the chosen formal language, then this formalization of the statement is not even a candidate for an adequate formalization. (This is a 'soundness' or 'reliability' requirement which appears to be close to a

[45] Jeroslav Peregrin e Vladimír Svoboda, *Reflective Equilibrium*, cit..
[46] Cfr. ivi, p. 67.

> sine qua non). Second, if a certain formalization of a statement leads us to recognize more of the arguments that are intuitively correct and fall into the intended scope of the logical language as correct due to their logical form rather than an alternative one, then the former is – other things being equal – a better candidate than the latter. (This is a 'completeness' requirement that is a more-or-less matter).[47]

Tornando all'esempio considerato: la prima riga di Figura 1 non squalifica nessuna delle tre formalizzazioni alternative, infatti l'argomento del linguaggio naturale è scorretto e tutte le sue controparti formali proposte non sono valide.

La seconda riga, invece, suggerisce che abbiamo delle buone ragioni per rigettare la formalizzazione [*c*]: l'argomento formale nella terza colonna è valido ma la sua istanza in linguaggio naturale, con (D) al posto di [c] è chiaramente scorretta. Poiché uno schema di argomento logicamente valido non dovrebbe avere istanze scorrette, abbiamo una buona ragione per rifiutare la formalizzazione [*c*].

Infine, l'ultima riga fornisce un motivo per rifiutare [*a*] e per respingere nuovamente [*c*].

Il motivo è che, come indicano Peregrin e Svoboda[48], [*a*] e [*c*] "both fail to 'uncover' the intuitively logically correct argument belonging to the scope of CPL as an argument with valid logical form". Quindi, la formalizzazione vincente che (*provvisoriamente*) viene accettata è [*b*], che non è stata "smentita" da nessuno degli argomenti di riferimento elencati.

L'espessione "provvisoriamente" dipende dal fatto che un ruolo chiave è giocato proprio dagli argomenti di riferimento. Possiamo supporre che più lunga e variegata sarà la lista dei *reference argument*, più precisa sarà la lista dei candidati ritenuti ragionevoli. Contestualizzando l'esempio all'applicazione della logica allo studio di testi matematici antichi, dobbiamo immaginare che i nostri *reference argument* saranno scelti anche[49] tra gli argomenti ricorrenti nel testo/testi in studio e che

[47] *Ibidem*.
[48] *Ibidem*.
[49] La scelta di altri *reference arguments* dipenderà ovviamente anche dagli argomenti che rientrano nello *scope* della logica adottata e che sappiamo essere corretti o sorretti.

all'aumentare di questi riferimenti testuali, proprio come in un equilibrio riflessivo tra analisi testuale e formalizzazione logica, anche la nostra scelta della formalizzazione migliore sarà più precisa.

Possiamo a questo punto, dati i precedenti principi, cercare di mettere in evidenza alcuni corrispondenti possibili criteri da considerare quando si intende utilizzare lo strumento logico per comprendere un testo matematico antico. Anche in questo caso prenderemo in prestito alcune idee elaborate da Peregrin e Svoboda[50], ma riadattate al contesto che si sta qui considerando.

Iniziamo con introdurre alcuni termini che utilizzeremo nella formulazione dei criteri:

- [Φ/A]-*formalizzazione*:

una [Φ/A]-*formalizzazione* di un argomento contenente l'enunciato A è una formalizzazione con la formula Φ al posto di A;

- [Φ/A]-*istanza*:

una [Φ/A]-*istanza* di uno schema (*argument form*) contenente Φ è qualsiasi istanza dello schema, formulata in un linguaggio naturale, con l'enunciato A al posto di Φ.

- [Φ/A]-*defeated* ([Φ/A]-*invalidato*)

uno schema contenente Φ è [Φ/A]-*defeated* se ha una [Φ/A]-*istanza* non corretta tra i gli argomenti di riferimento (*reference argument*) che stanno nello scopo previsto (*intended scope*) della logica considerata (altrimenti si dice che lo schema è [Φ/A]-*undefeated*).

Con questa terminologia a disposizione possiamo introdurre alcuni criteri in linea con i principi suggeriti in precedenza[51].

- *Criterio di Espressività*:

un sistema formale S è adeguato per formalizzare gli argomenti di

[50] Vladimír Svoboda e Jeroslav Peregrin, *Logical Form*, cit.; Jeroslav Peregrin e Vladimír Svoboda, *Reflective Equilibrium*, cit..

[51] Anche in questo caso le ricerche di Peregrin e Svoboda citate in questo paragrafo sono state fondamentali. Molti dei criteri proposti richiamano, sebbene con qualche modifica fatta, criteri da loro proposti in un contesto differente.

una teoria informale T se e solo se lo scopo previsto (intended scope) di S consente una piena espressione di tutti gli elementi importanti della struttura grammaticale degli enunciati T e delle strutture inferenziali di T.

Anche in questo caso, ciò che è "importante" è determinato da un equilibrio riflessivo tra tutti gli strumenti e le procedure a disposizione dello storico della scienza nell'analisi testuale e di artefatti.

Ovviamente è possibile che ci siano più sistemi formali in grado di soddisfare il *Criterio di Espressività*, come possiamo scegliere tra questi? Un criterio che può aiutarci è il seguente:

- *Criterio di Completezza*:

Tra i sistemi formali adeguati S_i per T, il più adeguato è quello che formalizza il maggior numero di argomenti intuitivamente corretti di T come schemi validi di argomenti.

Scelto il sistema formale più adeguato, possiamo dunque scendere in profondità chiedendo come individuare, dato un enunciato, la sua migliore formalizzazione nel sistema formale considerato. In coerenza con i principi elencati, due criteri utili potrebbero essere i seguenti[52]:

- *I Criterio di Affidabilità Inferenzialista*:

Φ is una formalizzazione proto-adeguata di A in un sistema formale S se e solo se nessuno schema valido in S e contenente Φ è [Φ/A]-defeated.[53]

- *II Criterio di Affidabilità Inferenzialista*:

Tra le formalizzazioni proto-adeguate di A, Φ è una formalizzazione tanto più adeguata di A in S quanto più gli argomenti intuitivamente

[52] Questi sono rispettivamente il *Principle of Reliability* (REL) e il *Principle of Ambitiousness* (AMB) come elaborati in Vladimír Svoboda e Jeroslav Peregrin, *Logical Form*, cit. p. 13. Nel nostro contesto di applicazione riteniamo sia più chiara questa formulazione che quella presentata in Peregrin e Svoboda, *Reflective Equilibrium,* cit. pp. 70-71. Per una storia di questi principi e il loro nesso con le ricerche di G. Brun, *Die richtige Formel*, Frankfurt, Ontos, 2003 e M. Baumgartner e T. Lampert, *Adequate formalization*, «Synthese», 164, 2008, pp. 93-115; si veda Jeroslav Peregrin e Vladimír Svoboda, *Criteria for logical formalization*, cit..

[53] "Φ is a *proto-adequate formalization* of A in a formal system S if and only if no argument form valid in S and containing Φ is [Φ/A]-*defeated*."

corretti appartenenti allo scopo previsto (intended scope) di S e contenenti A come premessa o come conclusione sono traducibili come schemi validi di S.[54]

I principi e i criteri fin qui tratteggiati sono solo dei candidati e non si vuole in alcun modo sostenere che essi siano gli unici possibili. Con questo scritto si desidera porre all'attenzione e discussione della comunità tali proposte cercando di fornire un'idea di come un programma di ricerca sulle applicazioni della logica formale all'analisi di testi scientifici antichi potrebbe/dovrebbe procedere. Ovviamente non è detto che dall'uso di tali criteri emerga sempre un unico candidato come il sistema formale più adeguato o la formalizzazione più adeguata, ma lo sforzo di indagare sistematicamente tali adeguatezze riteniamo debba essere proprio di un programma di ricerca maturo che vada a contrapporsi a una giungla di analisi formali il cui rischio è quello di non valorizzare pienamente il ruolo che la logica può avere tra gli strumenti a disposizione dello storico della scienza.

Considerando lo specifico caso studio dell'antica matematica greca e la produzione di diversi sistemi formali proposti per studiare i suoi risultati, come ad esempio quelli presentati per formalizzare gli *Elementi* di Euclide, riteniamo che ancora un problema meriti la nostra attenzione.

Se l'obiettivo dei precedenti principi e criteri era quello di connettere, nel miglior modo possibile, una teoria rigorosa ma informale T con una teoria rigorosamente formalizzata S, l'ulteriore problema da porsi, in presenza di più alternative formali e in mancanza di elementi decisivi per scegliere la più adeguata fra loro, è quello di confrontare i diversi sistemi formali proposti. L'interesse per lo studio di tali confronti è duplice; da un lato esso è importante per comprendere meglio alcune idee implicite nelle formalizzazioni, idee che potrebbero far propendere per la scelta di un certo *account* formale; dall'altro esso è anche rilevante da un punto di vista fondazionale[55], in quanto tale confronto potrebbe

[54] "Among the *proto-adequate formalizations* of A, Φ is the more adequate formalization of A in S the more intuitively correct arguments belonging to the intended scope of S in which A features as a premise or a conclusion are rendered as valid argument forms of S."

[55] Come esempio interessante in questa direzione di ricerca possiamo considerare Victor Panbuccian, *Axiomatizing*, cit.

consentire di fornire un quadro analitico dei diversi modi in cui diverse formalizzazioni descrivono gli stessi concetti.

Un confronto molto interessante che può essere studiato tra le teorie formali è sicuramente quello definito dalla relazione di equivalenza. I filosofi della scienza e i logici si sono a lungo preoccupati delle condizioni sotto cui considerare due o più teorie come equivalenti, suggerendo diversi criteri di equivalenza. A tal proposito è particolarmente interessante il lavoro di Thomas William Barrett e Hans Halvorson[56] sui criteri formali di equivalenza teorica tra teorie formali. In particolare, Barrett e Halvorson nel loro articolo considerano quattro relazioni di equivalenza: i) *equivalenza logica*; ii) *equivalenza definitoria*; iii) *Morita equivalenza*; e iv) *equivalenza categorica*. Il primo è un criterio particolarmente rigoroso perché richiede che le teorie siano formulate nella stessa segnatura. Il secondo è un criterio più generale del primo, ma richiede che le teorie siano formulate con le stesse sorti di simboli. La Morita equivalenza supera i problemi precedenti, ma è un criterio difficile da applicare al di fuori del quadro della logica del primo ordine. L'equivalenza categorica risolve infine anche il problema precedente, tuttavia, quello categorico è un criterio strettamente più debole di equivalenza rispetto all'equivalenza di Morita. Mettendo tutti questi criteri insieme, Barrett e Halvorson hanno mostrato che esiste una gerarchia tra di loro: da un lato, l'equivalenza definitoria è un criterio troppo rigoroso; d'altra parte l'equivalenza categorica è troppo liberale (dove le frecce significano "implica") [Figura 2]:

Figura 2. *Immagine tratta Barrett e Halvorson (2016, p. 556)*

Lo studio dei sistemi formali, ad esempio degli *Elementi* di Euclide, dal punto di vista della loro equivalenza, consente di comprendere alcune delle caratteristiche di tali sistemi. Le analisi delle possibili estensioni di questi sistemi formali e le possibili equivalenze tra queste estensioni

[56] T.W. Barrett e H. Halvorson, *Morita Equivalence*, «The Review of Symbolic Logic», 9, 3, 2016, pp. 556-582.

permettono, inoltre, di analizzare meglio il problema dell'intertraducibilità tra tali sistemi, esplorando così i diversi modi in cui è possibile assiomatizzare elementi al loro interno, ad esempio le costruzioni geometriche. Infine, ricorrendo sia a studi sui modelli algebrici dei sistemi formali che ad analisi topos-teoriche della Morita equivalenza[57] tra tali sistemi, è possibile ottenere una migliore comprensione delle loro proprietà metateoriche.

Anche in questo caso, lo studio delle equivalenze tra teorie formali non è l'unico confronto possibile tra queste, ma è sicuramente un confronto che può dare informazioni utili a scegliere tra le diverse formalizzazioni proposte, ad esempio tra le diverse formalizzazioni degli *Elementi*, la più adeguata.

4. Conclusioni e prospettive

All'inizio di questo contributo ci si è chiesti quale ruolo la logica formale possa avere negli studi di matematica antica e, più in generale, se l'utilizzo di strumenti e metodi della logica formale possa avere un qualche ruolo per lo storico del pensiero matematico antico come strumenti di indagine, o se invece questi debbano essere confinati/riservati ad un ambito più filosofico di riflessione su tale contesto se non addirittura debbano essere ignorati.

La risposta che si è cercato di dare a tali domande è che non vi è ragione di temere questo tipo di applicazione della logica formale quando è guidato da principi e criteri condivisi che consentano allo storico della matematica non solo un monitoraggio dell'uso dello strumento formale, ma anche di impiegare tale strumento in coordinazione con altri strumenti a sua disposizione, come si è detto in una sorta di equilibrio riflessivo tra i vari strumenti, metodi e fonti di informazioni.

I principi e i criteri descritti, come anticipato, non hanno alcuna pretesa di unicità e completezza: il loro intento è solamente quello di suggerire i temi e i problemi di un programma di ricerca all'interno della *Formal History of Science* in grado di giustificare e valorizzare

[57] Si veda O. Caramello, *Theories, Sites, Toposes. Relating and studying mathematical theories through topos-theoretic 'bridges'*, Oxford University Press, Oxford, 2017.

l'utilizzo di strumenti della logica formale nello studio di testi scientifici antichi e non solo.

Se guardiamo alle ricerche indicate nel secondo paragrafo, alcune tra queste sembrano implicitamente presupporre un programma di ricerca simile a quello indicato: i lavori di Mäenpää, Graziani, Sidoli e Saito, Sidoli, e Beeson[58] descrivono un uso degli strumenti formali conforme a molti dei principi e criteri qui considerati. Un lavoro più esplicito, come si è indicato, è quello di Graziani e Colucci[59] in cui viene affrontato il caso studio dei postulati di Euclide e loro adeguata formalizzazione. Ulteriori indagini riconducibili a questo programma di ricerca, sebbene non riguardanti direttamente la matematica antica, sono quelle connesse agli studi sui paradossi di Zenone, come i lavori di Calosi e Fano[60], di Fano e Graziani[61], di Calosi e Graziani[62]; e al pensiero di Melisso, come l'articolo di Fano *et al.*[63].

Se da un lato, dunque, l'applicazione della logica all'analisi di testi matematici antichi può aiutare la comprensione di questi ultimi, essa può essere anche utile come strumento propositivo per mettere in evidenza ed esplorare strade non prese o abbandonate della ricerca scientifica. Casi interessanti in questo senso, solo per citarne alcuni appartenenti al contesto a cui ci stiamo riferendo, sono il lavoro di Petri Mäenpää del 1998[64] in cui, traendo ispirazione dall'antico medodo di analisi e sintesi, propose un calcolo riduttivo dei sequenti per la ricerca di dimostrazioni nella *Teoria Intuizionista dei Tipi*; o le ricerche di

[58] Petri Mäenpää, *The art of analysis*, cit.; Pierluigi Graziani, *Analisi Strutturale*, cit.; Nathan Sidoli e Ken Saito, *Comparative Analysis*, cit.;

[59] Pierluigi Graziani e Maurizio Colucci, *Formal Logic*, cit.; Pierluigi Graziani, *A structural*, cit.; Nathan Sidoli, *Uses of Construction*, cit.; Michael Beeson, opere citate in nota 18.

[60] C. Calosi e F. Fano, *Divisibility and extension: a note on Zeno's argument against plurality and modern Mereology*, «Acta Analytica» 30, 2015, pp. 117-132.

[61] V. Fano e P. Graziani, *Is a space interval a set of infinite points? A very old question*, in M. T. Catena and F. Masi (ed. by), *The changing faces of space, Studies in Applied Philosophy, Epistemology and Rational Ethics* (SAPERE), Switzerland, Springer, 2018, pp. 195-205.

[62] C. Calosi e P. Graziani, *Small Horns, Big Horns. The Devilish Paradox of Infinite Divisibility*, 2020 manoscritto.

[63] V. Fano, P. Graziani, F. Marcacci, e M. Tagliaferri, *Melissus as an analytical metaphysicist*, «Axiomathes», 2020 (online-first).

[64] P. Mäenpää, *A reductive sequent calculus for proof search in type theory*, 1998, available at http://www.helsinki.fi/filosofi/personal/jvp/maenpaa.pdf

Beeson (vedi testi citati nella nota 18) sulla geometria costruttiva partendo dalle riflessioni formali sugli *Elementi* di Euclide; sino ad arrivare alle ricerche di Quaresma *et al.*[65] sulla modernizzazione della *Geometrografia* di Émile Lemoine e sue applicazioni in dimostrazione automatica, partendo dallo studio della complessità delle costruzioni in geometria sintetica.

La logica ha mostrato nel corso del tempo la sua grande importanza in molti settori della ricerca sia in ambito scientifico (puro e applicato) che in ambito umanistico, configurandosi sempre più come un ponte natuarle tra le cosiddette due culture. Il presente contributo ha cercato di mostrare come la logica formale possa avere un ruolo anche all'interno della storia della matematica proponendo un programma di ricerca non solo in grado di superare le diffidenze verso questa applicazione, ma anche di indicarne i vantaggi sia per gli studi di storia della matematica, sia per lo sviluppo di nuove ricerche scientifiche.

Ringraziamenti: Ringrazio Eleonora Montuschi e Pietro Daniel Omodeo per aver letto e commentato la prima versione di questo lavoro. Ringrazio i colleghi dell'Università degli Studi di Urbino Carlo Bo per aver discusso con me alcuni temi qui presentati.

Questa ricerca è stata sostenuta finanziariamente dal MIUR tramite il programma PRIN 2017 "The Manifest Image and the Scientific Image" prot. 2017ZNWW7F_004.

[65] P. Quaresma, V. Santos, P. Graziani e N. Baeta, *Taxonomies of Geometric Problems,* in Francisco Botana, Zoltán Kovács, Tomas Recio (Ed. by), Special issue on dynamic geometry and automated reasoning, «Journal of Symbolic Computation», Volume 97, 2020, pp. 1-108.

Logica impura. Un contrappunto epistemologico

Paola Cantù[*]

1. Dalla logica neutra alla logica impura

Come un contrappunto musicale, la relazione tra logica ed epistemologia nel Novecento è segnata da una sorta d'interdipendenza, pur in una reciproca autonomia. Come le voci nel contrappunto musicale sono dipendenti tra loro dal punto di vista armonico, ma possono avere ritmi e timbri differenti, così logica ed epistemologia si sono sviluppate in una reciproca interdipendenza ma hanno mantenuto un'andatura ritmica distinta.

Ecco perché parlerò in proposito di logica impura, cioè di una logica che, intesa come attività di ricerca prima che come raccolta di teorie assiomatizzate o di calcoli formali, è intrecciata a preoccupazioni che oggi chiameremmo epistemologiche, vuoi nel senso inglese del termine, perché l'indagine logica è rivolta a questioni che riguardano la teoria della conoscenza umana in senso lato, vuoi nel senso francese della parola, perché la ricerca si è rivolta alla critica delle teorie scientifiche. In quest'accezione la logica impura non coincide con la logica applicata, che mira a indagare la struttura logica correlata a un dato dominio di oggetti o a un insieme circoscritto di pratiche o di procedure di ragionamento al fine di risolvere un problema concreto. E tuttavia come la logica applicata è profondamente ancorata nelle pratiche sociali.

L'apertura epistemologica di ciò che chiamiamo logica impura non si limita ad una descrizione nomologica o ad una categorizzazione nor-

[*] Aix Marseille Univ, CNRS, Centre Gilles Gaston Granger, Aix-en-Provence, France.

mativa di un ambito della realtà, ma mira ad un ampio studio filosofico della natura, dell'origine e dei limiti della conoscenza, e in particolar modo, della conoscenza scientifica. Questo studio non s'identifica con i risultati del processo di assiomatizzazione ma piuttosto con la dinamica del suo sviluppo. Se l'obiettivo riecheggia il progetto epistemologico kantiano di una ricerca delle condizioni di possibilità della conoscenza scientifica, l'accento nella logica impura è posto anche sulla dimensione sociale e intersoggettiva di costituzione dell'oggettività.

Anche se l'aggettivo "impura" potrebbe suggerire una svalutazione rispetto alla logica pura o neutra, il termine è qui usato provocatoriamente per rivendicare questa minorità come un punto di forza, consistente nella capacità di resistere ad ogni tentativo di epurazione (per es. la logica impura resiste al riduzionismo sintattico o all'eliminazione dell'approccio intensionale, o alla svalutazione della componente pragmatica e dialogica). La ricchezza di quelle che in altra sede ho chiamato teorie epistemologiche minori[2] sta proprio nell'impossibilità di essere epurate per entrare in perfetta assonanza con gli "ismi" dominanti di una certa fase storica (logicismo, strutturalismo, formalismo, intuizionismo, platonismo). Analogamente la logica impura resiste ad ogni forma di neutralizzazione in cui la componente normativa sia determinata da una preliminare concezione ontologica o metafisica o teleologicamente orientata anziché l'esito di un'analisi concettuale aperta.

Illustreremo l'impurità con un esempio. Nel Novecento la logica è stata per lungo tempo intrecciata, se non talvolta addirittura identificata, con l'assiomatica, che a sua volta ha favorito una distinzione netta tra diversi approcci alle teorie scientifiche: una via sintattica, che considera una teoria assiomatica come una collezione di enunciati linguistici; una via semantica, che considera le teorie come collezioni di modelli e una via pragmatica che giudica una teoria come un insieme di esempi paradigmatici, problemi, standard, abilità e pratiche.[3] La logica è stata

[2] P. Cantù, *Le rôle des épistémologies collaboratives et interdisciplinaires au début du XXe siècle. Analyse historique et enjeux théoriques*. CNRS International Emerging Action INTEREPISTEME: The effect of interdisciplinary collaboration on early 20th century epistemologies, directed by Paola Cantù in collaboration with Georg Schiemer, Institut für Philosophie, Universität Wien. «Lettre de l'INSHS», 3/2019, pp. 24-25.

[3] Cfr. C. Savage, *Preface*. In C. Savage, 2016; e R.G. Winther, 2016.

via via considerata come il nucleo di tali teorie scientifiche e analizzata separatamente nelle sue componenti sintattica, semantica e pragmatica. Benché la filosofia della logica si sia interrogata sulla relazione e sulla compresenza di questi tre modi di indagare una teoria, la specializzazione disciplinare ha reso talvolta difficile uno sguardo di insieme sulla dinamica dell'avventura assiomatica. Con questo termine intendiamo qualcosa di distinto sia da una teoria assiomatizzata sia dal metodo assiomatico, inteso come metodo di costruzione o ricostruzione di teorie assiomatizzate. La storia recente dell'assiomatica, e lo vedremo in uno dei suoi pionieri, Giuseppe Peano, è un andirivieni tra livello sintattico, semantico e pragmatico-linguistico – andirivieni che all'epoca era motivato anche dal fatto che ancora non sussisteva una netta separazione (pur nella distinzione) tra i vari approcci. La logica assiomatica nasce come una logica impura perché gli obiettivi legati a queste tre prospettive sono interrelati: 1) rendere esplicite le assunzioni implicite di una teoria (per esempio enunciando tutte le ipotesi necessarie per dimostrare un dato teorema); 2) indagare le assunzioni tacite di una teoria per considerare cosa accade se non vengono implicitamente assunte (per esempio testando la possibilità di creare modelli non standard di una teoria); 3) definire l'ambito e gli obiettivi di un programma di ricerca o di una disciplina.[4]

Ogni teoria assiomatizzata in maniera definita, incluse le varie teorie logiche, è come una pausa all'interno di una fuga, una composizione basata sul contrappunto, in cui ciascun tema richiama e segue il precedente senza che si arrivi mai all'assonanza o all'identità timbrica. Anche quando questi tre momenti sono riuniti nell'indagine sul contributo dell'assiomatica alla determinazione delle condizioni per l'oggettività della conoscenza scientifica, la riduzione dell'assiomatica a una collezione statica di teorie, linguaggi, modelli e contesti enunciativi impedisce una comprensione unitaria della componente epistemologica dell'assiomatica, che non si riduce né all'elencazione delle regole d'inferenza che permettono la correttezza del ragionamento né alla ricerca dei concetti primitivi e degli assiomi fondanti, ma si incentra sulla

[4] L'individuazione di questi obiettivi è ispirata al lavoro di Woodger, di cui si ricorda l'assiomatizzazione della teoria genetica. Cfr. J. H. Woodger, 1959, pp. 408-409.

possibilità di facilitare il confronto fra diversi risultati scientifici, la riorganizzazione delle aree di ricerca, la didattica e la cooperazione tra ricercatori.[5] Quest'accezione della logica assiomatica costituisce un buon esempio dell'idea che la logica non nasce pura per poi diventare impura:[6] l'assiomatica non è uno strumento sviluppato in maniera formale e neutra che viene poi messo al servizio dell'indagine epistemologica ma uno strumento volto direttamente e precipuamente all'analisi della conoscenza (scientifica). La logica non è uno strumento neutrale, di cui si può fare buono o cattivo uso, ma un approccio epistemologico che ha effetti sul metodo, sull'ontologia e sull'oggettività della conoscenza.[7] Se è generalmente accettato che la scelta di un'ontologia ha conseguenze sul tipo di problemi che vengono sollevati, affrontati e risolti in una determinata scienza, non sempre si sottolinea che altrettanto vale per la scelta di un'epistemologia. Se la logica non è né ontologicamente né epistemologicamente neutra, non è più possibile con Quine relegare la sua impurità al solo momento della scelta iniziale di un linguaggio. L'impurità si manifesta non appena si prendono in considerazione anche gli agenti e i ruoli sociali che intervengono nell'avventura logico-assiomatica.

La matematizzazione della logica, sia essa intesa come trattamento matematico della logica (Boole) o come indagine delle componenti logiche della matematica (Frege), finisce con l'accentuare l'idea che la logica riguardi solo alcuni concetti astratti e delle regole di inferenza, senza occuparsi propriamente né dell'accesso cognitivo a tali oggetti, né della maniera in cui tali oggetti vengono astratti, né del significato epistemologico delle regole di inferenza. Perfino nella diatriba tra logica classica e logica intuizionista o costruzionista sembra che in gioco vi sia non tanto

[5] Un esempio interessante del ruolo architettonico dell'assiomatica e insieme della sua natura sociale, collettiva e istituzionale è l'analisi del caso Bourbaki, che ho avuto occasione di sviluppare in collaborazione con Frédéric Patras, che qui ringrazio per i preziosi scambi che hanno profondamente ampliato la mia visione della matematica e della logica. Sul rapporto tra assiomatica e pensiero strutturale si veda in particolare F. Patras, 2001, p. 108 ss.

[6] La svolta linguistica e la svolta pragmatica sarebbero allora non veri e propri riorientamenti della disciplina ma sforzi della logica di sfuggire all'epurazione che la riduce ad alcune soltanto delle sue molteplici dimensioni.

[7] Si tratta in ultima analisi di un'estensione al caso specifico della logica di una certa idea di connessione intrinseca tra metodo e oggettività che costituisce un filo rosso del volume di E. Montuschi, 2006.

la comprensione logica del ragionamento umano, quanto le ragioni per la scelta di un sistema di assiomi più consono a descrivere una concezione del ragionamento che viene concepita come esterna alla logica.

La stessa natura formale della logica viene sempre meno associata a una concezione genuina dell'astrazione (per usare l'espressione di Ignacio Angelelli, cioè un tipo di astrazione in cui s'introduce qualcosa di nuovo, ma al contempo si perde qualcosa)[8] e sempre più associata all'idea che l'introduzione di oggetti astratti possa avvenire senza residui, senza che alcun aspetto ontologico vada perso nell'operazione di astrazione. La stessa caratterizzazione di un sistema scientifico rigoroso si basa su alcuni fattori logici (l'assiomatizzazione, il simbolismo), ma non è più una questione logica di per sé. L'assiomatica moderna accentua con la sua natura ipotetico-deduttiva la componente tautologica e analitica a priori, dunque non ampliativa, della ricerca logica. Perfino quando, con Quine, si opta per una naturalizzazione della logica che le toglie l'immunità rispetto all'esperienza, la logica è messa al sicuro al centro delle conoscenze umane, così lontana dall'esperienza da non rischiare di esserne veramente contaminata[9].

2. La logica nel Novecento non è sempre neutra

Citeremo qui, per ragioni di spazio, tre soli esempi tratti dalla storia della logica del Novecento (il *Formulario* di Giuseppe Peano, la logica dialogica di Lorenzen e la *Nuova Dialettica* di Douglas Walton),[10] che però ci sembrano sufficienti a confermare che la logica non è stata neutra né quando si è ristretta da logica del pensiero a logica matematica, né quando ha riflettuto sulla propria natura dialogica, né infine quando si è confrontata con la teoria dell'argomentazione.

Vedremo in particolare che l'analisi linguistica, che costituisce un pilastro di tutti e tre gli approcci, non è dissociabile da obiettivi epistemologici, come ad esempio la ricerca del buon ordine dei concetti, l'indagine sulla sfera pre-teorica della conoscenza e sui suoi mecca-

[8] Cfr. I. Angelelli, 2004, pp. 11-36.
[9] Cfr. W.O. Quine, 1951, pp. 20-43.
[10] Cfr. G. Peano, 1894; G. Peano, 1897; D. Walton, 2008.

nismi di costruzione intersoggettiva, l'interrogazione su ciò che rende un metodo conoscitivo scientifico. In secondo luogo, noteremo che la simbolizzazione della logica, lungi dall'essere esclusivamente finalizzata alla costruzione di sistemi assiomatici o all'indagine delle inferenze deduttive e induttivo-probabilistiche, riposa su interrogativi molto simili a quelli che si sono sviluppati nelle scienze sociali: la necessità di distinguere il semplice dal complesso, il primo per noi dal primo in sé, una forma canonica da forme devianti, la definizione di un termine dalla formazione di un concetto, le conseguenze pragmatiche di un'ipotesi dal suo ruolo teorico. Infine, considerando la teoria dell'argomentazione come una possibile parte integrante della logica *tout court*, si può scoprire che la logica si occupa, come la topica aristotelica, dei luoghi in cui si formano gli argomenti, quindi contemporaneamente di un contenuto conoscitivo, eventualmente anche solo di tipo procedurale, e della sua messa in forma ad opera di agenti sociali.

Abbandonare la qualifica di più o meno formale a favore della qualifica di più o meno impura dal punto di vista epistemologico ci sembra avere un doppio vantaggio: da un lato spiega una ragione profonda per la quale sia la logica informale sia la teoria dell'argomentazione sia la logica formale facciano parte della logica;[11] dall'altro offre un diverso terreno sul quale confrontare le due prospettive, che non è né il proprio dell'una (la complessità e l'adeguatezza descrittiva) né il proprio dell'altra (il rigore e la tendenza a fornire strumenti normativi), ma il proprio di entrambe (l'obiettivo conoscitivo e l'indagine sulla costruzione sociale dell'oggettività scientifica).

Un aspetto interessante di quest'accezione di logica impura è in che misura possa contribuire a ripensare il rapporto tra scienze sociali e scienze naturali ed esatte. Se l'opposizione si basa su una differenza di metodo (per alcuni) e di oggetti (per quasi tutti), e se la logica impura contribuisce alla costituzione sia del metodo sia della oggettività, in che misura la logica intesa come un'impresa epistemologica può essere

[11] Cercheremo a tal fine di evitare nel seguito ogni riferimento all'espressione "logica informale", che testimonia della tendenza a separare una parte 'formale' della logica da una parte 'informale', termine plurivoco usato talvolta per riferirsi alla componente pragmatica e applicata della logica, ma la cui ragion d'essere consiste solo nell'opposizione a una presunta logica formale.

qualcosa che precede entrambe e dunque un terreno di confronto preliminare e più fecondo?

Anziché insistere sul fatto che le cosiddette "scienze dure" e quelle sociali non condividono la stessa logica, come se la logica fosse uno strumento neutro che possiamo applicare all'una e all'altra in maniera indipendente, ci s'interroga invece sul modo in cui nelle diverse scienze la logica contribuisce alla formazione dei concetti scientifici e alla determinazione del loro grado di oggettività e di astrazione. Anziché fermarsi alla contrapposizione esplicazione-comprensione, o spingere verso l'unificazione delle diverse scienze basandosi sulla generalizzazione induttiva, è possibile investigare diverse procedure di generalizzazione e astrazione e diversi modi di costituzione degli oggetti. La logica può intervenire sia costruendo una topica dei ragionamenti che in ciascuna scienza portano alla formazione di nuovi concetti sia confrontando diversi meccanismi d'intenzionalità collettiva che ne spiegano l'effettività.

Anziché immaginare la logica delle scienze dure e la logica delle scienze sociali come due logiche distinte (deduttiva la prima e induttiva la seconda) o come una stessa logica (induttivo-probabilistica) applicata a domini di natura diversa, l'impurità della logica permetterà di vedere lo sviluppo di queste diverse scienze come una forma di contrappunto, in cui temi originati dalle dinamiche proprie delle scienze dure sono stati ripresi con altri ritmi e timbri dalle scienze sociali e viceversa tematiche sorte in ambito sociale si sono poi riprodotte con una diversa andatura nelle scienze esatte. Se la dipendenza delle scienze sociali dalle scienze dure è ben nota (almeno nel senso dell'applicazione di strumenti statistici e modelli matematici alle scienze sociali e in particolare all'economia), più misteriosa potrebbe apparire la relazione tra la logica e le scienze sociali.

Nella filosofia recente della matematica e della logica c'è una tendenza ormai consolidata che enfatizza l'importanza delle pratiche – visualizzazione, uso di diagrammi, ragionamento, spiegazione, formazione dei concetti, analisi delle definizioni, ecc. – nell'individuazione e nella risposta a problemi epistemologici.[12] Se alcuni di questi approcci

[12] Cfr. J. Carter, 2019; V. Giardino, 2017, pp. 18-28 e J. P. van Bendegem, 2014, pp. 215-226.

discendono dalla concezione di Lakatos della matematica come scienza quasi-empirica, nuove prospettive sono strettamente legate all'idea che l'oggettività matematica non abbia una matrice osservativa o empirica, ma sia piuttosto il risultato di una costruzione sociale. La pratica logico-matematica non è più invocata soltanto come ciò che permette uno studio "in vivo" anziché "in vitro" della conoscenza scientifica,[13] ma è indagata nella sua natura sociale: sociale è il gioco di dare e chiedere ragioni, ma anche l'attività condivisa propria della dimostrazione, sociali sono i ruoli del proponente e dell'opponente nella logica dialogica, sociale è l'impresa collettiva e collaborativa del *Formulario* di Peano, sociale è l'intersoggettività che caratterizza l'oggettività logico-matematica.

Molto si è detto della perdita dell'unità logica, sia all'interno della logica formale – a partire dal principio di tolleranza di Carnap e con lo sviluppo di tutta una serie di logiche non classiche – sia all'interno della logica informale: si pensi ad esempio al pluralismo estremo di Michael A. Gilbert, che include anche modi non logici degli argomenti (emozionale, viscerale, kiscerale)[14] o a forme di contestualismo spinte che si orientano prevalentemente alle applicazioni, come nel caso di Pinto o di Siegel.[15] E se il progetto di un'unica scienza si è spesso basato sull'analisi logica (come nel caso del circolo di Vienna), la perdita dell'unità logica avrebbe in parte portato con sé la perdita della possibilità di rendere conto dell'unità della scienza.

La nozione di logica impura e la metafora del contrappunto suggeriscono che l'unità può essere ritrovata ad un altro livello, e cioè nella

[13] Ringrazio Valeria Giardino per i numerosi spunti critici e le discussioni che mi hanno permesso di comprendere meglio il ruolo della pratica matematica, e soprattutto per questa metafora del passaggio da uno studio "in vitro" a uno studio "in vivo", che si adatta molto bene alla citazione pragmatista di Vailati sulle teorie viste o come animali impagliati o come organismi viventi (vedi sotto, § 3). Tuttavia questa distinzione è basata sull'opposizione tra due metodologie chiaramente distinguibili. Mentre lo studio in vitro è metodologicamente distinto da quello in vivo e sperimentalmente praticabile, la logica pura non è metodologicamente distinguibile da quella impura né è praticabile: con buona pace dei puristi logici, la logica umana non è solo incompleta ma anche impura, cioè non esiste un modo di fare logica che prescinda da considerazioni di tipo epistemologico.

[14] Cfr. per esempio M. A. Gilbert, 1994, pp.159-177 e M. A. Gilbert, 1997, in cui si discute la modalità argomentativa kiscerale (dal giapponese 'ki' che significa energia), basata su assunzioni arazionali, relative all'area della comunicazione intuitiva, mistica, religiosa o rivelata.

[15] R. Pinto, 2013; e H. Siegel, 2013.

componente epistemologica della logica, che, messa in evidenza da più parti per quanto riguarda alcune logiche più recenti, come la semantica della teoria dei giochi o la logica filo-indipendente di Hintikka, è secondo noi presente in buona parte della tradizione novecentesca, formale e informale. Non si tratta di un'unità completa, ma di temi, spunti, problematiche che si rincorrono storicamente, cambiando accento, timbro e ritmo, ma che, una volta rintracciati e confrontati, formano una melodia armonica, benché non assonante. È in questa melodia epistemologica che si può rivelare a tratti una coerenza, se non proprio un'unità della logica, e in cui si può apprezzare appieno la sua portata filosofica. Tuttavia le componenti sintattica, semantica e pragmatica analizzate nella loro natura sociale restano difficilmente integrabili e rimangono dissonanti: se venti anni fa, poteva apparire urgente rifiutare l'opposizione tra logica e teoria dell'argomentazione per immaginarne un'unità in senso proprio, come se la seconda potesse essere un'estensione della prima,[16] oggi mi sembra che ciò che rende problematica l'unificazione non è tanto la diversa estensione (tanto per fare un esempio, la reiterazione è una regola di inferenza corretta nella deduzione naturale mentre la *petitio principii* è una fallacia argomentativa), quanto la mancata distinzione a livello epistemologico tra ciò che si dovrebbe unire.

3. L'impurità della logica formale nell'assiomatica di Peano

La matrice epistemologica della logica di Peano risiede in una molteplicità di fattori, tra i quali ne spiccano tre:

1) la natura sociale, collettiva e dialettica del farsi della logica matematica;
2) l'interesse per le definizioni, che ha per obiettivo non solo la costruzione rigorosa di una teoria assiomatica e l'indagine metateorica di alcune sue proprietà, ma anche l'indagine di diverse alternative possibili e delle ragioni che si adducono per giustificarle;[17]

[16] P. Cantù e I. Testa, 2006.

[17] «Il vantaggio delle ricerche di questo genere, sul senso delle parole, non consiste tanto nelle definizioni che si trovano quanto nelle operazioni che bisogna fare per trovarle, e che il frutto di tali discussioni, non sta nelle conclusioni alle quali esse portano, ma nelle ragioni che

3) un'attenzione dinamica alla storia della logica e della scienza, intesa non solo come una narrazione della crescita della conoscenza seguita a nuove scoperte scientifiche, ma anche come un'indagine euristicamente feconda degli errori e un'esplicitazione delle metafore in uso, incluse quelle derivate da teorie ormai "morte e sepolte da secoli".[18]

Il *Formulario* di Peano fu un'impresa interattiva di costruzione di un dizionario che mirava a contenere tutti gli enunciati usati in logica e in matematica. L'impresa era al tempo stesso descrittiva e prescrittiva. Nella rivista da lui fondata e diretta *Revue des Mathématiques*, Peano invitò i lettori a contribuire al progetto che aveva iniziato con i suoi collaboratori: Giovanni Vailati, Cesare Burali-Forti, Alessandro Padoa, Mario Pieri e Giovanni Vacca. Oltre all'obiettivo di raccogliere e ordinare tutte le proposizioni matematiche, il *Formulario* ambiva anche ad analizzare lunghe serie di ragionamenti, inaccessibili con il solo uso del linguaggio ordinario.[19] Invece di iniziare il progetto determinando a priori una serie di regole del ragionamento corretto, Peano voleva raccogliere tutti gli enunciati logico-matematici e organizzarli in forma assiomatica, utilizzando un ordine espositivo che non escludeva la possibilità di ordini alternativi. Solo dopo aver dato un ordine dimostrativo a tutto questo materiale, si interessò alle regole di derivazione usate effettivamente e più frequentemente. In maniera non dissimile Otto Hölder considerava la logica matematica come una teoria normativa costruita sulla base di certe regolarità dimostrative che si riscontrano nella pratica matematica, come nell'incompiuta anatomia della matematica di Lambert. Questa indagine anatomica, che caratterizza in buona sostanza anche l'approccio di Peano, mostra come le regole logiche emergano come regolarità all'opera nelle pratiche e nelle tecniche dimostrative matematiche con lo scopo di favorire la coordinazione,

occorre scoprire e addurre per giustificarle.» G. Vailati, 1899; in G. Vacca, 1911, pp. 203-228 e in M. Quaranta, p. 150. Vailati fa riferimento ad un'idea riportata da Victoria Welby: «As Prof. H. Sidgwick says, there is often more profit in seeking than in finding definitions" V. Welby, 1896, p. 194.

[18] *Ivi*, p. 172.

[19] Cfr. G. Peano, 1901, p. v.

l'organizzazione e la divisione del lavoro. Vailati usa a questo proposito una metafora tratta dall'economia industriale che ben illustra come la normatività della logica matematica fosse basata su un incremento dell'efficienza nel raggiungimento dei risultati matematici attesi, anche se i costi richiesti dalla sostituzione della vecchia attrezzatura con la nuova (la logica simbolica) può richiedere un lungo tempo di ammortizzamento, proprio come il cambio dei macchinari è un modo inizialmente oneroso di razionalizzare la produzione.[20]

L'interesse della scuola di Peano per la ricerca di caratterizzazioni alternative dei primitivi geometrici e per la riflessione teorica sulla natura e la funzione di diversi tipi di definizione (nominali esplicite, per postulati o implicite, per astrazione, per operatori) è ben nota.[21] Da un lato, la scelta tra diversi tipi di definizioni di un simbolo (per esempio definizioni per astrazione o definizioni per operatori) non può essere fatta in termini puramente astratti, senza tenere conto di uno specifico sistema teorico, delle virtù che una definizione matematica dovrebbe idealmente soddisfare (per esempio condizioni di omogeneità tra le variabili che compaiono nel *definiens* e nel *definiendum*) e delle conseguenze che la scelta di una definizione può avere sulle definizioni successive (per esempio se scegliere una definizione per astrazione dei numeri razionali ha come effetto l'introduzione di una definizione non omogenea della somma tra razionali, allora meglio fare uso di una definizione per operatori, priva di tale inconveniente). D'altro lato, il ricorso alla distinzione tra la definizione effettivamente scelta e proposta e definizioni alternative di uno stesso termine, dette anche definizioni possibili, e di cui si tiene traccia nello sviluppo del *Formulario*, suggerisce che Peano abbandoni, da un certo punto in poi, l'idea dell'unicità dell'ordine logico dei concetti e delle proposizioni. Unicità che viene meno per due ragioni. In primo luogo, l'ordine dei concetti non è più assoluto ma riguarda una specifica teoria; così, ad esempio potrebbe esserci un ordinamento per i numeri naturali e un diverso ordinamento per i numeri razionali. In secondo luogo, diversi ordinamenti dei concetti e delle proposizioni di una stessa teoria sono possibili non solo nel senso

[20] Cfr. G. Vailati, 1897, p. 90.
[21] Cfr. Mancosu, 2018. Si veda anche Cantù, forthcoming.

che danno luogo a formalizzazioni assiomatiche distinte di uno stesso contenuto matematico (si veda in particolare il caso della geometria), ma anche nel senso che sono compossibili in uno stesso sistema, dove la distinzione tra concetti non definibili e derivabili è in parte arbitraria, dato che dipende da considerazioni epistemologiche o didattiche. E tuttavia Peano cerca di tenerne conto nella presentazione tipografica del *Formulario*, dove le indica con l'espressione "Dfp" come se questa molteplicità di punti di partenza e le possibili diverse ramificazioni dello sviluppo del ragionamento fossero parte integrante della teoria logica stessa.[22]

Mi limiterò a citare un esempio significativo. Il simbolo della ΛΛ rovesciata, che in logica è usato per denotare il falso o la contraddizione, è letto diversamente a seconda che si applichi a classi o a proposizioni (infatti diciamo che una classe è vuota e che una proposizione è assurda). Non solo, lo stesso simbolo può avere diverse definizioni anche quando occorre nello stesso contesto, cioè nella teoria delle classi: può essere definito come la classe che contiene gli oggetti che sono comuni a tutte le classi; ma può anche essere definito come il solo elemento di un insieme che può essere ottenuto per intersezione di una proprietà e della sua contraddittoria.

La logica di Peano è impura nel senso che l'obiettivo del *Formulario* non è soltanto quello di derivare tutte le possibili conseguenze di una definizione, ma anche quello di confrontare definizioni diverse, la cui differenza è principalmente epistemologica. Considerare l'insieme vuoto come l'intersezione di tutte le possibili classi o come il risultato dell'applicazione di un'operazione e della sua inversa non è epistemologicamente neutro.

Anche l'uso frequente di definizioni condizionali rivela non solo l'interesse ma la decisione di rimanere ancorato alla pratica matematica, adattando la logica all'uso matematico dei termini e alla loro rilevanza epistemologica. Le definizioni condizionali sono spesse criticate perché costituiscono un'eccezione al criterio di eliminabilità, che richiede che ogni formula del linguaggio esteso con il nuovo termine introdotto per definizione sia semanticamente (o dimostrativamente)

[22] Cfr. G. Peano, 1901, pp. 14-16.

equivalente a una formula del linguaggio di partenza. Consideriamo ad esempio la definizione dell'operazione di divisione tra numeri reali, che è soggetta alla condizione che il divisore sia diverso da zero. Un modo per neutralizzare il problema è quello di eliminare le definizioni condizionali, assegnando arbitrariamente un valore fissato (per esempio zero) alla divisione di un qualunque numero per zero. Questa strategia, simile alla strategia adottata da Frege per liberare la logica dai concetti vuoti e rendere univoco il significato dei termini, non è presa in considerazione da Peano, che è invece molto interessato alle definizioni caso per caso, frequentissime quando si fa uso di funzioni parziali, e anche alle descrizioni definite di cui non si sa se esista e se sia unico il riferimento (ad esempio il limite o il massimo di una funzione).[23]

Frege criticò le definizioni di Peano sostenendo appunto che fossero incapaci di determinare univocamente il significato di un segno e dunque, essendo incomplete, di delimitare in maniera precisa i concetti. Ritenendo che tale precisione dei concetti fosse necessaria per applicare il principio del terzo escluso, giudicò illecito fare uso di definizioni condizionali in una dimostrazione e criticò l'imperfezione logica del sistema di Peano: «l'intenzione sembra orientata a immagazzinare la conoscenza invece che a dimostrare, orientata verso la brevità e l'intelligibilità internazionale piuttosto che verso la perfezione logica».[24]

Se si può convenire con Frege che il progetto principale di Peano non era quello di fornire un'assiomatizzazione a priori della logica, non per questo si può dire che il progetto di Peano non fosse 'logico'. L'obiettivo era quello di mettere in evidenza i concetti e le proposizioni che occorrono in matematica e le inferenze logiche che vengono spesso usate nella pratica matematica, senza prescindere dal contesto e senza presupporre necessariamente una separazione tra logica, matematica, storia e linguistica. Il progetto di Peano è logico nel senso della logica impura di cui si è detto: analisi storica, linguistica e epistemologica sono intrecciate alla ricerca logica sulla matematica.

[23] Cfr. P. Cantù, 2016, pp. 107-126.

[24] Cfr. G. Frege. 1897, pp. 365-366. Si veda anche la lettera di Frege a Peano del 29.9.1896 in G. Frege, 1980, p. 115.

Con Vailati, potremmo dire che Peano aveva come obiettivo un'indagine dinamica dello sviluppo delle teorie logiche, un'analisi della formazione delle teorie logiche e non soltanto una presentazione definitiva di teorie compiute come una serie di verità a priori. La logica è inseparabile dal contenuto sviluppato nelle concrete pratiche scientifiche e dagli aspetti procedurali che caratterizzano tali pratiche. Nella logica di Peano, scrive Vailati,

> Le teorie vi si trovano esposte, non, come nella trattazione ordinaria, sotto il loro aspetto, per così dire, "statico" o di riposo, ma bensì sotto quello di moto e di sviluppo; non come degli animali impagliati nelle vetrine di un museo, in atteggiamento convenzionale e con gli occhi di vetro, ma come organismi che vivono, si nutrono, lottano, procreano, o almeno come delle figure in un cinematografo svolgentisi e trasformantisi naturalmente e logicamente le une nelle altre.[25]

Al di là della coloritura pragmatista di questo passo, Vailati illustra molto bene la dimensione dinamica innescata dall'attenzione alla storia e alle trasformazioni linguistiche e concettuali delle teorie scientifiche. Non si tratta solo di sviluppare un interesse per la storia delle definizioni o dei teoremi logici e matematici, o l'intento di ricostruire la filiazione leibniziana di una certa idea di caratteristica, ma si tratta di trasferire la dinamicità della conoscenza scientifica dall'approccio psicologistico che cerca nella logica un riflesso delle leggi a priori del pensiero ad un approccio linguistico, che cerca nella logica il legame con pratiche comunicative e dimostrative intersoggettive e rivedibili.

Per lo stesso Peano, d'altra parte, la storia della logica non è solo storia delle relazioni tra concetti ma è anche storia della formazione dei concetti e della scelta dei segni con cui esprimerli. Nei ripetuti appelli di Peano all'importanza di una lingua universale che faciliti la comunicazione umana e di una logica simbolica che permetta di risolvere molte inutili diatribe filosofiche non c'è solo l'eredità di Leibniz, ma anche un'attenzione particolare alla esposizione e alla presentazione didattica della matematica. Un'attenzione che diventa centrale nell'approccio

[25] Cfr. G. Vailati, 1906, p. 166.

pragmatista di Vailati, sia quando apprezza la didattica attiva e antinozionista di Dewey, sia quando riconosce l'uso frequente ma innocuo del linguaggio metaforico in matematica.[26]

4. L'impurità del dare e chiedere ragioni

L'attenzione alla dimensione dialettica della logica che appare in nuce in alcuni scritti di Vailati, che riprende e discute i *Topici* e le *Confutazioni Sofistiche* aristoteliche, è centrale nella logica dialogica e nella teoria dell'argomentazione.

Nella logica di Lorenzen, e più generalmente nella logica dialogica (Hintikka sarebbe un altro buon esempio), la verità di un enunciato elementare non è altro che la disponibilità di un interlocutore esperto e razionale ad accettare che il predicato valga per un dato oggetto. Similarmente, la verità di un enunciato complesso è determinata da un dialogo in cui ciascun partecipante ha un ruolo specifico: quello di proponente o di opponente, ed ogni ruolo è a turno determinato da un insieme specifico di regole. Alcune sono regole logiche che determinano il significato delle costanti logiche (ad esempio il loro possibile uso in un dialogo) ma la maggior parte sono regole dialogiche, che fissano ad esempio il diritto del proponente di parlare per primo, i turni alternati di parola, il dovere del proponente di difendere solo l'asserzione fatta nell'ultimo turno di parola, mentre l'opponente deve difendere tutte le proprie asserzioni, perché, a differenza del proponente, può asserire enunciati elementari.

Le regole logiche e dialogiche possono essere viste come il risultato di un'astrazione e generalizzazione dei ruoli giocati effettivamente dalle persone (oggi anche da computer) in uno scambio dimostrativo. Quello che vale per la logica dialogica, può essere senz'altro esteso alla

[26] «Al contrario di quel personaggio di Molière che si stupiva di aver sempre parlato in prosa senza saperlo, noi ci dovremmo stupire di parlare continuamente in poesia senza accorgercene. Né questo ci nuoce, come non nuoce all'analista, che indaga le proprietà delle funzioni, l'adoperar frasi che alludono o sono desunte dalla loro rappresentazione geometrica, e come non nuoce al geometra parlare di spazi a *n* dimensioni, o di punti comuni a curve che non s'incontrano.» G. Vailati, 1899, pp. 171-72.

teoria dell'argomentazione, i cui i ruoli dei partecipanti al dialogo sono regolati da norme meno rigide, che possono avere origine in convenzioni, abitudini, azioni sostenute da incentivi come l'accettazione sociale. Un esempio è l'argomento per autorità nella ricostruzione di Douglas Walton (*infra*) in cui i ruoli possono essere ottenuti per astrazione da regole generalmente accettate e queste ultime a loro volta ricostruite da particolari insiemi di domande con le quali i parlanti sottopongono a test critico l'applicazione delle regole argomentative (e talvolta perfino le regole argomentative stesse).

Un altro esempio utile per comprendere la natura impura della logica, e il diverso modo in cui è analizzata di per sé o in opposizione alla logica pura, viene proprio dalla teoria dell'argomentazione. Prendiamo due teorie paradigmatiche sviluppate negli anni Novanta del secolo scorso e tuttora in evoluzione: la "Pragma-Dialettica" di van Eemeren e del suo gruppo di ricerca, basata sull'applicazione di una teoria filosofica normativa e di un'analisi linguistico-retorica alla descrizione delle pratiche argomentative,[27] e la "Nuova Dialettica" di Douglas Walton incentrata su una descrizione e classificazione dei possibili schemi argomentativi e dei contesti comunicativi che giocano un ruolo essenziale nel determinare il quadro normativo per la valutazione delle pratiche stesse.[28]

La componente logico-normativa è stabilita a priori nella pragma-dialettica, indipendentemente dalle pratiche argomentative cui dovrà applicarsi: le regole della discussione, che inizialmente erano addirittura chiamate dieci comandamenti, sono assunte come modello di razionalità e la logica interviene in due regole distinte dalle altre (regole degli schemi di argomento e di validità) e in cui manca ogni riferimento alla componente epistemologica della logica:

- una parte non può considerare un punto di vista come difeso in maniera conclusiva, se la difesa non ha luogo per mezzo di uno schema argomentativo appropriato e correttamente applicato.
- una parte può usare nella sua argomentazione soltanto argomenti logicamente validi o argomenti che possono essere resi validi esplicitando una o più premesse inespresse.

---

[27] Cfr. F.H. van Eemeren, R. Grootendorst, 2003.
[28] Cfr. D.N. Walton, 1998.

In questo approccio non mancano una componente epistemologica né un'attenzione alla componente simbolico-stilistica del linguaggio, ma sono relegate rispettivamente nei turni di parola, negli atti linguistici ammessi e nello 'strategic manouvering', cioè nelle regole comunicative, procedurali e strategiche e nella retorica, come se queste dimensioni potessero essere radicalmente separate dalla logica. Si tratta di una prospettiva top-down, in cui un modello epistemologico di razionalità (di tipo popperiano) preliminarmente assunto (la ragionevolezza dipende dal superamento di certi test critici) si unisce all'applicazione di schemi di ragionamento – assunti a priori come validi – per intervenire sia nella fase di ricostruzione che nella fase di valutazione degli argomenti, entrambe ad opera del teorico dell'argomentazione.

Nell'approccio di Douglas Walton invece non c'è un unico standard di ragionamento corretto, ma lo standard dipende dal contesto (tipo di dialogo e obiettivo specifico) in cui occorre il ragionamento e non può essere stabilito indipendentemente dai partecipanti allo scambio argomentativo stesso, partecipanti che intervengono sia nella ricostruzione sia nella valutazione del ragionamento. Lo stesso schema argomentativo può dunque essere più o meno buono a seconda degli attori sociali del dialogo. Per valutare uno schema argomentativo i partecipanti alla discussione o il teorico dell'argomentazione che la ricostruisce e la valuta, possono far ricorso ad un set di domande critiche che viene associato ad ogni argomento. Consideriamo l'esempio dell'argomento per autorità (argument from expert opinion) e vediamo un set di domande estese. L'argomento ha la forma seguente:

Premessa maggiore. La fonte E è esperta nell'ambito S che contiene la proposizione A.

Premessa minore. E afferma che la proposizione A è vera (falsa).

Conclusione. A è vera (falsa).

Si può cogliere la compresenza di una componente logica e di una componente epistemologica nel set di domande e sotto-domande che Walton propone come test per accertare la bontà di un argomento.[29]

Expertise. Qual è la credibilità di E come fonte?

---

[29] D.N. Walton, 2008, pp. 92ss.

- Qual è il nome di E, il suo lavoro, le sue capacità ufficialmente riconosciute, il suo luogo e il suo datore di lavoro?
- Quali diplomi, qualificazioni professionali o certificazioni sono detenute da E?
- È possibile fornire la testimonianza di ‘peer experts’ nello stesso ambito che garantiscano la competenza di E?
- Qual è l’esperienza pregressa di E nell’ambito S o altre indicazioni di una pratica che attesti la sua abilità in S?
- Quali sono le pubblicazioni peer-reviewed e i contributi conoscitivi di E nell’ambito S?

Ambito. E è un esperto nell’ambito cui appartiene la proposizione A?

- L’ambito di *expertise* S è un’area di conoscenza genuina o un’area di abilità tecnica con pretese conoscitive?
- Se E è un esperto in un ambito A’ strettamente correlato all’ambito A, quanto è stretta la correlazione tra *expertise* nei due ambiti?
- Si tratta forse di una questione in cui *l’expertise* in un qualunque ambito conoscitivo è comunque rilevante?
- L’ambito di *expertise* S è un’area in cui ci sono cambiamenti tecnologici significativi o rapidi sviluppi di nuove conoscenze? Se sì, l’esperto è aggiornato su questi sviluppi?

Opinione. Che cosa ha affermato esattamente E? Implica davvero A?

- Si è citato E attribuendogli esplicitamente l’affermazione A? C’è un riferimento alla fonte della citazione? Si può verificare che E abbia effettivamente affermato A?
- Se E non ha affermato precisamente A, che cosa ha affermato esattamente? In che modo si è inferito A?
- Se nell’inferire A si sono usate più di una premessa, è possibile che una premessa sia stata esplicitamente affermata da E e che l’altra sia stata affermata da un altro esperto? In tal caso, c’è qualche evidenza di un disaccordo tra ciò che i due esperti hanno affermato separatamente?
- Ciò che ha affermato E è chiaro? Se non lo è, il processo che ha portato a interpretare l’asserzione di E come equivalente ad A è giustificato? Ci sono altre interpretazioni plausibili? E’ possibile che alcune importanti limitazioni siano state omesse?

Attendibilità. E è personalmente attendibile come fonte?
- E è biased?
- E è onesto?
- E è coscienzioso?

Coerenza. C'è coerenza tra quanto afferma E e quanto affermato da altri esperti?
- A è generalmente accettato nell'ambito S?
- Se A non è generalmente accettato, E potrebbe spiegare perché no e dare ragioni a sostegno del fatto che c'è sufficiente evidenza per A?

Backup Evidence. L'asserzione di E è basata su evidenza?
- Qual è l'evidenza interna che l'esperto E usa per arrivare all'opinione A come conclusione?
- Se c'è evidenza esterna (per es. evidenze fisiche riportate indipendentemente dall'esperto), l'esperto ne ha tenuto conto adeguatamente?
- Si può mostrare che l'opinione A è scientificamente verificabile?[30]

L'approccio argomentativo di Walton suggerisce che l'analisi logica sia strettamente intrecciata ad un'analisi epistemologica e che quest'ultima non riguardi soltanto la conoscenza scientifica, ma in generale ogni forma possibile di conoscenza. Nel caso della Pragma-Dialettica la logica interviene solo nel comandamento che suggerisce l'uso di argomenti logicamente validi, mentre nella Nuova Dialettica di Walton la logica compare in due set di domande critiche (Opinione e Coerenza) ove lo studio delle relazioni tra proposizioni non è disgiunto dai ruoli sociali dei parlanti.

5. Logica, pratica matematica e fatti sociali

Tra i possibili sviluppi di questo modo di guardare alla logica abbandonando la contrapposizione formale e informale e concentrandosi

[30] Si noti che l'appello ad un metodo di verifica scientifico dell'opinione A emerge solo come sottodomanda dell'ultima domanda critica.

invece sulla componente epistemologica della logica che la rende impura, c'è la possibilità di impostare un confronto tra diversi modi di costituzione dell'oggettività nelle scienze "dure" e nelle scienze umane. In particolare, è interessante confrontare le teorie sulla costituzione dei fatti e/o degli oggetti sociali (tra gli altri di Searle, Epstein, Bratman)[31] con la formazione e lo statuto degli oggetti matematici, ad esempio, per verificare se la componente intersoggettiva e sociale possa avere un ruolo nella caratterizzazione dell'oggettività matematica. L'attenzione all'impurità epistemologica della matematica potrebbe anche permettere di testare nuove possibili definizioni di pratica matematica, una nozione che è onnipresente nella filosofia matematica contemporanea, ma che rimane piuttosto vaga.

Salomon Feferman, ad esempio, ha cercato di caratterizzare l'oggettività matematica come un caso speciale di oggettività intersoggettiva che è onnipresente nella realtà sociale.[32] José Ferreiros ha modellato l'oggettività matematica sulla nozione di pratica, un'attività sostenuta da agenti individuali e sociali e dotata di una certa stabilità, affidabilità, apprendibilità e intersoggetività, e che può intervenire a diversi livelli di complessità e con diverse relazioni ad altre pratiche, anche non matematiche.[33] Julian C. Cole ha sviluppato una forma di costruttivismo sociale matematico, in cui gli oggetti matematici sono visti come oggetti istituzionali anziché mentali. Cole si rifà alla teoria dell'intenzionalità collettiva di Searle e all'imposizione collettiva di funzioni sulla realtà vista come un intervento non accidentale, non arbitrario e oggettivo, e dunque applicabile all'oggettività matematica.[34] Altre direzioni di ricerca recenti riguardano l'analisi della dimostrazione matematica come attività dinamica di interazione sociale e si ispirano alla teoria dell'attività pianificatrice di Bratman.[35] La distinzione di Epstein tra *grounding e anchoring*, tra l'indagine sul significato dei termini che denotano

[31] Si vedano per esempio J.R. Searle, 1995; J.R. Searle, 2014 ; B. Epstein, 2014; B. Epstein, 2015; B. Epstein, 2016 ; M.E. Bratman, 2013.

[32] Cfr. S. Feferman, 2009, pp. 169-189.

[33] Cfr. J. Ferreirós , 2016.

[34] Cfr. J. Cole, 2015, pp. 1101-1124. Si vedano anche J. Cole, 2017, pp. 151-165 ; J. Cole, 2008, pp. 109-128; J. Cole, 2013, pp. 9-36.

[35] M.E Bratman , 2013. Cfr. ad esempio Y. Hamami, e R. Morris, *Plans and Planning in Mathematical Proofs*, «The Review of Symbolic Logic», 2020. pp. 1-40.

oggetti sociali e l'indagine sul modo in cui è stato fissato il significato di tali termini, potrebbe aprire interessanti prospettive, se applicata al dominio della matematica, e anche illustrare non solo due diversi modi di guardare alla semantica: (descrittivo il primo, fondazionale il secondo), ma anche due diversi modi di concepire il compito della logica, prevalentemente linguistico nel primo caso, profondamente epistemologico nel secondo caso.[36]

Gli esempi citati suggeriscono prospettive nuove per lo sviluppo della logica impura, che potrebbe interrogarsi, nelle scienze esatte e naturali come nelle scienze sociali, sulla formazione sociale dei concetti matematici e sulla loro effettività, ma anche sulla componente interazionale, intenzionale e pianificatrice delle procedure di ragionamento. Sono questi diversi aspetti di un progetto d'indagine logica sull'ontologia sociale della pratica matematica, un progetto che non appartiene né esclusivamente alla filosofia matematica né esclusivamente alla teoria sociale.

Bibliografia

Angelelli I., *Adventures of abstraction*, «Poznan Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities», 82, 2004, pp. 11-36.

Bratman M.E., *Shared Agency: A Planning Theory of Acting Together*, Oxford, Oxford University Press, 2013.

Cantù, P., *Peano's epistemology between structuralism and logicism*, in F. Boccuni and A. Sereni (a cura di), *Origins and Varieties of Logicism. A Foundational Journey in the Philosophy of Mathematics*, Routledge, forthcoming.

Cantù P., *Peano and Gödel*, in G. Crocco and E.-M. Engelen (a cura di), *Kurt Gödel: Philosopher-Scientist*, Presses Universitaires de Provence, 2016, pp. 107-126.

Cantù P., Testa, I., *Teorie dell'argomentazione. Un'introduzione storico-filosofica alle logiche del dialogo*, Milano, Bruno Mondadori, 2006.

[36] Cfr. B. Epstein, 2014, p. 5.

Carter J., *Philosophy of mathematical practice – motivations, themes and prospects*., «Philosophia Mathematica», 27, 1/2019, pp. 1-32, 2019.

Cole J., *Humanism about abstract objects* in Sriraman B. (a cura di), *Humanizing Mathematics and Its Philosophy: Essays Celebrating the 90th Birthday of Reuben Hersh*, Birkhäuser, 2017, pp. 151-165.

Cole J., *Mathematical domains: Social constructs?*, in Gold B., Simons R. (a cura di), *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy*, Mathematics Association of America, 2008, pp. 109-128.

Cole J., *Towards an institutional account of the objectivity, necessity, and atemporality of mathematics*, «Philosophia Mathematica», 21, 1/2013, pp. 9-36.

Cole J., *Social construction, mathematics, and the collective imposition of function onto reality*, «Erkenntnis», 80, 6/2015, pp. 1101-1124.

Epstein B., *How many kinds of glue hold the social world together*? in Galloti M., Michael J. (a cura di), *Social Ontology and Social Cognition*, Dordrecht, Springer, 2014.

Epstein B., *The Ant Trap: Rebuilding the Foundations of the Social Sciences*., Oxford, Oxford University Press, 2015.

Epstein B., *Social ontology*. In Rosenberg A., McIntyre E. (a cura di), *The Routledge Companion to Philosophy of Social Science*, Routledge, 2016.

Feferman S., *Conceptions of the continuum*, «Intellectica», 51, 2009, pp. 169-189.

Ferreirós J., *Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices*. Princeton, Princeton University Press, 2016.

Frege G., *On Mr. Peano's conceptual notation and my own*. «Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig», XLVIII, 1897, pp. 361-378. Reprinted in Frege G., *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*, Blackwell Publishing Ltd, 1984.

Frege G., *Philosophical and Mathematical Correspondence of Gottlob Frege*. Chicago, University of Chicago Press, 1980.

Giardino V., *The practical turn in philosophy of mathematics: A portrait of a young discipline, «Philosophy and Mind*», 12, 2017, pp. 18-28.

Gilbert M.A., *Multi-modal argumentation*. «Philosophy of the Social Sciences», 24, 2/1994, pp. 15-177.

Gilbert M.A., *Coalescent Argumentation*, Mahwah (N.J.), Lawrence Erlbaum Ass., 1997.

Govier T., *The philosophy of argument*. «Informal Logic», 22, 1/2002, pp. 73-84, 2002.

Hamami, Y. e Morris, R., *Plans and Planning in Mathematical Proofs*, «The Review of Symbolic Logic», 2020. pp. 1-40.

Mancosu, P. *Definitions by abstraction in the Peano school*. In A. Giordani and C. de Florio (a cura di), *From Arithmetic to Metaphysics: A Path Through Philosophical Logic*, De Gruyter, 2018, pp. 261-288.

Montuschi E., *Oggettività e scienze umane: introduzione alla filosofia della ricerca sociale*, Roma, Carocci, 2006.

Patras F., *La pensée mathématique contemporaine*, Paris, PUF, 2001. Tr. it. *Il pensiero matematico contemporaneo*, Torino, Bollati Boringhieri, 2017.

Peano G., *Notations de Logique Mathématique*, Turin, Guadagnini, 1894.

Peano G., *Formulaire de Mathématiques*, t. II § 1, "Logique mathématique", Torino, Bocca, 1897.

Peano G., *Formulaire de Mathématiques.* Bocca, Torino, 1901.

Pinto R., *Argument, Inference and Dialectic: Collected papers on Informal Logic*, vol. 4. Springer Science & Business Media, 2001.

Quine W,O. *Two dogmas of empiricism*, «The Philosophical Review», 1951, 60, 1/1951, pp. 20-43. Rist. in *From a Logical Point of View*, Harvard, Harvard University Press, 1953, pp. 42 ss. (Trad. it. *Il problema del significato*, Roma, Ubaldini, 1966).

Savage C., *Preface*. In C. Savage (a cura di), *Scientific Theories. Minnesota Studies in the Philosophy of Science*, vol. 14, pp. VII-IX, Minneapolis, University of Minnesota Press, 1990

Shahid R., Symons J., Gabbay D.M., and Van Bendegem J.P., *Logic, Epistemology, and the Unity of Science*, Springer, 2004.

Searle J.R., *The Construction of Social Reality,* New York, Free Press, 1995.

Searle J.R., *Are there social objects?*, in Gallotti M., Michael J. (a cura di), *Perspectives on Social Ontology and Social Cognition*, Springer, 2014.

Siegel H., *Educating Reason*, Routledge, 2013.

Vailati G., *Sull'importanza delle Ricerche relative alla Storia delle Scienze. Prolusione a un corso sulla Storia della meccanica*, Torino, Roux e Frassati, 1897 rist. in Calderoni M., Ricci U., Vacca G. (a cura di), *Scritti di G. Vailati*, 1863-1909, Leipzig-Firenze, Barth-Seeber, 1911, pp. 64-78 e in Quaranta M. (a cura di), *Giovanni Vailati. Gli strumenti della ragione*, Padova, Il Poligrafo, 2003, pp. 75-140.

Vailati G., *Alcune osservazioni sulle Questioni di Parole nella Storia della Scienza e della Cultura. Prolusione ad un corso libero di Storia della Meccanica*, 1898-98, Torino, Bocca, 1899. Rist. in Calderoni M., Ricci U., Vacca G. (a cura di), *Scritti di G. Vailati, 1863-1909*, Leipzig-Firenze, Barth-Seeber, 1911, pp. 203-228 e in Quaranta M. (a cura di), *Giovanni Vailati. Gli strumenti della ragione*, Padova, Il Poligrafo, 2003, pp. 141-176.

Vailati G., *Pragmatismo e logica matematica,* «Leonardo», 4, 1/1906, pp. 16-25, rist. in Calderoni M., Ricci U., Vacca G. (a cura di), *Scritti di G. Vailati, 1863-1909*, Leipzig-Firenze, Barth-Seeber, 1911, pp. 689-694 e in Quaranta M., (a cura di), *Giovanni Vailati. Gli strumenti della ragione*, Padova, Il Poligrafo, 2003, pp. 239-248.

Van Bendegem J.P., *The impact of the philosophy of mathematical practice on the philosophy of mathematics* in Soler L., Zwart S., Lynch M., Israel-Jost V. (a cura di), *Science after the Practice Turn in the Philosophy, History, and Social Studies of Science*, Routledge, 2014, pp. 215-226.

Van Eemeren F.H., Grootendorst R., *A Systematic Theory of Argumentation: The Pragma-Dialectical Approach*, Cambridge, Cambridge University Press, 2003.

Walton D.N., *The New Dialectic: Conversational Contexts of Argument*, Toronto, University of Toronto Press, 1998.

Walton D.N., Reed C., Macagno F., *Argumentation Schemes*, Cambridge, Cambridge University Press, 2008.

Welby V., *Sense, Meaning and Interpretation*, «Mind», New Series, 5, 18/1896, pp. 186-202.

Winther R.G., *The Structure of Scientific Theories*. In Zalta E.N. (a cura di), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2016.

Woodger, J.H. *Studies in the foundations of genetic*s. In Tarski A., Suppes P., Henkin L., (a cura di), *The Axiomatic Method*, North-Holland, Amsterdam, 1959.

La nozione di fondazione: uno dei modi in cui la logica aiuta la filosofia

Francesca Poggiolesi

Introduzione

Una delle più diffuse attività umane, che pratichiamo da quando iniziamo a padroneggiare una lingua, è quella di chiedere il perché delle cose. Investigare il perché delle cose o degli eventi significa fare il primo passo per tentare di capire ciò che ci sta intorno ed esigere una spiegazione adeguata.

Come già notato da Aristotele nella *Fisica II, 3* e nella *Metafisica V, 2,* non tutte le domande del perché sono uguali; è comunque possibile dividere tale tipo di domande in categorie diverse a seconda della relazione che queste individuano insieme alle rispettive risposte. Consideriamo per esempio le due situazioni seguenti. Nella prima siamo ad una cena durante la quale un bicchiere casca e si rompe; chiediamo: perché il bicchiere è cascato e si è rotto? Ci viene risposto che è perché qualcuno l'ha distrattamente colpito. Supponiamo invece di guardare la televisione e di vedere che è scoppiato un incendio vicino a casa nostra. Ci domandiamo: perché è scoppiato l'incendio? L'annunciatrice spiega che è perché qualcuno ha gettato una sigaretta ancora accesa nel bosco. Queste due domande insieme con le rispettive risposte, sebbene apparentemente molto diverse fra loro, individuano una stessa relazione fra coppie di eventi: nel primo una relazione tra il colpo al bicchiere e il bicchiere che casca, la seconda, la relazione fra la sigaretta buttata ancora accesa nel bosco e l'incendio del bosco stesso. Questa relazione viene detta *causalità* ed rappresenta da Aristotele, passando per Hume, fino ad arrivare ai giorni nostri, uno dei principali oggetti di studio in ambito filosofico.

Negli ultimi dieci anni, un altro tipo di domande del perché ha iniziato ad attirare l'attenzione dei filosofi, ossia domande del tipo seguente: perché il muro è rosso? Perché è scarlatto. Perché la brocca è fragile? Per la sua struttura molecolare. Perché Gianni è celibe? Perché Gianni è un uomo e Gianni non è sposato. Queste tre nuove domande insieme con le rispettive risposte, sebbene anch'esse apparentemente diverse fra loro, individuano una stessa relazione: nel primo caso quella tra il muro rosso e il muro scarlatto, nel secondo caso quella tra la fragilità della brocca e la sua struttura molecolare, nel terzo quella tra l'essere celibe di Gianni e il suo essere uomo e non sposato. Tale relazione, che anche solo a livello intuitivo appare diversa da quella causale perché non diremmo mai che la causa dell'essere rosso del muro è il suo essere scarlatto né che la causa della fragilità del bicchiere è la sua struttura molecolare, è detta relazione di *fondazione,* o più comunemente di *grounding.*

Sebbene largamente ignorata per svariati secoli, oggi la nozione di fondazione ricopre un ruolo centrale in vari ambiti della filosofia: dalla filosofia della matematica alla metafisica, numerosi studi sono dedicati alla riscoperta di questo concetto (si veda per esempio Correia (2014), Fine (2010), Schaffer (2012)). La nozione di fondazione rappresenta il principale oggetto di studio di questo articolo, in cui non solo cercheremo di illustrarla ulteriormente introducendo distinzioni importanti, ma anche cercheremo di mostrare come un *metodo formale,* e più specificatamente un *metodo logico*, riesca a chiarirla in modo efficace e rigoroso.

Fondazione metafisica e fondazione concettuale

Il principale ambito in cui la nozione di fondazione è risorta negli ultimi dieci anni è la metafisica. Secondo Fine (2012a) e Shaffer (2009) negli ultimi due lustri la metafisica sembra essere stato l'oggetto di un cambiamento radicale, ossia il passaggio ad una nuova concezione della metafisica stessa. Da una *prospettiva Quineana* in cui lo scopo della metafisica è di enumerare cosa esiste, i filosofi sembrano aver abbracciato una *concezione Aristotelica* della metafisica, secondo la quale la metafisica deve stabilire cosa fonda cosa. Tale concezione si basa sull'idea che il mondo non sia uno spazio non strutturato di cose o fatti, ma che al contrario che ciò che esiste possa essere diviso in una gerarchia di livelli in cui gli oggetti più fondamentali fondano quelli meno fondamentali. Dal punto di vista filosofico, si tratta di teorizzare una tale concezione in cui la nozione di fondazione assume un ruolo centrale essendo la relazione che regola cioè che esiste.

Ma la nozione di fondazione, sebbene riscoperta solo recentemente, ha comunque un passato illustre; fu per esempio al centro della riflessione del grande pensatore boemo Bernardo Bolzano alla cui sistematizzazione Bolzano dedicò l'intera sua *Teoria della Scienza* (si veda Bolzano (2014)). In particolare, Bolzano si soffermò su una nozione di fondazione che potremmo definire *concettuale*. Il punto di partenza di Bolzano sono le scienze (o, diremmo noi oggi, le teorie scientifiche) che Bolzano concepiva non come semplici insiemi di verità, ma piuttosto come gerarchie ben ordinate in cui le verità più semplici fondano le verità più complesse in virtù dei legami fra i concetti che in queste occorrono. La relazione di fondazione diventa in questo contesto centrale in quanto rivela l'ordine proprio della scienza, ossia ci mostra quali verità sono *le ragioni* di altre verità. Elaborare una spiegazione scientifica significa mostrare la relazione di fondazione tra le verità della scienza, ossia le loro connessioni oggettive. Bolzano tentò di dare a questa sua concezione scientifica una base solida, sviluppando una teoria della nozione di fondazione. Il suo lavoro rimane incompiuto seppure rappresenti un ricco e fertile terreno di intuizioni brillanti e profonde riflessioni filosofiche.

La distinzione tra la nozione di fondazione in ambito metafisico e la nozione di fondazione in ambito concettuale è estremamente importante ma ha ricevuto per il momento poca attenzione (si veda Carrara e De Florio (2018), Poggiolesi e Genco (2020), Smithson (2020)). Spesso vengono citati esempi di fondazione, metafisica o concettuale, per rendere più chiara la distinzione. Per esempio, mentre i seguenti enunciati:

- (a) il bicchiere è fragile perché ha una certa struttura molecolare,
- (b) si verificano episodi mentali perché si verificano episodi neurologici,

- (c) esiste un insieme non-vuoto perché esistono i suoi membri, sono unanimemente considerati casi di fondazione metafisica perché concernono la struttura del mondo, i seguenti enunciati
- (d) il muro è rosso perché il muro è scarlatto,
- (e) Gianni è celibe perché Gianni è uomo e Gianni non è sposato,
- (f) Non è il caso che domani non piove perché domani piove,

sono considerati esempi di fondazione concettuale in quanto si basano su una relazione fra concetti in essi contenuti. Fondazione metafisica e fondazione concettuale condividono una stessa forma linguistica, ossia *Y perché X1, …, Xn*, che poi è la stessa usata per esprimer la relazione di causalità; ciò nonostante, le due nozioni (anzi le tre nozioni se si conta anche la causalità) concernono sfere e ambiti distinti. Un'interessante pista di ricerca ancora inesplorata sarebbe quella che indagare rigorosamente le loro differenze. Non ci occuperemo di tale questione in questo articolo; piuttosto ci concentreremo sulla nozione di fondazione concettuale lasciando da parte quella più prettamente metafisica.

Si noti che parte integrante della nozione di fondazione concettuale è la fondazione che potremmo chiamare *logica,* ossia quella relazione che svela le ragioni oggettive di concetti logici quali congiunzione, disgiunzione, o negazione. L'enunciato (f) menzionato sopra è un caso standard di fondazione logica in quanto rappresenta un'istanza della connessione fra la doppia negazione di un enunciato A e il semplice A. Una tale nozione verrà a ricoprire per il nostro lavoro un'importanza particolare.

Fondazione totale, parziale, immediata e mediata

Introduciamo ora altre due distinzioni concernenti la nozione di fondazione che si riveleranno preziose in seguito. Da una parte abbiamo la distinzione fra fondazione *totale* e fondazione *parziale*. Una fondazione è totale quando ci fornisce tutte le ragioni di una certa verità. L'enunciato (e) è un chiaro esempio di fondazione totale; se ci chiediamo le ragioni (oggettive e non personali!) del perché Gianni è celibe, queste corrispondono al fatto che Gianni è uomo e che non è sposato. Nient'altro sembra costituire un fondamento per l'essere celibe di Gianni.

Dunque l'enunciato (e) è un enunciato che esprime una relazione di fondazione concettuale e totale. Una fondazione è viceversa parziale quando fornisce solo una parte delle ragioni delle verità di un enunciato. Consideriamo gli enunciati seguenti

- (e') Gianni è celibe perché Gianni è un uomo,
- (e'') Gianni è celibe perché Gianni non è sposato,

Entrambi gli esempi forniscono le ragioni oggettive ma parziali dell'essere celibe di Gianni e dunque sono esempi di fondazione concettuale e parziale.

Passiamo ora alla distinzione tra fondazione immediata e mediata. Consideriamo il caso seguente:

- Gianni è celibe e felice perché Gianni è un uomo.

Volendo essere pignoli, non possiamo non notare una distinzione nel rapporto, da una parte tra 'Gianni è un uomo' e 'Gianni è celibe,' e dall'altra tra 'Gianni è un uomo' e 'Gianni è celibe e felice.' Mentre nel primo caso la relazione fra le due componenti è (parziale e) diretta, ossia il sesso di Gianni è una ragione diretta del suo essere celibe, nel secondo caso la relazione tra le due componenti è (parziale e) indiretta, ossia il sesso di Gianni è una ragione diretta del suo essere celibe, e il suo essere celibe è a sua volta una ragione diretta del suo essere celibe e felice, ma vi sono due passi o passaggi fra il sesso di Gianni e la sua felicità. Quando il rapporto fra una ragione e la sua conclusione è diretto, parliamo di fondazione *immediata*, mentre quando è indiretto parliamo di fondazione *mediata*. In termini leggermente più tecnici, si può anche dire che la fondazione mediata corrisponde alla chiusura transitiva della fondazione immediata. In un recente articolo (si veda Poggiolesi e Genco (2020)) si è cercato di mostrare come la nozione di prova aiuti a distinguere ancora più chiaramente una nozione di fondazione immediate e mediata.

Le distinzioni appena illustrate – totale/parziale, e immediata/mediata – furono introdotte da Bolzano (2014) nel tentativo di chiarire il concetto di fondazione. In particolare, Bolzano riteneva che la nozione di fondazione totale, immediata e logica avesse un ruolo particolare nello studio di queste questioni: considerava infatti che tale nozione fosse centrale nello studio de *grounding* e che qualsiasi analisi della nozione di fondazione dovesse di fatto partire da li (su questo punto si veda Tatzel (2002) e Betti (2010)).

La lezione di Bolzano è oggi quasi completamente dimenticata. Da una parte la sua distinzione tra totale e parziale è stata sostituita con una nuova, detta distinzione tra fondazione *piena* e *parziale* (vedi Fine (2012) e Corriea (2014)), che non solo si può dimostrare essere più debole di quella Bolzaniana (vedi Poggiolesi (2020b)), ma che inoltre crea problemi di superdeterminazione nel caso della disgiunzione e in casi analoghi (si veda Koslicki (2015)). D'altra parte, mentre Bolzano credeva che si potesse caratterizzare, o addirittura definire la nozione di fondazione, in particolare la nozione di fondazione totale, immediata e logica, attraverso l'uso di altre nozioni, oggi è prevalsa l'idea che la nozione di fondazione sia primitiva e possa al meglio essere descritta attraverso un elenco delle sue proprietà o attraverso intuizioni che la concernono.

Nelle prossime sezioni cercheremo di mostrare come nel nostro lavoro, e controcorrente rispetto alle tendenze più diffuse nella letteratura contemporanea, le idee Bolzaniane possano essere sviluppate grazie alle risorse fornite dai più recenti sviluppi logici. Tali sviluppi portano ad un rigore ed una chiarezza che è purtroppo assente da approcci in cui ci si affida alle mere intuizioni.

Definire o caratterizzare una nozione: la causalità.

Prima di entrare nel vivo del nostro contributo all'analisi della nozione di fondazione, perché ciò che diremo risulti più chiaro possibile, ci vorremmo soffermare brevemente su alcune ricerche ormai note e diffuse concernenti la nozione di causalità. Dato infatti che le nozioni di fondazione e causalità viaggiano su binari paralleli, come risulta evidente dagli esempi dati ma anche come sottolineato da svariati studi recenti (si veda per esempio Schnieder (2014), Schaffer (2016)), i risultati che le concernono non possono che essere meglio compresi se rapportati gli uni agli altri.

Uno degli approcci ormai più diffusi all'analisi della nozione di causalità è la teoria controfattuale elaborata da Hitchcok (2001) e Woodward (2003), basata sulle strutture equazionali di Pearl (2000). Volendo spiegare tale approccio senza perdersi nei pur preziosi dettagli che lo contraddistinguono, l'idea è quella di caratterizzare la nozione di causalità attraverso altre due nozioni, ossia la nozione di *derivabilità* e la nozione di *intervento*. Da una parte, se degli eventi *X1, ..., Xn* causano un evento *Y*, allora l'evento *Y* è derivabile dagli eventi *X1, ..., Xn*; dall'altra parte, se degli eventi *X1, ..., Xn* causano un evento *Y*, allora esiste un intervento capace di modificare gli eventi *X1, ..., Xn* in modo tale che il cambiamento modifichi anche l'evento *Y*.

Facciamo subito un esempio di quanto detto. Consideriamo la relazione fra il colpo dato al bicchiere e il bicchiere che cade, introdotta all'inizio di questo articolo. In maniera immediata e intuitiva, abbiamo stabilito che si tratta di una relazione di causalità. Ma esistono criteri oggettivi che confermano le nostre intuizioni? Secondo Hitchcock e Woodward sì, ossia la derivabilità e la nozione d'intervento. Se la relazione fra il colpo al bicchiere e il bicchiere che cade soddisfa questi due criteri, allora è una relazione causale. Non c'è dubbio che è cosi. Dal fatto che il bicchiere è stato colpito possiamo derivare che sia caduto. Inoltre, se intervenissimo sul colpo dato al bicchiere, per esempio impedendolo, il bicchiere non cadrebbe.

L'elemento chiave della teoria di Hitchcock e Woodward è la nozione di intervento che serve a catturare non solo il controfattuale che fin da Hume sembra inestricabilmente associato alla nozione di casualità, ma anche una direzionalità, o asimmetria, tipica di questa relazione di cui il controfattuale da solo non riesce a rendere conto. Si noti che tale nozione d'intervento è esplicitata, chiarita e sostenuta dall'apparato formale delle strutture equazionali di Pearl (2000), che si sostituiscono ai mondi possibili di Lewis (1973) più controversi e imprecisi. Senza tale apparato formale, la teoria Hitchcock e Woodward resterebbe esposta a molteplici obbiezioni, prima fra tutte quella di spostare semplicemente il peso dell'analisi dalla relazione di causalità a quella d'intervento, per poi lasciare vaga anche tale nozione. Invece grazie alle strutture equazionali di Pearl il lavoro di analisi si blocca e l'apparato formale sostiene il peso della teoria.

Le strutture equazionali di Pearl non sono strutture logiche – la logica è senza dubbio troppo debole per catturare un fenomeno così ampio e variegato come la causalità (si veda Urchs (1994)) – ma sono strutture matematiche e dunque sono comunque emblematiche di come l'impiego di risorse formali aiuti a chiarire e comprendere un concetto filosofico. Nella prossima sezione cercheremo di mostrare come una formalizzazione analoga aiuti a chiarire la nozione di fondazione.

Si noti inoltre che la teoria di Hitchcock e Woodward che presenta la causalità in termini di controfattuali e più specificatamente d'intervento, non deve essere confusa con una *definizione* del concetto di causalità. Il motivo per cui non si può parlare di definizione è semplice: la nozione stessa d'intervento sembra presupporre, almeno in parte, quella di causalità e quindi se la causalità fosse *definita* in termini d'intervento, cascheremmo inevitabilmente in un circolo vizioso. Piuttosto la teoria di Hitchcock e Woodward deve essere vista come una *caratterizzazione*, o un *modello*, della nozione di causalità in termini di altre nozioni: seppure non si tratti di una definizione, è un approccio importante che ci aiuta a chiarire e dunque a capire una nozione centrale della filosofia occidentale.

Definire o caratterizzazione la nozione di fondazione (grazie alle risorse della logica contemporanea)

Torniamo ora alla nozione di fondazione per cui abbiamo introdotto alcune importanti distinzioni. Seguendo tali distinzioni, Bolzano si focalizzò sulla nozione di fondazione totale, immediata e logica[1] e tentò per buona parte della sua vita di darne una definizione, non riuscendo mai a formularne una che ritenesse adeguata. Il nostro lavoro (si veda Poggiolesi (2016)) è stato quello di riprendere l'impresa Bolzaniana là dove lui stessa l'aveva lasciata. Con un notevole vantaggio però, quello di utilizzare le risorse della logica e della filosofia contemporanea, ossia risultati concettuali e formali a cui Bolzano non ebbe purtroppo accesso.

[1] Si noti che secondo la concezione Bolzaniana, la fondazione logica aveva un'estensione molto più ampia di quella che gli attribuiamo noi oggi. Approssimativamente, possiamo dire che si trattava di un'estensione a metà fra il logico e il concettuale odierno.

Innanzitutto muniti della lezione impartitaci dagli studi sulla causalità, abbiamo alleggerito la nostra impresa e invece di tentare di definire la nozione di fondazione, ci siamo limitati all'impresa di caratterizzarla in termini di altre nozioni. In pratica abbiamo cercato gli analoghi in termini di fondazione (logica) delle nozioni di derivabilità e intervento, sviluppate per la causalità. Abbiamo trovato tre criteri che insieme ci sembrano sufficienti e necessari per caratterizzare la nozione di fondazione. Tale caratterizzazione serve prima di tutto a chiarire il concetto di fondazione e a dargli una sistematizzazione rigorosa, lontana dalle sole maglie dell'intuizione. Utilizziamo il resto della sezione per introdurla.

Il primo criterio è quello che abbiamo chiamato *derivabilità positiva;* se *X1, ..., Xn* sono le ragioni (totali e immediate) della verità di *Y*, allora *Y* è derivabile da *X1, ..., Xn* (in un dato sistema formale). Ci sono vari motivi per sostenere questo criterio. Prima di tutto si tratta di un criterio ragionevole, confermato da qualsiasi esempio preso in considerazione. Analizziamo il nostro enunciato (f) in cui la ragione per cui non è il caso che non piova è che piova. Ma (in logica classica cosi come nella maggior parte delle logiche a cui possiamo pensare) non è il caso che non piova è derivabile dal fatto che piova e quindi la derivabilità positiva è soddisfatta. Anche Bolzano fu sempre un fermo sostenitore dello stretto legame fra derivabilità e fondazione logica, sebbene ovviamente non disponesse di una nozione cosi bene definita e rigorosa come la contemporanea nozione di derivabilità. Anche in virtù dell'analogia con la nozione di causalità, si può immaginare che Bolzano non avesse torto e assumere dunque la derivabilità (positiva) come primo criterio per caratterizzare la nozione di fondazione.

Il secondo criterio è quello che abbiamo chiamato *derivabilità negativa;* se *X1, ..., Xn* sono le ragioni (totali e immediate) della verità di *Y*, allora la negazione di *Y* è derivabile dalla *negazione di X1*, …, *la negazione di Xn* (in un dato sistema formale). Cerchiamo di spiegare il criterio detto di derivabilità negativa. Innanzitutto controlliamo che il nostro enunciato (f) lo soddisfi. È effettivamente così: dal fatto che non piove si può derivare che non è il caso, che non è il caso che non piove. Notiamo inoltre che attraverso la derivabilità negativa non si vuole fare altro che catturare in maniera formale quella dipendenza autentica tra certe ragioni e le loro conclusioni che è tipica di qualsiasi relazione di fondazione: non solo la conclusione è derivabile dalle sue ragioni, ma anche la sua negazione è derivabile dalla negazione di ciascuna delle sue ragioni. In altre parole, la derivabilità positiva e negativa non sono altro che la controparte formale, e più specificatamente logica, dell'idea di connessione stretta tra i *grounds* e la loro conclusione.

Un altro modo per capire il criterio di derivabilità negativa è quello di pensarlo come il corrispettivo logico del criterio di controfattualità, proprio della nozione di casualità. Nel caso della causalità, il controfattuale serve a specificare che il rapporto tra causa ed effetto non solo sussiste in condizioni normali, quelle reali, ma che se anche causa ed effetto fossero diversi da come sono, tale rapporto resterebbe immutato. La derivabilità negativa agisce in modo analogo. Ci dice infatti che non solo la conclusione è derivabile dalle sue ragioni (derivabilità positiva), ma anche che se ragioni e rispettiva conclusione fossero diverse da come sono – ossia se si considera la loro negazione invece che ragioni e conclusione stesse – la loro relazione – ossia la relazione di derivabilità – resta immutata. Si noti che nel caso della causalità usiamo i controfattuali, e non la derivabilità negativa che è indubbiamente una nozione meno problematica, perché la causa è un evento realmente accaduto e dunque è espresso da un enunciato *vero*; la forma linguistica che si usa per denotare il fatto che un enunciato vero potrebbe essere diverso da come è, e studiare cosa ne segue, è appunto il controfattuale. Nel caso della relazione di fondazione logica, le ragioni, a differenza delle cause, non sono necessariamente vere, ma solo *consistenti*.[2] Dunque per verificare che la loro relazione con la conclusione resti immutata anche nel caso di un cambiamento, non abbiamo bisogno del controfattuale ma possiamo utilizzare la derivabilità negativa che è una nozione logica ben definita e non problematica.

Arriviamo cosi al terzo ed ultimo criterio che, secondo il nostro approccio, caratterizza la nozione di fondazione. Quando si parla di fondazione, si presuppone sempre, in maniera più o meno esplicita, una gerarchia (si veda, per esempio, Betti (2010), Correia (2014), Fine

[2] Tipicamente la logica non si occupa della verità degli enunciati, ma solo della loro forma. Nel caso della nozione di fondazione, la logica ci dice quali formule sono le ragioni di altre in virtù della loro forma e indipendentemente dalla loro verità. Dunque non dobbiamo assumere che le ragioni siano enunciati veri.

(2012)). Nel caso della fondazione metafisica, tale gerarchia concerne gli eventi o i fatti del mondo: alcuni sono considerati più fondamentali di altri in una scala che comprende molteplici livelli e su cui si dibatte se sia finita o infinita (si veda per esempio Schaffer (2009)). Nel caso della fondazione concettuale e quindi anche logica, la gerarchia concerne i concetti in cui da concetti più complessi si passa a concetti via via più semplici fino ad arrivare a concetti atomici che costituiscono la base della gerarchia stessa (si veda Poggiolesi e Genco (2020)). La fondazione concettuale ci svela le relazioni fra concetti connettendo in modo appropriato gli enunciati che li contengono. Si noti che sia nel caso della fondazione metafisica che in quella concettuale è la gerarchia che indica l'ordine della fondazione e quindi la sua direzionalità. Analizzare la nozione di fondazione comporta quindi inevitabilmente anche un'analisi e una comprensione della gerarchia che la sottende, ed è proprio questo l'elemento più ostico di tale studio. Prendiamo per esempio il caso concettuale che abbiamo detto concerne le scienze. Pensiamo alle scienze matematiche e agli innumerevoli concetti matematici che esistono. Secondo quanto abbiamo detto sinora, una condizione indispensabile per capire la nozione di fondazione nelle scienze matematiche è quella di stabilire come i vari concetti matematici siano organizzati tra loro in una gerarchia che va dai concetti più complessi a quelli più semplici: l'impresa è senza dubbio ardua (vedi anche Mancosu (1999))! Per questo – si potrebbe ipotizzare – sebbene lo studio della nozione di fondazione sia stato considerato da vari filosofi (come, per esempio, Frege (2016) o Leibniz (1996)), sia poi anche stato innumerevoli volte abbandonato.

Come abbiamo mostrato nell'articolo Poggiolesi (2016), nel caso della fondazione logica la difficoltà di descrivere la gerarchia si restringe. In logica infatti trattiamo con formule e le formule possono essere divise in una gerarchia di complessità in base alla loro forma. Sebbene anche nel caso della forma delle formule sia richiesta una grande cura e attenzione quando le si divide in livelli di complessità, l'impresa è più facile e rappresenta il risultato più importante mostrato nell'articolo (Poggiolesi 2016). Tramite tale risultato, si stabilisce infatti il terzo criterio per parlare di fondazione logica*:* se *X1, …, Xn* sono le ragioni (logiche, totali e immediate) della verità di *Y*, allora *Y* è (totalmente e immediatamente) meno complesso di *Y,* secondo la gerarchia di complessità precedentemente stabilita. La complessità è dunque l'ultimo e più controverso elemento caratterizzante la nozione di fondazione; è l'elemento che ne determina l'asimmetria e che spiega quindi perché certi enunciati ne spiegano altri ma il vice-versa non vale. Insieme alla derivabilità positiva e negativa la complessità rappresenta una delle condizioni necessarie e sufficienti per essere certi di trovarsi di fronte ad un caso di fondazione. Speriamo di aver mostrato come sia stata proprio la nostra restrizione dell'attenzione ad un tipo di fondazione logica la chiave per poter definire rigorosamente una nozione di complessità, che altrimenti sarebbe molto difficile da catturare.

Chiudiamo la presente sezione con questa ultima importante osservazione. Nella sezione precedente abbiamo illustrato i lavori di Hitchcock (2001) e Woodward (2003) per analizzare la nozione di causalità. Abbiamo detto che questi autori caratterizzano, ma non definiscono, la causalità in termini delle nozioni di derivabilità e intervento. Abbiamo chiarito che il lavoro di Hitchcock e Woodward non può essere visto come un lavoro definitorio perché la nozione d'intervento presuppone in parte quella di causalità e dunque si avrebbe una definizione circolare. Ma osservazioni simili possono essere sviluppate sul nostro lavoro sulla fondazione: anche noi abbiamo caratterizzato la nozione di fondazione, ma sarebbe forse rischioso sostenere che l'abbiamo definita.[3] La nozione di complessità, che è una dei tre criteri caratterizzanti la nozione di fondazione, sembra infatti presupporre almeno in parte la nozione di complessità stessa e dunque se servisse a definirla, si tratterebbe di una definizione circolare. Ciò nonostante, cosi come il lavoro di Hitchcok e Woodward, sebbene non definitorio, ci aiuti comunque e profondamente, a capire il fenomeno della causalità, speriamo che il nostro approccio serva a chiarire il fenomeno fondazione.

[3] Questo ultima asserzione sembra contraddire il titolo stesso del lavoro che é « Sul definire la nozione di grounding ». A questo proposito ci sembra doverso dire che quando abbiamo scritto il lavoro non eravamo coscienti del rischio di circolarità. Si tratta comunque di un rischio, più che di un fatto. La nozione di complessità merita ancora un ampio e vasto studio.

Conclusioni e alcune piste di ricerca futura

In questo breve articolo ci siamo occupati della nozione di fondazione, o grounding, che negli ultimi due lustri ha ricevuto un'enorme attenzione da parte della filosofia contemporanea. Dopo avere introdotto alcune distinzioni importanti e ben note in letteratura riguardo la nozione di fondazione, abbiamo mostrato il nostro approccio. Abbiamo cercato di difendere tale approccio non solo in sé, ma anche per analogia con la nozione di causalità. Si tratta di un *approccio formale* e quindi abbiamo tentato di sottolineare come ci si trovi davanti ad un nuovo caso in cui il rigore della forma, più in particolare, della logica aiuti a capire e comprendere un concetto filosofico.

Il nostro approccio non si limita solamente a ciò che abbiamo presentato ma si è già articolato e si può ancora articolare in molteplici direzioni. Presentiamo, enumerandoli, sia i risultati già ottenuti che quelli che rappresentano interessanti piste future.

- abbiamo elaborato un calcolo di deduzione naturale con regole di fondazione che soddisfano derivabilità positiva e negativa cosi come complessità (si veda Poggiolesi (2018));
- abbiamo esteso la nostra caratterizzazione del concetto di fondazione alle nozioni di fondazione totale e mediata, parziale e immediata, cosi come parziale e mediata (si veda Poggiolesi (2020a));
- abbiamo elaborato il concetto di fondazione non solo rispetto ai concetti classici di negazione, congiunzione e disgiunzione, ma anche a quelli – sempre classici – di disgiunzione esclusiva e tripla disgiunzione (si veda Poggiolesi e Francez (2020)), ma anche all'implicazione rilevante (Poggiolesi (2020a)).

Vi sono almeno due piste di ricerca interessanti.

- il nostro approccio seppure solido è limitato alla sfera logica. Sarebbe interessante, seppure come abbiamo già sottolineato molto difficoltoso, estenderlo alla sfera concettuale.
- Sarebbe utile, stimolante e arricchente analizzare i rapporti tra la nozione di fondazione concettuale, fondazione metafisica e la

nozione di causalità, attraverso i vari approcci formali che caratterizzano queste nozioni.

Riferimenti Bibliografici

Betti, A. (2010). Explanation in metaphysics and Bolzano's theory of ground and consequence, *Logique et analyse*, 211: 281-316.

Bolzano, B. (2014). *Theory of Science*. Oxford University Press, Oxoford.

Carrara, M. e De Florio, C. (2018). Identity criteria: an epistemic path to conceptual grounding, *Synthese*, 9 : 1-28.

Correia, F. (2014). Logical grounds, *Review of Symbolic Logic*, 7: 31-59.

Fine, K. (2010). Some Puzzles of Ground, *Notre Dame Journal of Formal Logic,* 51: 97-118.

Fine, K. (2012). Guide to ground. In Correia, F. e Schnieder, B. editori, *Metaphysical grounding*, pp. 37-80. Cambridge University Press, Cambridge.

Frege, G. (2016). *The basic laws of arithmetic 1-2*. Oxford University Press, Oxford.

Hitchcock, C. (2001). The Intransitivity of Causation Revealed in Equations and Graphs**,** *The Journal of Philosophy,* 98: 273-299.

Koslicki, K. (2015). The Coarse-Grainedness of Grounding, *Oxford Studies in Metaphysics* 9: 306-344.

Leibniz, W. (1996). *New Essays on Human Understanding*. Cambridge University Press, Cambridge.

Lewis, D. (1973). *Counterfactuals*. Blackwell, Oxford.

Mancosu, P. (1999). Bolzano and Cournot on mathematical explanation, *Revue d'histoire des sciences*, 52: 429-456.

Pearle, J. (2000). *Causality*, Cambridge University press, Cambridge.

Poggiolesi, F. (2016). On defining the notion of complete and immediate grounding, *Synthese*, 193: 3147-3167.

Poggiolesi, F. (2018). On constructing a logic for the notion of complete and immediate grounding, *Synthese*, 195:1231-1254.

Poggiolesi, F. (2020a). Grounding principles for relevant implication, *Synthese*, 4 :1-35.

Poggiolesi, F. (2020b). A proof-theoretical framework for several types of grounding, *In fase di valutazione*, pp. 1-35.

Poggiolesi, F. e Francez, N. (2020). Towards a generalization of the logic of grounding, *In fase di valutazione*, pp. 1-18.

Poggiolesi, F. e Genco, F. (2020). Conceptual grounding, conceptual explanation and proof, *In fase di valutazione*, pp. 1-29.

Schaffer, J. (2009). On what grounds what. In Chalmers, D., Manley, D., e Wasserman, R.editori, *Metametaphysics: New Essays on the Foundations of Ontology*, pp. 291-309. Oxford University Press, Oxford.

Schaffer, J. (2012). Grounding, transitivity, and contrastivity. In F. Corriea and B. Schnieder editori, *Metaphysical Grounding: Understanding the Structure of Reality*, pp.122-138. Cambridge University Press, Cambridge.

Schaffer, J. (2016). Grounding in the image of causation, *Philosophical Studies*, 173:49-100.

Schnieder, B. (2014). Bolzano on causation and grounding, *Journal of the History of Philosophy*, 52: 309-337.

Smithson, R. (2020). Metaphysical and conceptual grounding, *Erkenntnis*, 83: 1-25.

Tatzel, A. (2002). Bolzano's theory of ground and consequence, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 43:1-25.

Urchs, M. (1994). Actions and Preventions. A Constructive System of Unsorted Action Logic. In Faye, J. editore, *Logic and Causal Reasoning*, pp. 131-140. Akademie Verlag, Berlin.

Woodward, J. (2003). *Making things happen*. Oxford University Press, Oxford.

Armonia intensionale come isomorfismo[1]

Paolo Pistone*, Luca Tranchini**

1. Introduzione

Una teoria del significato per una lingua è una descrizione dell'insieme di conoscenze di cui un soggetto è in possesso in quanto parlante competente della lingua in questione.

I parlanti competenti di una lingua sono in grado di interagire tra loro utilizzando un'ampia gamma di atti linguistici, come comandi, richieste, domande, ecc… Come osservato per la prima volta da Gottlob Frege, sebbene uno stesso enunciato possa essere utilizzato per effettuare degli atti linguistici diversi (come ad esempio un'asserzione "Sta piovendo." o una domanda "Sta piovendo?"'), è l'atto assertorio quello da cui la spiegazione deve prendere le mosse, dal momento che una spiegazione del funzionamento degli altri atti linguistici sembra presupporre quella dell'asserzione (ad esempio, sembra plausibile sostenere che un comando esprima la richiesta di agire in modo da creare le condizioni per cui la corrispondente asserzione risulti corretta).

* Dipartimento di informatica, Università di Bologna, e-mail: paolo.pistone2@unibo.it

** Dipartimento di informatica, Università di Tubinga, e-mail: luca.tranchini@gmail.com

[1] *Il presente articolo è una versione italiana dell'articolo «Intensional harmony as isomorphism», in corso di pubblicazione nel volume Peter Schroeder-Heister on Proof-Theoretic Semantics a cura di Thomas Piecha e Kai Wehmeier nella serie Outstanding Contributions to Logic, Springer. Gli autori ringraziano sentitamente Francesco Montesi per il suo lavoro di traduzione dall'inglese. Il lavoro di Paolo Pistone è stato finanziato dall'European Research Council (ERC CoG 818616 "DIAPASoN") e quello di Luca Tranchini dalla Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG Az. TR1112-4/1).*

Come sottolineato da Michael Dummett[2], gli elementi centrali della pratica assertoria sono la capacità dei parlanti di effettuare asserzioni e di reagire in modo appropriato ad asserzioni effettuate da altri parlanti. Per rendere conto di questi due aspetti della pratica assertoria, la teoria del significato deve descrivere, da una parte, in che cosa consista la conoscenza delle condizioni per poter correttamente asserire un enunciato – dette condizioni di asseribilità; dall'altra, essa deve descrivere in che cosa consista la conoscenza delle conseguenze che possono essere tratte dall'asserzione di un enunciato da parte di un altro parlante.

Affinché la pratica assertoria possa dirsi razionale, questi due aspetti devono combaciare perfettamente. Più precisamente, le conseguenze che possono essere tratte dall'asserzione di un enunciato non possono essere né più né meno di quelle che sono garantite dal soddisfacimento delle sue condizioni di asseribilità.

Per chiarire questo principio, detto di *armonia*, Dummett discute un esempio volto a mostrare che la violazione dell'armonia induce elementi irrazionali nelle pratiche linguistiche. L'esempio considerato è *boche*, termine denigratorio con cui gli anglo-americani si riferivano ai tedeschi durante la Prima guerra mondiale. Le condizioni per applicare il predicato a una persona (e quindi per asserire il suo essere un *boche*) consistono nel fatto che la persona sia di nazionalità tedesca, mentre le conseguenze che possono essere tratte dall'asserzione "He is a boche." sono la barbarie e la crudeltà del soggetto dell'asserzione. La disarmonia tra i due aspetti di asserzioni di questo tipo mostra per Dummett la non-razionalità dell'uso del termine *boche* e suggerisce la necessità di rivedere le pratiche linguistiche che lo coinvolgono.

L'armonia ha dunque per Dummett non solo un valore descrittivo, ma anche una componente normativa, ovvero se le condizioni di asseribilità di un enunciato e le conseguenze che possono essere tratte dalla sua asserzione non coincidono, allora la comunità linguistica deve rivedere le sue pratiche[3].

---

[2] Cfr. Dummett, 1991.

[3] Nella letteratura successiva, l'esatto significato dell'armonia è tuttavia aperto a diverse interpretazioni. In particolare, non c'è accordo sul fatto se l'armonia debba essere considerata come un criterio descrittivo o normativo; né se debba essere considerata come un criterio

Come Dummett stesso ammette, che il principio di armonia valga universalmente è una richiesta molto forte, ed è dubbio che i due aspetti di ogni possibile asserzione in una lingua siano in perfetta armonia. Nondimeno, dato che siamo disposti a concedere che le pratiche linguistiche in cui siamo coinvolti come parlanti sono (per lo più) razionali, sembra naturale aspettarsi che una teoria del significato soddisfi alcune condizioni che garantiscano per lo meno la possibilità che le pratiche da essa descritta siano (almeno approssimativamente) armoniche.

Alcune di queste condizioni dipendono da un altro aspetto essenziale del linguaggio osservato da Frege, ovvero il fatto che un parlante competente di una lingua sia in grado di produrre e comprendere un insieme potenzialmente infinito di enunciati distinti, a partire dalla sua comprensione di un insieme finito di unità minime dotate di significato. Questo aspetto del linguaggio, forse l'unico a distinguere il linguaggio umano dalle altre forme di linguaggio animale, è reso possibile dall'esistenza di espressioni che permettono di costruire espressioni complesse a partire da espressioni più semplici. Una classe di queste espressioni è quella delle costanti logiche, che in particolare permettono la formazione di enunciati complessi a partire da uno o più enunciati più semplici.

Come a livello sintattico gli enunciati complessi sono ottenuti componendo enunciati più semplici, così a livello semantico il significato degli enunciati complessi dipenderà dal significato dei loro componenti e dal modo della loro composizione. In una teoria del significato del tipo delineato da Dummett, questo principio, detto di *composizionalità*, prende corpo specificando delle regole che permettono di determinare sia le condizioni di asseribilità che le conseguenze delle asserzioni di enunciati complessi in termini delle condizioni di asseribilità e delle conseguenze delle asserzioni dei loro componenti.

Il modello di riferimento per queste regole è rappresentato dai sistemi di deduzione naturale sviluppati negli anni '30 da Gerhard

di "significanza" o di "logicalità" (vale a dire, se espressioni governate da regole che non sono in armonia debbano essere considerate come prive di significato; o come sensate ma non appartenenti al vocabolario logico); né se, eventualmente, debba essere considerata come qualcos'altro.

Gentzen[4]. Nei sistemi di deduzione naturale, ad ogni costante logica sono associati due tipi di regole, dette di introduzione e di eliminazione. Le regole di introduzione per un connettivo sono quelle la cui conclusione è un enunciato logicamente complesso governato dal connettivo in questione; le regole di eliminazione per un connettivo sono quelle in cui un enunciato governato dal connettivo in questione figura tra le premesse della regola. Nel caso della congiunzione, le regole sono le seguenti:

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge \mathrm{I} \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{A} \wedge \mathrm{E}_1 \quad \frac{A \wedge B}{B} \wedge \mathrm{E}_2$$

La regola di introduzione permette di inferire a partire da due enunciati la loro congiunzione, ed esprime quindi il fatto che le condizioni di asseribilità di una congiunzione sono soddisfatte quando lo sono quelle di entrambi i congiunti. Le due regole di eliminazione permettono di inferire da una congiunzione uno dei due congiunti (rispettivamente), ed esprimono quindi il fatto che le conseguenze che possono essere tratte da una congiunzione sono tutte quelle che possono essere ottenuto dall'uno o dall'altro dei due congiunti.

La semplicità delle regole dei sistemi di deduzione naturale li rendono degli strumenti pedagogici formidabili. Sono proprio questi calcoli che vengono insegnati nei corsi introduttivi di logica per avvicinare gli studenti alla disciplina nel modo più intuitivo o – come il loro nome suggerisce – "naturale" possibile. Allo stesso tempo, data la corrispondenza tra regole di introduzione e di eliminazione e i due aspetti della pratica assertoria, i sistemi di deduzione naturale e le loro proprietà non sono oggetto d'interesse solamente per i logici in senso stretto, ma anche per i teorici del significato.

Affinché l'armonia tra i due aspetti della pratica assertoria sia garantita anche nel caso degli enunciati logicamente complessi, le regole di introduzione e di eliminazione che governano le costanti logiche non possono essere scelte arbitrariamente. In particolare, una scelta inopportuna di regole di introduzione e di eliminazione per un connettivo

[4] Cfr. Gentzen, 1935, traduzione inglese, 1969; Prawitz, 1965.

può risultare in una situazione analoga a quella di *boche*. Esemplare in questo senso è il connettivo binario *tonk* proposto da Prior[5], governato dalla seguente coppia di regole di introduzione ed eliminazione:

$$\frac{A}{A\ tonk\ B}\ tonk\mathrm{I} \qquad \frac{A\ tonk\ B}{B}\ tonk\mathrm{E}$$

Come nel caso di *boche,* anche nel caso di *tonk* le conseguenze che possono essere tratte dall'asserzione di un enunciato complesso governato da *tonk* non coincidono con le sue condizioni di asseribilità, e anche in questo caso la disarmonia tra i due aspetti dalla pratica assertoria depriva quest'ultima di razionalità (in presenza di *tonk* è facile mostrare come qualunque enunciato segua da qualsiasi altro).

Come e più che nel caso di *boche,* la forte intuizione che *tonk* sia semanticamente "difettoso" mostra come una collezione di regole di introduzione e di eliminazione per un connettivo non è sempre adatta a determinare il significato di enunciati complessi aventi il connettivo come operatore principale.

Sorge allora la domanda di quale siano le condizioni che collezioni di regole di introduzione e di eliminazione per un connettivo devono soddisfare affinché i due aspetti dell'uso di enunciati logicamente complessi governati dal connettivo in questione siano in armonia. La natura formale delle regole offre la possibilità di rispondere in modo rigoroso a questa domanda, formulando i criteri stessi di armonia per le costanti logiche utilizzando la logica formale.

Nel presente articolo, discuteremo in modo accessibile al lettore non specialista la possibilità di definire una nozione *intensionale* di armonia impiegando la nozione di isomorfismo nella logica proposizionale del secondo ordine. Nel resto dell'introduzione daremo una succinta presentazione della linea argomentativa seguita nell'articolo. In particolare, dopo una breve presentazione di una recente proposta di analisi della nozione di armonia nella logica proposizionale del secondo ordine, chiariremo il senso dell'aggettivo "intensionale" e la strategia generale per ottenere una tale nozione di armonia utilizzando quella di isomorfi-

[5] Cfr. Prior, 1960, pp. 38-39.

smo. Alla nozione di isomorfismo sarà dedicata la Sezione 2, nella quale mostreremo come questa nozione emerge a partire da considerazioni elementari sulla deduzione naturale. Nella Sezione 3 presenteremo in dettaglio una nozione *non-intensionale* di armonia avanzata di recente da Schroeder-Heister[6] utilizzando la logica proposizionale del secondo ordine. Questa sarà il punto di partenza per la definizione di una nozione genuinamente intensionale nella Sezione 4, ottenuta utilizzando risultati tecnici raggiunti dagli autori in recenti lavori che prendono le mosse da considerazioni di natura filosofica sull'*uniformità* delle prove di enunciati quantificati universalmente.

1.1 *Armonia per traduzione al secondo-ordine*

Nel contesto della deduzione naturale, l'armonia è solitamente descritta facendo riferimento all'"equilibrio perfetto" tra le regole di introduzione e le regole di eliminazione dei connettivi della logica proposizionale intuizionista NI (si veda tabella 1).

Tabella 1 Il sistema di deduzione naturale NI:

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}\,\wedge\mathrm{I} \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{A}\,\wedge\mathrm{E}_1 \quad \frac{A \wedge B}{B}\,\wedge\mathrm{E}_2$$

$$\frac{\begin{matrix}[A]\\ B\end{matrix}}{A \supset B}\,\supset\mathrm{I} \qquad\qquad \frac{A \supset B \qquad A}{B}\,\supset\mathrm{E}$$

$$\frac{A}{A \vee B}\,\vee\mathrm{I}_1 \quad \frac{B}{A \vee B}\,\vee\mathrm{I}_2 \qquad\qquad \frac{A \vee B \qquad \begin{matrix}[A]\\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ C\end{matrix}}{C}\,\vee\mathrm{E}$$

$$\frac{}{\top}\,\top\mathrm{I} \qquad\qquad \frac{\bot}{C}\,\bot\mathrm{E}$$

[6] Cfr. Schroeder-Heister, 2014b.

In che cosa consiste però questo "equilibrio perfetto"? Nonostante alcuni tentativi di rispondere precisamente a questa domanda[7], solo di recente una definizione di armonia pienamente formale è stata proposta da Peter Schroeder-Heister.

La proposta di Schroeder-Heister è in breve quella di caratterizzare le collezioni di regole di introduzione e le collezioni di regole di eliminazione con una formula della logica proposizionale intuizionista quantificata NI^2 – il sistema ottenuto estendendo NI con la quantificazione universale su proposizioni governata dalle seguenti regole:

$$\frac{A}{\forall X.A}\,\forall\mathrm{I} \qquad\qquad \frac{\forall X.A}{A\,[C/X]}\,\forall\mathrm{E}$$

La proposta è dunque che due collezioni di regole di introduzione e di eliminazione per un connettivo sono in armonia se e solo se le loro formule caratteristiche sono *interderivabili* in NI^2.

1.2 *Verso un'armonia intensionale*

Benché questa proposta rappresenti un importante, e a lungo atteso, passo avanti nella comprensione dell'armonia, essa rimane per certi versi insoddisfacente. Ciò dipende dal fatto che collezioni di regole che sono interderivabili sono caratterizzate da formule interderivabili. Per esempio, data ΛE_1, la regola ΛE_2 è ovviamente interderivabile con la seguente regola:

$$\frac{A \wedge B \qquad A}{B}\,\wedge\mathrm{E}_2'$$

e le formule $X \wedge Y$ e $X \wedge (X \supset Y)$ – che caratterizzano le collezioni di regole di eliminazione per Λ che consistono, rispettivamente, nelle coppie ΛE_1, ΛE_2 e ΛE_1, $\Lambda E'_2$, – sono anch'esse interderivabili. Per tale ragione, entrambe le coppie di regole soddisfano i requisiti del criterio

[7] Cfr. Belnap, 1962, pp. 130-134; Tennant, 1962; Tennant, 1978; Read, 2010.

di Schroeder-Heister qualificandosi come in armonia con ΛI, Intuitivamente, la coppia ΛE_1, $\Lambda E'_2$, sembra essere “meno” in armonia con ΛI della coppia ΛE_1, ΛE_2.

Questo fatto ha indotto il secondo autore del presente articolo[8] a considerare il criterio proposto da Schroeder-Heister come una descrizione di una nozione debole di armonia e a invocare un rafforzamento della definizione capace di catturare una nozione di armonia più forte, sulla base della quale solo la coppia ΛE_1, ΛE_2 (e non la coppia ΛE_1, $\Lambda E'_2$) sia qualificata come in armonia con ΛI. Ciò che distingue una potenziale nozione più forte di armonia – non solo dall'armonia debole di Schroeder-Heister ma anche da altre proposte come quelle di Belnap e Tennant[9] – è la sua natura intensionale: il suo essere in grado di distinguere tra collezioni di regole che sono indistinguibili in termini di derivabilità.

1.3 *Armonia via isomorfismo*

Un modo ovvio per ottenere una nozione di armonia più forte di quella di Schroeder-Heister sarebbe quello di richiedere che la formula caratteristica della collezione di regole di introduzione sia *la stessa* della collezione di regole di eliminazione. Questo però vorrebbe dire richiedere troppo. È vero che sulla base di un simile rafforzamento la coppia ΛE_1, $\Lambda E'_2$ non risulterebbe in armonia con ΛI. Tuttavia, neanche VE risulterebbe in armonia con la coppia VI_1, VI_2: la formula caratteristica della prima (si veda sotto per una definizione precisa) è $\forall X\ ((Y \supset X)\ \Lambda\ (Z \supset X)) \supset X$ mentre quella della seconda è $Y \vee Z$, ovvero, due NI^2 formule diverse, anche se interderivabili. In altre parole, chi adottasse una tale nozione di armonia (che denominiamo *armonia rigida*) dovrebbe negare che le regole della disgiunzione siano armoniose.

Un compromesso tra l'interderivabilità e l'identità è fornito dalla nozione di isomorfismo tra formule elaborata nel contesto dalla teoria della dimostrazione categoriale e dello studio del lambda-calcolo tipato.

[8] Si veda Tranchini, 2016a.
[9] Cfr. Belnap, 1962; Tennant, 1978.

Ispirato dal lavoro di Došen[10], il secondo autore[11] ha impiegato la nozione di isomorfismo per chiarire il senso esatto in cui le regole debolmente armoniose sono da considerare dannose, sottolineando, di conseguenza, la rilevanza dell'isomorfismo per una caratterizzazione dell'armonia.

Seppur in maniera solamente programmatica, Schoreder-Heister[12] ha considerato diverse opzioni per definire l'armonia impiegando l'isomorfismo. Tra queste, vi è quella di definire una nozione di armonia forte sostituendo nella definizione di armonia debole la nozione di interderivabilità con quella di isomorfismo. Questa proposta è stata tuttavia ritenuta inappropriata e abbandonata, in conseguenza del fatto che – almeno *prima facie* – $\forall X\, ((Y \supset X) \wedge (Z \supset X)) \supset X$ e $Y \vee Z$ non sono isomorfe in NI^2.

1.4 *Contributo principale*

L'isomorfismo di due formule in un dato sistema non è una nozione assoluta, ma è relativo alla scelta di una nozione di identità delle prove (vale a dire, di una teoria equazionale sulle derivazioni del sistema). A partire da risultati consolidati nella semantica categoriale per la logica del secondo ordine, in recenti lavori gli autori hanno introdotto una teoria equazionale più forte di quella abituale impiegando una classe di equazioni denominate ε-equazioni[13]. La classe degli isomorfismi relativi alle ε-equazioni è sufficientemente ricca da permettere di superare il problema menzionato in precedenza (in particolare, $\forall X\, ((Y \supset X) \wedge (Z \supset X)) \supset X$ e $Y \vee Z$ sono formule ε-isomorfe in NI^2). Inoltre, nonostante la teoria equazionale generata dalle ε-equazioni (insieme alle conversioni standard per NI^2) non sia massimale sull'intero sistema NI^2, essa è la massima teoria equazionale di alcuni frammenti deboli di NI^2. Tra questi frammenti vi è quello le cui formule corrispondono

[10] Cfr., ad esempio, Došen, 2003.
[11] Si veda ancora Tranchini, 2016a.
[12] Cfr. Schroeder-Heister, 2016.
[13] Si vedano Tranchini, Pistone, e Petrolo, 2019; Pistone, Tranchini e Petrolo, 2019, in revisione; Pistone e Tranchini, 2021.

alla “codifica” delle collezioni di regole di introduzione e di eliminazione per i connettivi proposizionali. In questo articolo, presentiamo in maniera informale la nozione di identità delle prove catturata dalle ε-equazioni e dimostriamo come i risultati ottenuti riguardo a questa nozione forniscono una base solida per una spiegazione intensionale dell’armonia a metà strada tra l’armonia debole e l’armonia rigida.

2. Riduzioni, espansioni e isomorfismo

Il “perfetto equilibrio” tra regole di introduzione e regole di eliminazione che la nozione di armonia intende catturare può dirsi ottenuto quando

> ciò che può essere inferito da un enunciato logicamente complesso per mezzo delle regole di eliminazione per il suo connettivo principale è *niente di più* e *niente di meno* di ciò che si è dovuto stabilire al fine di inferire quell’enunciato logicamente complesso utilizzando le *regole di introduzione per il suo connettivo principale*.

Quando le regole per un connettivo sono in armonia, è possibile descrivere due diversi tipi di configurazioni deduttive.

Le configurazioni del primo tipo sono quelle che danno luogo a *occorrenze di formule massimali*, ovvero, a occorrenze di formule che sono le premesse maggiori di un’applicazione di una regola di eliminazione (vale a dire, le premesse di cui il connettivo principale è quello da eliminare) e la conclusione di un’applicazione di una delle regole di introduzione. Prawitz[14] ha definito delle operazioni su questo tipo di derivazioni, dette *riduzioni*. Le riduzioni permettono di riscrivere una derivazione in un’altra in modo da eliminare una singola occorrenza massimale (sebbene la sua eliminazione potrebbe generare nuove occorrenze massimali): nel caso della congiunzione abbiamo le due riduzioni seguenti:

[14] Cfr. Prawitz, 1965.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathfrak{D}_1\\ A\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\mathfrak{D}_2\\ B\end{matrix}}{A\wedge B}\wedge\mathrm{I}}{A}\wedge\mathrm{E}_1 \quad \textit{si riduce a} \quad \begin{matrix}\mathfrak{D}_1\\ A\end{matrix} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathfrak{D}_1\\ A\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\mathfrak{D}_2\\ B\end{matrix}}{A\wedge B}\wedge\mathrm{I}}{B}\wedge\mathrm{E}_2 \quad \textit{si riduce a} \quad \begin{matrix}\mathfrak{D}_2\\ B\end{matrix}$$

Prawitz ha dimostrato come – applicando in successione riduzioni in un determinato ordine – qualsiasi NI-derivazione data può essere trasformata in una derivazione in forma *normale*, in una derivazione senza alcuna occorrenza massimale.

Le configurazioni del secondo tipo sono invece quelle nelle quali le premesse delle applicazioni di regole di introduzione sono state ottenute applicando le corrispondenti regole di eliminazione. Prawitz ha definito delle operazioni che, in un certo senso, si presentano come il duale delle riduzioni, dette *espansioni immediate*. Nel caso della congiunzione, l'espansione ha la seguente forma:

$$\begin{matrix}\mathfrak{D}\\ A\wedge B\end{matrix} \quad \textit{si espande in} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathfrak{D}\\ A\wedge B\end{matrix}}{A}\wedge\mathrm{E}_1 \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathfrak{D}\\ A\wedge B\end{matrix}}{B}\wedge\mathrm{E}_2}{A\wedge B}\wedge\mathrm{I}$$

Prawitz ha inoltre dimostrato come applicando una sequenza di espansioni è possibile trasformare qualsiasi derivazione normale in NI in una derivazione in forma *normale lunga*, ovvero in una derivazione in cui tutte le occorrenze di formule minimali (quelle che sono la conclusione di una regola di eliminazione e la premessa di una regola di introduzione) sono atomiche.

La riduzione e l'espansione associate alle regole dell'implicazione sono le seguenti:

$$\dfrac{(u)\dfrac{\begin{matrix}\overset{u}{[A]}\\ \mathfrak{D}\\ B\end{matrix}}{A\supset B}\supset\mathrm{I} \qquad\qquad \begin{matrix}\mathfrak{D}'\\ A\end{matrix}}{B}\supset\mathrm{E} \quad \textit{si riduce a} \quad \begin{matrix}\mathfrak{D}'\\ [A]\\ \mathfrak{D}\\ B\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}\mathfrak{D}\\ A\supset B\end{matrix} \quad \textit{si espande in} \quad (u)\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathfrak{D}\\ A\supset B\end{matrix}\qquad\qquad \overset{u}{A}}{B}\supset\mathrm{E}}{A\supset B}\supset\mathrm{I}$$

Alla luce della corrispondenza Curry-Howard tra le derivazioni nel frammento implicazionale di NI e i termini del λ-calcolo semplicemente tipato, queste operazioni di riscrittura su derivazioni corrispondono (rispettivamente) alle β-riduzioni e alle η-espansioni sui λ-termini:

$$(\lambda x.\,t)s \overset{\beta}{\rightsquigarrow} t[s/x] \qquad t \overset{\eta}{\rightsquigarrow} \lambda x.\,tx$$

Come nel λ-calcolo anche nella deduzione naturale le riduzioni e le espansioni possono essere utilizzate per definire una relazione di equivalenza sulle derivazioni. Due derivazioni $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{D}'$ sono equivalenti se e solo se è possibile ottenere l'una dall'altra applicando a $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{D}'$ o a una delle loro sottoderivazioni un numero finito di (β-)riduzioni, (η-)espansioni e delle loro operazioni inverse (indichiamo il fatto che $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{D}'$ sono βη-equivalenti con $\mathfrak{D} \overset{\beta\eta}{\equiv} \mathfrak{D}'$, e più in generale, data una relazione di equivalenza E, indichiamo la loro E-equivalenza con $\mathfrak{D} \overset{E}{\equiv} \mathfrak{D}'$). Prawitz ha osservato[15] – facendo sua una proposta di Martin Löf – che, come i λ-termini possono essere considerati modi differenti di rappresentare la stessa funzione, derivazioni equivalenti possono essere considerate rappresentazioni linguistiche differenti della stessa proova (intendendo con prove delle entità astratte caratterizzate informalmente dalle clausole della cosiddetta Interpretazione-BHK[16]).

Data una relazione di equivalenza tra derivazioni, è possibile definire una relazione di equivalenza su formule in generale più stretta dell'interderivabilità; a questa nozione viene abitualmente fatto riferimento con il termine *isomorfismo*. Sia E una relazione di equivalenza su derivazioni di un sistema di deduzione naturale S. Due formule sono E-isomorfe (in simboli A $\overset{E}{\simeq}$ B) sse

- sono interderivabili in S, ovvero se esistono due S-derivazioni $\mathfrak{D}_1$ e $\mathfrak{D}_2$, rispettivamente, di A da B e di B da A;
- e le composizioni delle due derivazioni sono E-equivalenti alle derivazioni che consistono solamente delle assunzioni di A e di B, rispettivamente:

[15] Cfr. Prawitz, 1971.
[16] Si vedano Tranchini, 2012; Tranchini, 2016a; Tranchini, 2019.

$$B \overset{E}{\equiv} \begin{array}{c}[B]\\ \mathfrak{D}_1\\ [A]\\ \mathfrak{D}_2\\ B\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A]\\ \mathfrak{D}_2\\ [B]\\ \mathfrak{D}_1\\ A\end{array} \overset{E}{\equiv} A$$

- La derivazione che consiste dell'assunzione di una formula A può essere considerata come ciò che rappresenta la funzione d'identità sull'insieme delle prove di A. La seconda condizione della definizione di isomorfismo può quindi essere espressa affermando che le due derivazioni $\mathfrak{D}_1$ e $\mathfrak{D}_2$ rappresentano due funzioni *inverse* da prove di B a prove di B e viceversa. Questo a sua volta significa che l'insieme delle prove di B e l'insieme delle prove di B sono tra loro in corrispondenza biunivoca.
-

Tipici esempi di formule βη-isomorfe in NI sono coppie di formule del tipo $(A \wedge B) \wedge C$ e $A \wedge (B \wedge C)$, o $(A \wedge B) \supset C$ e $A \supset (B \supset C)$, mentre tipici esempi di formule interderivabili ma non βη-isomorfe sono coppie di formule del tipo A e $A \wedge$ o $A \wedge B$ e $A \wedge (A \supset B)$.

La nozione di isomorfismo è stata proposta[17] come un'analisi formale della nozione informale di sinonimia, ovvero di identità di significato. Intuitivamente, l'interderivabilità è una condizione necessaria, ma non sufficiente per la sinonimia. Da una prospettiva inferenzialista, le formule isomorfe possono essere considerate come sinonime nel senso che:

> queste si comportano all'interno delle prove esattamente nella stessa maniera: componendo, possiamo sempre estendere prove che coinvolgono una di queste, o come assunzione o come conclusione, a prove che coinvolgono l'altra, cosicché niente viene perso e niente viene guadagnato. C'è sempre un modo per tornare indietro. Componendo ulteriormente con le inverse, ritorniamo alle prove originali[18].

Chiaramente, una condizione necessaria affinché una nozione di E-isomorfismo non collassi in quella di interderivabilità è che la re-

17 Si veda, in particolare, Došen, 2003.
18 Ivi, p. 498.

lazione di equivalenza E utilizzata nella definizione non sia triviale (vale a dire, deve esistere una formula A e due derivazioni di A che appartengono a classi di equivalenza distinte). In particolare, se due qualsiasi derivazioni $\mathfrak{D}_1$ e $\mathfrak{D}_2$ di una qualsiasi formula A da sé stessa fossero E-equivalenti, la seconda condizione dell'E-isomorfismo sarebbe soddisfatta in modo vacuo.

La nozione di βη-equivalenza (e, conseguentemente, di βη-isomorfismo) svolge un ruolo caratteristico in NI, poiché la βη-equivalenza è la massima relazione di equivalenza non triviale definibile sulle derivazioni in NI. Come Došen[19] e Widebäck[20] hanno sostenuto, la massimalità di una relazione di equivalenza E sulle derivazioni di un sistema S può essere considerata come una giustificazione a sostegno dell'affermazione che questo sia il modo *corretto* di analizzare la nozione di identità delle prove sottese a S.

La βη-equivalenza e il βη-isomorfismo per il frammento-$\{\supset, \wedge, \top\}$ di NI, sono nozioni che possono considerarsi pienamente comprese: la decidibilità della βη-equivalenza è un'immediata conseguenza della normalizzazione e della confluenza della βη-riduzione nel frammento-$\{\supset, \wedge\}$, e la sua massimalità è stata stabilita da Statman[21], da Došen e Petric[22] e da Widebäck[23]. Inoltre, la relazione di βη-isomorfismo in questo frammento è decidibile ed è stata completamente assiomatizzato da Solov'ev [24].

L'estensione di questi risultati a frammenti di linguaggio più ricchi si è tuttavia dimostrata difficile. In presenza della disgiunzione la decidibilità e la massimalità della βη-equivalenza è stata stabilita solo recentemente da Scherer[25], mentre la decidibilità della relazione di βη-isomorfismo è stata dimostrata da Ilik[26]. In questo caso la difficoltà era dovuta alla forma della η-espansione per la disgiunzione:

[19] Cfr. *ibidem*.
[20] Cfr. Widebäck, 2001.
[21] Cfr. Statman, 1983.
[22] Cfr. Došen e Petric, 2001.
[23] Cfr. Widebäck, 2001.
[24] Solov'ev, 1983.
[25] Cfr. Scherer, 2017.
[26] Cfr. Ilik, 2014.

$$
\begin{array}{c} \mathfrak{D}' \\ [A \vee B] \\ \mathfrak{D}'' \\ C \end{array}
\quad \textit{si espande in} \quad
\dfrac{\begin{array}{c} \mathfrak{D}' \\ A \vee B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overset{n}{A} \\ \hline [A \vee B] \end{array} \vee \mathrm{I}_1 \!\!\!\begin{array}{c} \\ \mathfrak{D}'' \\ C \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overset{m}{B} \\ \hline [A \vee B] \end{array} \vee \mathrm{I}_2 \!\!\!\begin{array}{c} \\ \mathfrak{D}'' \\ C \end{array}}{C} \vee \mathrm{E}(n,m)
$$

(dove n e m sono “fresche” per $\mathfrak{D}'$)

la quale può essere considerata come la composizione della forma più semplice di espansione proposta da Prawitz

$$
\begin{array}{c} \mathfrak{D} \\ A \vee B \end{array}
\quad \textit{si espande in} \quad
\dfrac{\begin{array}{c} \mathfrak{D} \\ A \vee B \end{array} \qquad \dfrac{\overset{n}{A}}{A \vee B} \vee \mathrm{I}_1 \qquad \dfrac{\overset{m}{B}}{A \vee B} \vee \mathrm{I}_2}{A \vee B} \vee \mathrm{E}(n,m)
$$

(dove n e m sono "$fresche^1$"per $\mathfrak{D}$)

e di una generalizzazione delle conversioni permutative impiegate per stabilire la proprietà della sottoformula delle derivazioni normali in NI[27]:

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\begin{array}{c} \mathfrak{D} \\ A \vee B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overset{n}{[A]} \\ \mathfrak{D}_1 \\ C \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overset{m}{[B]} \\ \mathfrak{D}_2 \\ C \end{array}}{[C]} \vee \mathrm{E}\,(n,m) \\ \mathfrak{D}_3 \\ D
\end{array}
\quad \rightsquigarrow_{\gamma^+} \quad
\dfrac{\begin{array}{c} \mathfrak{D} \\ A \vee B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overset{n}{[A]} \\ \mathfrak{D}_1 \\ [C] \\ \mathfrak{D}_3 \\ D \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overset{m}{[B]} \\ \mathfrak{D}_2 \\ [C] \\ \mathfrak{D}_3 \\ D \end{array}}{D} \vee \mathrm{E}\,(n,m)
$$

Mentre la massimalità e la decidibilità della βη-equivalenza valgono anche in presenza di ⊥ (quindi per il linguaggio completo di NI), la decidibilità dell’isomorfismo in presenza di ⊥ è ancora un problema aperto.

[27] Per una discussione di questo tema si vedano Tranchini, 2016b; Tranchini, 2018.

3. L'armonia debole e i suoi limiti

Per poter definire formalmente l'armonia, un'utile mossa preliminare è quella di identificare le regole – normalmente considerate come schemi meta-linguistici – con le espressioni di un linguaggio-oggetto del tipo appropriato. Riformulando leggermente le intuizioni di Schroeder-Heister[28], proponiamo di identificare le *regole* di un sistema di deduzione naturale arbitrario con una classe particolare di *formule* del linguaggio del terzo ordine che estende il linguaggio di NI con

- la quantificazione universale su proposizioni
- e, per ogni *n*, un insieme numerabile di variabili n-arie per connettivi (che verranno indicate con $\dagger^n$, possibilmente con pedici e altri simboli *ad hoc*), cosicché se A1, …, A_n sono formule e $\dagger n$ è una variabile n-aria per connettivi, allora anche $\dagger n$ (A1, …, A_n) è una formula (il pedice $_n$ che indica l'arietà di † sarà per lo più omesso).

Più precisamente, dato un insieme numerabile di variabili proposizionali (che verranno indicate con X, Y, Z possibilmente con pedice) e un insieme numerabile di variabili per connettivi come sopra, definiamo l'insieme delle formule $\mathcal{L}$ (che verranno indicate con A, B, C possibilmente con pedice) attraverso la seguente grammatica[29]:

$$\mathcal{L} ::= X \mid \top \mid \bot \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid A \supset B \mid \dagger^n (A_1, \ldots, A_n) \mid \forall X.A$$

(indicheremo con $\mathcal{L}^2$ il frammento di $\mathcal{L}$ nel quale sono assenti le variabili per i connettivi, e con $\mathcal{L}^{2\supset}$ il frammento di $\mathcal{L}^2$ nel quale sono assenti tutti i connettivi eccetto $\supset$).

L'idea di identificare una regola con una formula potrebbe apparire a prima vista strana, pur essendo in realtà molto naturale. Le regole

[28] Cfr. Schroeder-Heister, 2014a; Schroeder-Heister, 2014b.

[29] In altre parole, stiamo lavorando nel frammento del linguaggio del terzo ordine del sistema F_1 di Girard nel quale le variabili per i connettivi occorrono solo libere; Cfr. Girard, 1986. Pertanto, il sistema di deduzione naturale su $\mathcal{L}$ consiste delle regole del sistema di deduzione naturale NI_2 del secondo ordine, ovvero dell'estensione del sistema F di Girard con le regole primitive per T, $\bot$, $\wedge$ e V.

VI_1 e VI_2 e VE di NI possono, per esempio, essere identificate con le seguenti $\mathcal{L}$-formule:

$$(\vee i_1) \quad \forall XY. X \supset \dagger\,(X,Y)$$

$$(\vee i_2) \quad \forall XY. Y \supset \dagger\,(X,Y)$$

$$(\vee e) \quad \forall XYZ. \big(\dagger\,(Y,Z) \wedge (Y \supset X) \wedge (Z \supset X)\big) \supset X$$

Osserviamo che i connettivi proposizionali standard e il quantificatore universale sono utilizzati per "codificare" le diverse "caratteristiche strutturali" implicite nelle regole della deduzione naturale (la congiunzione "codifica" la molteplicità delle premesse, l'implicazione "codifica" il passaggio dalle premesse alla conclusione, e la quantificazione universale "codifica" la natura schematica delle regole). Siccome stiamo utilizzando $\mathcal{L}$ come un meta-linguaggio per indagare la nozione di regola, trascurando il fatto che le regole possono essere associate ad uno specifico elemento del vocabolario, abbiamo sostituito la disgiunzione delle regole di NI con la variabile (binaria) per i connettivi †. In questo modo, la congiunzione delle tre formule precedenti (Vi_1), (Vi_2) e (Ve) è una $\mathcal{L}$-formula con una variabile libera per connettivi che possiamo considerare come esprimente il predicato "essere una disgiunzione". In modo analogo, possiamo identificare la regola $\supset E$ con la formula $\forall$XY. († (Y, X) Λ X) $\supset$ Y e la regola ΛI con la formula $\forall$XY. (X Λ Y) $\supset$ † (X, Y).

In generale, chiamiamo *formule strutturali* (che verranno indicate con S, S_1, …) quelle formule costruite utilizzando solamente variabili proposizionali e variabili per connettivi, cioè l'insieme delle formule strutturali è il sottoinsieme $\mathcal{L}2$ di $\mathcal{L}$ definito come

$$\mathcal{L}^s ::= X \mid \; \dagger^n\,(S_1, \dots S_n)$$

e chiamiamo *formule-regole* (o semplicemente regole, che verranno indicate con R, R_1, mentre il loro insieme verrà indicato con $\mathcal{L}^r$) le $\mathcal{L}$ -formule costruite usando la seguente grammatica:

$$\mathcal{L}^r ::= S \mid \forall \vec{X} \left(\bigwedge_{i=1}^{n} R_i \supset S \right)$$

dove $\forall \vec{X} = \forall X_1, \ldots, \forall X_n$ se $n > 0$ o è vuoto altrimenti, e $\Lambda_{j=1}^{n} A_j \Lambda (A_2 \Lambda (\ldots \Lambda A_n) \ldots)$ se $n > 0$ o $\Lambda_j^n A_j = \top$ altrimenti. Il *livello di una regola R*, indicato con $l\,(R)$, è il numero massimo di implicazioni annidate in $\mathcal{L}$, cosicché $l\,(S) = 0$ e $l\,(\forall \vec{X}(\Lambda_{j=1}^{n} R_j \supset S)) = \max\,(l\,(R_j) + 1$.

Una *regola di introduzione* per un connettivo n-ario † è una regola della forma

$$\forall \vec{X} \left(\bigwedge_{i=1}^{n} R_i \supset \dagger\, (\vec{X}) \right) \qquad (INTRO)$$

che soddisfa le due condizioni seguenti:

- in ogni R_j non occorrono né il quantificatore universale né le variabili per connettivi;
- nessuna variabile proposizionale occorre libera (ovvero, le uniche variabili proposizionali che occorrono in ogni R_j sono tra quelle in $\vec{X}$).

Se R è una regola di introduzione per † della forma precedente, definiamo il *contenuto di* R (in simboli C (R)) la $\mathcal{L}2$-formula $\Lambda_{j=1}^{n} R_1$. Se $\mathfrak{I}\dagger = (R_{I1}, \ldots, R_{ImI})$ è una lista di regole di introduzione per †, definiamo il *contenuto di* $\mathfrak{I}\dagger$ (in simboli $C\mathfrak{I}\dagger$ la $\mathcal{L}2$-formula $V_{j=1}^{m_j} C\,(R_{Ij})$, dove $V_{j=1}^{n} A_j = A_1 \Lambda (A_2 \Lambda (\ldots, V A_n)\ldots)$ se $n >= 0$ o $V_{j=1}^{n} A_j = \perp$ altrimenti.

Una *regola di eliminazione* per un connettivo n-ario † è una regola della forma

$$\forall X \forall \vec{Y} \forall \vec{X} \left(\left(\dagger\, (\vec{X}) \wedge \bigwedge_{1}^{n} R_i \right) \supset X \right) \qquad (ELIM)$$

che soddisfa le tre condizioni seguenti:

- in ogni R_j non occorrono né il quantificatore universale né le variabili per connettivi;
- nessuna variabile proposizionale occorre libera (ovvero, $\vec{Y}$ contiene tutte le variabili proposizionali che occorrono in una qualsiasi R_j a parte X e quelle in $\vec{X}$);

- se X occorre in una qualsiasi R_j, occorre nella posizione più a destra[30].

Se R è una regola di eliminazione per † del tipo precedente, il suo *contenuto* C (R) è la $\mathcal{L}2$-formula $\forall X \forall \vec{Y} (\Lambda^{n}_{j=1} R_j \supset X)$. Se $\mathfrak{E}$ † = (R_{E1}, …, R_{EmE}) è una lista di regole di eliminazione per †, definiamo il *contenuto* di $\mathfrak{I}$† (in simboli C ($\mathfrak{E}$ †)) la $\mathcal{L}2$-formula $\Lambda^{m_E}_{k=1} C(R_{EK})$.

Supponiamo ora di avere a disposizione una lista $\mathfrak{I}$† di regole di introduzione e una lista $\mathfrak{I}$† di regole di eliminazione per un connettivo n-ario †. Possiamo affermare che le due collezioni di regole sono in *armonia debole* se e solo se in NI_2 vale la seguente[31]:

$$\mathcal{C}(\mathfrak{I}\dagger) \dashv\vdash \mathcal{C}(\mathfrak{E}\dagger)$$

Come il lettore può verificare, le collezioni di introduzioni e di eliminazioni che consistono delle regole di NI sono in armonia debole. Prawitz[32] e Schroeder-Heister[33] hanno inoltre proposto un semplice metodo per costruire una collezione di regole di eliminazione debolmente armoniosa "invertendo" una collezione di regole di introduzione per uno specifico connettivo †. In particolare, sia $\mathfrak{I}$† una sequenza di diverse regole di introduzione *m* della forma precedente, ovvero $\mathfrak{I}$† = (R_1, …, R_m) con $Rj = \forall\vec{X}(\Lambda^{nj}_{j=1} R_{ij} \supset \dagger (\vec{X}))$ per tutti i $1 \leq j \leq m$. La collezione di regole di eliminazione canoniche associata a $\mathfrak{I}$† proposta da Prawitz e Schroeder-Heister (che verrà indicata con PSH ($\mathfrak{I}$†)) è la lista che contiene un solo elemento, vale a dire la regola di eliminazione $X\forall X \forall \vec{X}. (\dagger (\vec{X}) \land \Lambda^{m}_{j=1} (\Lambda^{nj}_{j=1} Rij \supset X)) \supset X$ che noi indichiamo con $\dagger E_{PSH (\mathcal{J}\dagger)}$. Le collezioni di regole di introduzione $\mathfrak{I}$† e le collezioni di regole di eliminazione PSH ($\mathfrak{I}$†) sono in armonia debole poiché in NI^2 il contenuto di $\mathfrak{I}$† è interderivabile con quello di PSH ($\mathfrak{I}$†) (ovvero, con il contenuto di $\dagger E_{PSH (\mathcal{J}\dagger)}$):

[30] Ad eccezione di quest'ultima condizione, le definizioni delle regole di introduzione ed eliminazione seguono quelle presentate da Schroeder-Heister, 2014b. La ragione per considerare quest'ultima restrizione verrà discussa nella conclusione della sezione 4.

[31] Osserviamo che le due formule non contengono nessuna occorrenza delle variabili per connettivi, e appartengono quindi propriamente al sistema NI_2 del secondo ordine; cfr. n. 29.

[32] Cfr. Prawitz, 1979.

[33] Cfr. Schroeder-Heister, 1981; Schroeder-Heister, 1984; Schroeder-Heister, 2014a.

$$\bigvee_{J=1}^{m}\bigwedge_{i=1}^{n_j} R_{ji} \qquad \dashv\vdash \qquad \forall X.\left(\bigwedge_{j=1}^{m}\left(\bigwedge_{i=1}^{n_j} R_{ji}\supset X\right)\right)\supset X$$

Come dimostra Schroeder-Heister[34], la direzione da sinistra a destra dell'armonia (denominata criterio di "conservatività") garantisce che l'aggiunta delle regole per † (intese come schemi meta-linguistici) a un dato sistema di deduzione naturale N produce un'estensione conservativa di N; mentre la direzione da destra a sinistra dell'armonia garantisce l'unicità di † (dove la conservatività e l'unicità sono intese nel senso di Belnap[35]).

Come mostrato da Schroeder-Heister[36], è possibile definire delle procedure di riduzione per cancellare applicazioni consecutive di una regola di introduzione per un connettivo seguite immediatamente da applicazioni della regola di eliminazione di Prawitz e Schroeder-Heister; e similmente per le espansioni[37]. In realtà, le riduzioni e le espansioni sono disponibili non solo quando le regole di eliminazione seguono lo schema di Prawitz e Schroeder-Heister: se due collezioni di regole di introduzione e di eliminazione sono in armonia debole, allora è possibile dotarle anche di espansioni e riduzioni. Una formalizzazione di questa affermazione dipende dalla descrizione rigorosa del tipo di operazioni che possono essere qualificate come riduzioni ed espansioni. Qui ci limiteremo a uno schizzo informale di come le riduzioni e le espansioni per regole debolmente armoniose possono essere ottenute da quelle associate alla "coppia canonica", composta da una collezione di regole di introduzione e dalla collezione di regole di eliminazione proposta da Prawitz e Schroeder-Heister, e alla discussione di qualche esempio.

Osserviamo innanzitutto che, se una collezione di regole di introduzione $\mathfrak{I}\dagger$ e una collezione di regole di eliminazione $\mathfrak{E}\dagger = (R_1, \ldots, R_m)$ sono in armonia debole, allora il contenuto di $\mathfrak{E}$ è interderivabile con il

[34] Cfr. Schroeder-Heister, 2014b.
[35] Cfr. Belnap, 1962.
[36] Cfr. Schroeder-Heister, 1981.
[37] Cfr. Tranchini, 2016b.

contenuto della regola di eliminazione di Prawitz e Schroeder-Heister, e pertanto il contenuto di ogni regola di eliminazione in $\mathfrak{E}\dagger$ è derivabile da quello di † $E_{PSH\,(\mathfrak{I}\dagger)}$ Da ogni possibile modo di derivare il contenuto di una qualsiasi delle regole R_j in $\mathfrak{E}\dagger$ dal contenuto di † $E_{PSH\,(\mathfrak{I}\dagger)}$, è possibile "estrarre" una procedura di riduzione per eliminare applicazioni consecutive di una qualsiasi regola di introduzione in $\mathfrak{I}\dagger$ seguita immediatamente da R_j. Inoltre, dalla derivazione del contenuto di † $E_{PSH\,(\mathfrak{I}\dagger)}$ dal contenuto di $\mathfrak{E}\dagger$, è possibile "estrarre" un'espansione per le collezioni di regole di $\mathfrak{I}\dagger$ e $\mathfrak{E}\dagger$.

Consideriamo per esempio la collezione di regole di introduzione che consiste semplicemente di $\wedge$I e la collezione "deviante" di regole di eliminazione che consiste di $\wedge E_1$ e $\wedge E'_2$ discussa nell'introduzione. Possiamo ovviamente definire la seguente riduzione per $\wedge E'_2$ e la seguente espansione:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}_1\\ A\end{array} \quad \begin{array}{c}\mathfrak{D}_2\\ B\end{array}}{A\wedge B}\wedge \mathrm{I} \qquad \begin{array}{c}\mathfrak{D}'\\ A\end{array}}{B}\wedge \mathrm{E}'_2 \qquad \textit{si riduce a} \qquad \begin{array}{c}\mathfrak{D}_2\\ B\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\mathfrak{D}\\ A\wedge B\end{array} \qquad \textit{si espande in} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}\\ A\wedge B\end{array}}{A}\wedge \mathrm{E}_1 \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}\\ A\wedge B\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}\\ A\wedge B\end{array}}{A}\wedge \mathrm{E}_1}{B}\wedge \mathrm{E}'_2}{A\wedge B}\wedge \mathrm{I}$$

Utilizzando queste trasformazioni è possibile dimostrare – modificando opportunamente le dimostrazioni standard di Prawitz – un teorema di normalizzazione e l'atomizzazione delle formule minimali nelle derivazioni normali per il sistema di deduzione naturale NI' ottenuto sostituendo $\wedge E_2$ con la regola deviante $\wedge E'_2$ (dai quali seguono i risultati di conservatività e unicità per la congiunzione governata da queste regole).

Come abbiamo accennato nell'introduzione, esistono però delle ragioni per qualificare come debole la nozione di armonia così caratterizzata, e per cercare un criterio più stringente in grado di catturare una nozione più forte di questo concetto.

Il problema con l'armonia debole è che sebbene sia possibile dotare regole debolmente armoniose con riduzioni ed espansioni, la risultante nozione di equivalenza tra derivazioni potrebbe far collassare la nozione di isomorfismo su quella di interderivabilità.

Il secondo autore[38] ha considerato la seguente collezione di regole debolmente armoniose:

$$\frac{A \natural B \qquad A}{B}\,\natural \mathrm{E}_1$$

$$\frac{\begin{matrix}[A] & [B] & \\ B & A & A\end{matrix}}{A \natural B}\,\natural I \qquad\qquad \frac{A \natural B \qquad B}{A}\,\natural \mathrm{E}_2$$

$$\frac{A \natural B}{B}\,\natural \mathrm{E}_3$$

Nonostante l'incongruenza tra la terza premessa dell'introduzione e la conclusione della terza eliminazione, non è difficile ideare tre riduzioni e un'espansione anche per queste regole. Tuttavia, è possibile stabilire che due qualsiasi derivazioni di una qualunque formula A da sé stessa appartengono alla stessa classe di equivalenza prodotta da queste operazioni. Da ciò segue immediatamente che due qualsiasi derivazioni chiuse della stessa formula sono equivalenti. Quindi, malgrado le regole siano debolmente armoniose e conservative nel senso di Belnap (ovvero, rispetto alla derivabilità), queste non sono conservative rispetto all'identità delle prove. Sia S' il risultato dell'estensione di un sistema S (che include le regole per $\supset$) con le regole per $\natural$, e sia E' la più piccola relazione di equivalenza sulle derivazioni di S' che estende la relazione di equivalenza E sulle derivazioni di S (la quale è chiusa sotto la riduzione per $\supset$) ed è chiusa sotto le riduzioni e le espansioni per $\natural$. Per una qualsiasi coppia di derivazioni chiuse $\mathfrak{D}_1$ e $\mathfrak{D}_2$ di S' abbiamo che $\mathfrak{D}_1 \overset{E'}{\equiv} \mathfrak{D}_2$. Perciò, se E non è triviale, E' è un'estensione non-conservativa di E, di fatto un'estensione non-conservativa triviale nella quale due derivazioni qualsiasi (della stessa formula) sono equivalenti. Considerazioni simili si applicano all'isomorfismo. La nozione

38 Cfr. *ibidem.*

di isomorfismo relativa alla teoria equazionale E’ è triviale nel senso che due qualsiasi formule interderivabili vengono qualificate come E’-isomorfe. Anche se la nozione di E-isomorfismo non è triviale (ovvero, anche se ci sono formule interderivabili che non sono E-isomorfe), la nozione di E’ -isomorfismo è triviale. Possiamo pertanto affermare che le regole debolmente armoniose sono inaccettabili poiché la loro introduzione in un sistema ha come conseguenza quella di cancellare le differenze di significato.

4. Armonia forte via isomorfismo

Come ricordato nell’introduzione, una più stretta relazione tra regole di introduzione ed eliminazione potrebbe essere ottenuta sostituendo nella definizione di armonia debole di Schroeder-Heister l’interderivabilità con l’identità sintattica. La nozione ottenuta potrebbe essere denominata *armonia rigida* poiché, in base a questa, non solo le regole di introduzione standard per la congiunzione e la sua collezione deviante di regole di eliminazione non sarebbero in armonia rigida, ma neanche le due regole di introduzione standard della disgiunzione e la sua regola di eliminazione standard verrebbero qualificate come armoniose. Ci si potrebbe allora aspettare che un compromesso tra l’armonia debole e l’armonia rigida – una nozione di *armonia forte* – potrebbe essere ottenuto impiegando nella definizione di questa nozione l’isomorfismo invece della derivabilità. A prima vista, non sembra però che questa mossa possa portare molto lontano. Se l’armonia forte venisse definita utilizzando il $\beta\eta$-isomorfismo, non solo le regole per $\natural$ non verrebbero qualificate come armoniose ma neanche quelle per la disgiunzione verrebbero qualificate come tali, poiché $Y \vee Z \overset{\beta\eta}{\simeq} \forall X. ((Y \supset X) \wedge (Z \supset X)) \supset X$.

Questa tuttavia è una ragione sufficiente solo per negare la possibilità di una definizione che utilizzi il $\beta\eta$-isomorfismo ma non per negare la generale realizzabilità di una definizione di armonia forte che impieghi l’isomorfismo. Esistono in realtà ragioni indipendenti per adottare differenti nozioni di equivalenza e di isomorfismo quando ci si trova a lavorare in NI_2. Sia in NI che in NI_2 la nozione massima e non triviale di equivalenza può essere definita come *equivalenza contestuale* (in simboli $\overset{CE}{\equiv}$). Nel *setting* della deduzione naturale questa nozione può essere definita come segue: due derivazioni $\mathfrak{D}_1$ e $\mathfrak{D}_2$ di A sono contestualmente equivalenti sse per ogni derivazione $\mathfrak{D}$ di $\top \vee \top$ che dipende dalle assunzioni A, Δ[39]:

$$\begin{array}{c} \mathfrak{D}_1 \\ [A] \\ \mathfrak{D} \\ \top \vee \top \end{array} \quad \overset{\beta}{\equiv} \quad \begin{array}{c} \mathfrak{D}_2 \\ [A] \\ \mathfrak{D} \\ \top \vee \top \end{array}$$

A differenza di ciò che accade in NI, dove la βη-equivalenza e l'equivalenza contestuale coincidono[40], in NI_2 la βη-equivalenza è molto più debole dell'equivalenza contestuale (tanto che la prima è decidibile mentre la seconda è indecidibile[41]). Analogamente, la nozione di isomorfismo che emerge dall'equivalenza contestuale è decisamente più forte del βη-isomorfismo. In particolare, $Y \vee Z$ è CE-isomorfa a $\forall X.((Y \supset X) \wedge (Z \supset X)) \supset X$.

Alla luce di queste considerazioni, una proposta naturale sarebbe quella di definire l'armonia forte sostituendo nella definizione di armonia debole di Schroeder-Heister la derivabilità con il CE-isomorfismo. La nozione così ottenuta permetterebbe di superare i problemi dell'armonia debole. Tuttavia, neanche questa nozione è del tutto soddisfacente. In generale, infatti, è molto difficile stabilire se due derivazioni di una formula A sono contestualmente equivalenti, poiché si devono considerare *tutte* le derivazioni di $\top \vee \top$ da A. Inoltre, a causa dell'indecidibilità dell'equivalenza contestuale ci sono poche speranze per la decidibilità della nozione di CE-isomorfismo in NI^2 e quindi per la decidibilità di una nozione di armonia forte definita nei termini di questa.

Per tale ragione gli autori[42] hanno studiato altre nozioni di equivalenza situate tra la βη-equivalenza e l'equivalenza contestuale, con la speranza di trovare una nozione maggiormente trattabile della

39 La derivazione $\mathfrak{D}$ può essere vista come un contesto, in questo modo $\mathfrak{D}_1 \overset{CE}{\equiv} \mathfrak{D}_2$ significa che $\mathfrak{D}_1$ e $\mathfrak{D}_2$ sono (β-) equivalenti in ogni contesto.

40 Cfr. Scherer, 2017.

41 L'indecibilità dell'equivalenza contestuale in NI_2 è folklore, per una dimostrazione dettagliata, si veda Pistone e Tranchini, 2021.

42 Cfr. Tranchini, Pistone e Petrolo, 2019.

CE-equivalenza e comunque adeguata alla definizione di una nozione di armonia forte. Gli autori si sono concentrati, in particolare, sulla nozione di equivalenza che emerge dall'interpretazione funtoriale delle formule del secondo ordine[43] stabilendo alcuni risultati che suggeriscono che questa nozione possa adattarsi alle esigenze dello studio dei connettivi intuizionisti generalizzati nel *setting* del second'ordine[44].

L'idea chiave alla base di questa estensione della βη-equivalenza può essere informalmente introdotta partendo dalla formulazione di che cosa conti come una prova di una formula del tipo ∀X.A nello stile delle clausole-BHK:

Una prova di ∀X.A(d'ora in avanti una *prova universale*) è una funzione che applicata a una proposizione B produce una prova di ∀[B/X].

Come nel caso di una prova di A ⊃ B (considerata come una funzione da prove di A a prove di B) una prova universale non può essere semplicemente concepita come una lista infinita di coppie ordinate (ognuna delle quali costituita da una proposizione B e da una prova di A[B/X]) pena il rendere la nozione di prova epistemicamente opaca, contraddicendo l'assunzione che le prove intuizioniste sono il risultato di un'attività di costruzione mentale compiuta dal soggetto conoscente[45]. Queste funzioni devono piuttosto essere concepite in modo che un soggetto conoscente sia in grado di dominarle epistemicamente. Un modo per soddisfare questa richiesta è assumere che una prova universale di ∀X.A sia una funzione che associa una prova di A[B/X] a ogni proposizione B "in modo uniforme"[46].

Come cercheremo di mostrare l'uniformità produce una vasta serie di conseguenze per l'identità delle prove. Consideriamo, per esempio, una proposizione della forma ∀X.X ⊃ X. Una prova di questa proposizione è una funzione *f* che associa a ogni proposizione B una prova *f*B di B ⊃ B, che a sua volta è una funzione dall'insieme delle prove

[43] Cfr. Bainbridge, Freyd, Scedrov e Scott, 1990.

[44] Cfr. Pistone e Tranchini, 2021.

[45] Cfr. Pistone,2018.

[46] La nozione di uniformità è stata ampiamente indagata dall'informatica teorica sotto il nome di "parametricità"; cfr. Strachey, 1967; Reynolds, 1983; Hermida, Reddy e Robinsono, 2014.

di B su sé stesso[47]. Dal momento che in generale ci sono diversi modi di mappare l'insieme delle prove di una determinata proposizione su sé stessa, è naturale chiedersi come sia possibile associare una particolare mappatura a ogni proposizione in *maniera uniforme*. Affermare che i valori che una prova universale *f* assegna al suo argomento sono uniformi vuol dire affermare, in ultima analisi, che i valori di *f* stessa devono essere definiti in maniera uniforme. Non sembrano però esserci molte alternative per definire uniformemente una famiglia di funzioni ognuna delle quali mappi l'insieme delle prove di una proposizione su sé stessa. Di fatto, l'unica famiglia di funzioni che è possibile definire uniformemente è la famiglia delle funzioni di identità sugli insiemi delle prove di tutte le proposizioni. In altre parole, se assumiamo che le prove di ∀X.X ⊃ X siano funzioni uniformi, esiste una sola prova di questo tipo, vale a dire quella che associa a ogni proposizione B la funzione di identità id_B sull'insieme delle prove di B .

Per catturare sintatticamente l'assunzione di uniformità si devono ripensare i criteri per stabilire quando due derivazioni rappresentano la stessa prova. Per comprenderne la ragione, consideriamo le due derivazioni seguenti:

$$\dfrac{B \supset C \qquad \dfrac{\dfrac{\forall X. X \supset X}{B \supset B} \quad B}{B}}{C} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\forall X. X \supset X}{C \supset C} \qquad \dfrac{B \supset C \quad B}{C}}{C}$$

In base all'assunzione che le prove di ∀X.X ⊃ X sono uniformi, le due derivazioni dovrebbero denotare la stessa prova. È possibile cogliere al meglio questo fatto quando le derivazioni sono decorate con termini di prova:

$$\dfrac{h : B \supset C \qquad \dfrac{\dfrac{f : \forall X. X \supset X}{f\,B : B \supset B} \quad b : B}{f\,Bb : B}}{h(f\,Bb) : C} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{f : \forall X. X \supset X}{f\,C : C \supset C} \qquad \dfrac{h : B \supset C \quad b : B}{hb : C}}{f\,C(h, b) : C}$$

[47] Utilizzando la notazione in λ-calcolo, indichiamo l'applicazione di una funzione *f* al suo argomento α con (*f* α), dove le parentesi più esterne saranno lasciate implicite, e assumiamo che l'applicazione associ a sinistra, in modo che *f gh* sia l'abbreviazione di ((*f gh) h)*.

L'uniformità garantisce che fB e fC sono le funzioni di identità id_B e id_c sull'insieme delle prove di B e delle prove di C, e quindi che le due derivazioni codificano (per qualsiasi f, h, b, B e C) la stessa prova di C:

$$h(f\ Bb) = h(\mathrm{id}_B b) = hb = \mathrm{id}_\mathrm{C}(hb) = f\ C\ (hb)$$

È facile rendersi conto di come la βη-equivalenza non riesca a cogliere le conseguenze dell'uniformità. Le due derivazioni precedenti sono βη-normali e quindi (come conseguenza del teorema di Church-Rosser per la βη-riduzione in NI_2) appartengono a due diverse classi di βη-equivalenza. Per tale ragione al fine di cogliere l'uniformità delle prove di ∀X.X ⊃ X abbiamo bisogno di rafforzare la relazione di equivalenza sulle derivazioni richiedendo che questa sia chiusa sotto lo schema seguente – le cui istanze chiameremo ε-equazioni:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}\\ \forall X.X\supset X\end{array}}{B\supset B}\qquad B}{B}\\ \mathfrak{D}'\\ C\end{array} \quad \overset{\varepsilon}{\equiv} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}\\ \forall X.X\supset X\end{array}}{C\supset C}\qquad \begin{array}{c}B\\ \mathfrak{D}'\\ C\end{array}}{C}$$

il cui orientamento da sinistra a destra può essere considerato come un'operazione che permette di permutare la derivazione $\mathfrak{D}$' attraverso l'applicazione di ∀E.

Analoghe considerazioni informali mostrano che l'insieme delle prove uniformi di ∀X. (X ⊃ X) ⊃ X deve essere in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle prove di A stessa (a condizione che X non occorra libera in A). In particolare, una prova di ∀X. (A ⊃ X) ⊃ X associa a ogni proposizione B una funzione da prove di A ⊃ B (che a loro volta sono funzioni da prove di A a prove di B) a prove di B. Tuttavia, l'unico modo per definire una tale prova in maniera uniforme consiste nel prendere in considerazione una prova a di A (se disponibile) e nell'associare a ogni proposizione B la funzione che associa fa a ogni prova f di A ⊃ B.

Sintatticamente, l'uniformità può ancora una volta essere espressa come la possibilità di permutare una derivazione attraverso un'applicazione di ∀E con premessa ∀X. (A ⊃ X) ⊃ X impiegando le ε-equazioni ottenute dallo schema sottostante. In questo caso osserviamo che la derivazione $\mathfrak{D}'$ non può essere permutata così com'è – pena cambiare l'assunzione aperta della derivazione – a causa dell'incompatibilità tra la conclusione di $\mathfrak{D}'$ e la premessa minore richiesta per poter applicare $\supset$ E. L'incompatibilità può tuttavia essere risolta "incapsulando" $\mathfrak{D}'$ (la cui conclusione è D e le cui assunzioni non scaricate sono C e eventualmente ulteriori assunzioni Δ) con alcune applicazioni di regole di eliminazione e introduzione che producono una derivazione – che indichiamo con $(A \supset X)\{\mathfrak{D}'\}$ di $(A \supset X)[D/X]$ da $(A \supset X)[C/X]$, Δ:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}\\ \forall X.(A \supset X) \supset X\end{array}}{((A \supset X) \supset X)[C/X]} \qquad (A \supset X)[C/X]}{\begin{array}{c}C\\ \mathfrak{D}'\\ D\end{array}}\end{array} \overset{\varepsilon}{\equiv} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}\\ \forall X.(A \supset X) \supset X\end{array}}{((A \supset X) \supset X)[D/X]} \qquad \dfrac{(A \supset X)[C/X]}{\dfrac{\boxed{(A \supset X)\{\mathfrak{D}'\}}}{(A \supset X)[D/X]}}}{D}$$

dove

$$(A \supset X)\{\mathfrak{D}'\} = (n)\dfrac{\dfrac{(A \supset X)[C/X] \qquad \overset{n}{A}}{\begin{array}{c}C\\ \mathfrak{D}\\ D\end{array}}}{(A \supset X)[D/X]}$$

Dato che le prove uniformi di $\forall X.\,(A \supset X) \supset X$ sono in corrispondenza biunivoca con quelle di A, dovrebbe essere possibile dimostrare sintatticamente che $\forall X.\,(A \supset X) \supset X$ e A sono E-isomorfe sulla base di qualsiasi nozione di equivalenza E sufficientemente forte da codificare l'uniformità delle prove universali. Questo sembra effettivamente il caso: date le due derivazioni

$$\mathfrak{D}_1 = (n)\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{n}{A \supset X} \qquad A}{X}}{(A \supset X) \supset X}}{\forall X.(A \supset X) \supset X} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\forall X.(A \supset X) \supset X}{(A \supset A) \supset A} \qquad (n)\dfrac{\overset{n}{A}}{A \supset A}}{A} = \mathfrak{D}_2$$

è semplice dimostrare che la composizione $\begin{array}{c}\mathfrak{D}_1\\ (A \supset X)\\ \mathfrak{D}_2\end{array}$ β-riduce alla derivazione che consiste solo dell'assunzione A e che la composizione $\begin{array}{c}\mathfrak{D}_2\\ A\\ \mathfrak{D}_1\end{array}$, dopo l'applicazione di una ε-permutazione, η-riduce alla derivazione che consiste solamente dell'assunzione $\forall X.\,(A \supset X) \supset X$

Allo stesso modo, possiamo definire le ε-permutazioni per la formula ∀X. (Y ⊃ X) ⊃ ((Z ⊃ X) ⊃ X) (a condizione che X non occorra libera in A e B) che codifica l'uniformità delle prove di questa proposizione. Da un lato, questa formula è βη-isomorfa a ∀X. ((Y ⊃ X) Λ (Z ⊃ X)) ⊃ X, dall'altro, utilizzando la ε-permutazione, possiamo dimostrare che ∀X. (A ⊃ X) ⊃ (B ⊃ X) ⊃ X $\overset{\varepsilon}{\simeq}$ A V B. Abbiamo quindi che A V B $\overset{\varepsilon}{\simeq}$ ∀X. ((A ⊃ X) Λ (B ⊃ X)) ⊃ X, vale a dire, che, definendo l'armonia forte attraverso l'ε-isomorfismo, le regole standard per V vengono qualificate come fortemente armoniose.

In generale, è possibile stabilire che:

$$\bigvee_{j=1}^{m}\bigwedge_{i=1}^{n_j} R_{ji} \quad \overset{\varepsilon}{\simeq} \quad \forall X.\left(\bigwedge_{j=1}^{m}\left(\bigwedge_{i=1}^{n_j} R_{ji} \supset X\right)\right) \supset X$$

e quindi che qualsiasi collezione di regole di introduzione e la corrispondente collezione di regole di eliminazione di Prawitz e Schroeder-Heister sono in armonia forte, definendo le ε-permutazioni per tutte le formule quantificate ∀X.A nelle quali A ha una forma tipicamente semplice che denominiamo *sp* – X *annidata*. Una $\mathcal{L}^2_{sp}$ -formula è *strettamente positiva in* X sse X non occorre a sinistra di ⊃ in A, e una formula annidata *sp* – X è una formula del tipo $A_1 \supset (\ldots (A_n \supset X) \ldots)$ dove ogni A_j è *sp* – X per tutti $1 \leq i \leq n$. Il precedente isomorfismo è stabilito dimostrando che la parte destra della formula è βη-isomorfa alla formula annidata *sp* – X

$$\forall X.\Big(R_{11} \supset \big(\ldots\big(R_{1n_1} \supset X\big)\ldots\big)\Big) \supset \Big(\ldots\Big(\Big(R_{m1} \supset \big(\ldots\big(R_{mn_m} \supset X\big)\ldots\big)\Big) \supset X\Big)\ldots\Big)$$

che a sua volta è ε-isomorfa alla parte sinistra della formula.

Sia $\mathcal{L}^{2\supset}_{sp}$ il frammento di $\mathcal{L}^{2\supset}$ ottenuto ammettendo formule del tipo ∀X.A solo se A è *sp* – X annidata. I contenuti di qualsiasi regola di introduzione ed eliminazione del tipo appena considerato sono ε-isomorfi alle formule in $\mathcal{L}^2_{sp}$, e allo stesso modo lo sono anche i contenuti della collezione di regole di introduzione ed eliminazione.

Sia $\mathrm{NI}^{2\supset}_{sp}$ la restrizione di NI^2 al linguaggio $\mathcal{L}^{2\supset}_{sp}$. Come dimostrato dagli autori[48], la ε-equivalenza gode di proprietà molto forti in $\mathrm{NI}^{2\supset}_{sp}$, in particolare è decidibile e massimale[49]. Pertanto, assumendo la posizione di Došen e Widebäck, l'ε-equivalenza (l'ε-isomorfismo) può essere considerata come la nozione canonica di equivalenza (di isomorfismo) in NI^2.

Questi risultati di decidibilità e massimalità sono basati sul fatto che le derivazioni di $\mathrm{NI}^{2\supset}_{sp}$ modulo della ε-equivalenza formano una categoria equivalente a quella delle derivazioni di NI modulo della βη-equivalenza. Questo, a sua volta, comporta che la questione della decidibilità dell'isomorfismo in $\mathrm{NI}^{2\supset}_{sp}$ è equivalente a quella della decidibilità dell'isomorfismo in NI, questione che, come osservato nella sezione precedente, risulta ancora aperta.

I precedenti risultati si presentano come argomenti a favore di una definizione di armonia forte che utilizzi l'ε-isomorfismo piuttosto che il βη- o il CE-isomorfismo, perlomeno quando il tipo di introduzione ed eliminazione obbedisce allo schema precedente. Quando abbiamo a che fare con due collezioni arbitrarie di regole di introduzione e di eliminazione per †, non siamo in generale in grado di dire se queste sono in armonia (poiché non si conosce, al momento, se il βη-isomorfismo in NI, e dunque l'ε-isomorfismo in $\mathrm{NI}^{2\supset}_{sp}$, sia decidibile o meno), ma possiamo tuttavia stabilire se determinate derivazioni testimoniano o non testimoniano il loro isomorfismo.

Concludiamo osservando come Schroeder-Heister consideri regole di introduzione ed eliminazione di un tipo più generale come le seguenti:

$$\forall\vec{X}\forall\vec{Y}\left(\bigwedge_{i=1}^{n} R_i \supset \dagger\,(\vec{X})\right) \qquad (INTRO^*)$$

$$\forall X\forall\vec{Y}\forall\vec{X}\left(\left(\dagger\,(\vec{X}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} R_i\right) \supset X\right) \qquad (ELIM^*)$$

48 Cfr. Pistone e Tranchini, 2021.

49 Inoltre, qualsiasi derivazione in questo frammento è ε-equivalente a una derivazione nella quale le applicazioni di ∀E hanno un testimone atomico; cfr. Pistone, Tranchini e Petrolo, 2019, in revisione.

che soddisfano le due condizioni seguenti:

- in ogni R_j nessuna variabile per connettivi occorre libera;
- nessuna variabile proposizionale occorre libera $\vec{Y}$ contiene tutte le variabili proposizionali che occorrono in una qualsiasi R_j a parte X e quelle in $\vec{X}$.

Abbandonando la terza condizione riguardo alle regole di eliminazione[50] e permettendo la quantificazione annidata all'interno delle regole di introduzione e delle regole di eliminazione, queste tipologie meno limitate di regole arricchiscono considerevolmente la classe dei connettivi suscettibili di una descrizione in termini di regole di introduzione ed eliminazione "pure" (vale a dire, di regole di introduzione nelle quali nessun connettivo occorre eccetto quello che viene "definito"). Schroeder-Heister[51] ha per esempio osservato come sia possibile formulare una regola d'introduzione per la negazione che non faccia riferimento a $\perp$, della forma $\forall X. (\forall Y.X \supset Y) \supset \dagger (X)$. Questo tipo più generale di regole di introduzione è tuttavia molto più espressivo del tipo standard, poiché permette ad esempio di formulare una regola di introduzione per un connettivo a zero posti:

$$(\forall Y. (Y \supset Y) \wedge Y \supset Y) \supset \dagger$$

il quale è essenzialmente la codifica impredicativa dell predicato $\mathbb{N}$ in NI^2.

A differenza di ciò che abbiamo osservato nel caso di regole di introduzioni ed eliminazioni di un tipo più ristretto come quelle considerate durante l'articolo, i contenuti delle regole di questo tipo più generale sono formule che non possono essere dimostrate come ε-isomorfe alle formule nel frammento $\mathcal{L}_{sp}^{2\supset}$.

È vero che le ε-equazioni possono essere formulate per qualsiasi formula del tipo ∀X.A. Tuttavia, contrariamente a ciò che accade nel frammento ristretto finora considerato, non appena si permette la codifica di tipi induttivi, l'ε-equivalenza risulta indecidibile[52] (come

[50] Cfr. n. 30.
[51] Cfr. Schroeder-Heister, 2014a.
[52] Cfr. Pistone e Tranchini, 2021.

conseguenza dell'equivalenza tra la teoria ε-equazionale per il frammento $NI^{2\supset}$ che contiene la codifica del predicato dei numeri naturali e la teoria equazionale studiata da Okada e Scott[53]) e, probabilmente, non massimale[54].

Per tale ragione, qualora si accetti questa concezione più generale delle regole di introduzione ed eliminazione, potrebbe essere più adeguato definire la nozione di armonia forte utilizzando una relazione di equivalenza più forte di ε. Va però sottolineato che, dal momento che la ε-equivalenza è indecidibile al di fuori del frammento del linguaggio $\mathcal{L}_{sp}^{2\supset}$, quando le regole di introduzione ed eliminazione prese in considerazione sono di questo tipo più generale, sembrano esserci poche speranze per una nozione decidibile di armonia forte.

Bibliografia

Bainbridge E.S., Freyd P.J., Scedrov A. e Scott P.J., *Functorial polymorphism*, in «Theoretical Computer Science», 70, 1990, pp. 35-64.

Belnap N.D., *Tonk, plonk and plink*, in «Analysis», 22(6), 1962, pp. 130-134.

Došen K., *Identity of proofs based on normalization and generality*, in «Bulletin of Symbolic Logic», 9, 2003, pp. 477-503.

Došen K. e Petric Z., *The typed Böhm theorem*, in «Electronic Notes in Theoretical Computer Science», 50(2), 2001, pp. 117-129.

Dummett M., *The Logical Basis of Metaphysics*, Londra, Duckworth, 1991.

Gentzen G., *Untersuchungen über das logische Schließen*, in «Mathematische Zeitschrift», 39, 1935, traduzione inglese: *Investigations into logical deduction*, in *The collected papers of Gerhard Gentzen*, Amsterdam, North Holland, 1969, pp. 68-131.

Girard J., *The System F of variable types, fifteen years later*, in «Theoretical Computer Science», 45, 2/1986, pp. 159-192.

[53] Cfr. Okada e Scott, 1999.

[54] Teorie equazionali più forti di ε per l'intero $NI^{2\supset}$ sono state studiate, tra gli altri, da Longo, Milsted e Solov'ev, 1993.

Hermida C., Reddy U.S. e Robinsono E.P., *Logical relations and parametricity – A Reynolds programme for category theory and programming language*, in *Proceedings of the Workshop on Algebra, Coalgebra and Topology (WACT 2013)*, Vol. 303 di *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, Elsevier, 2014, pp. 149-180.

Ilik D., *Axioms and decidability for type isomorphism in the presence of sums*, in *Proceedings of the Joint Meeting of the Twenty-Third EACSL Annual Conference on Computer Science Logic (CSL) and the Twenty-Ninth Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, New York, CSL-LICS '14, Association for Computing Machinery, 2014, doi: 10.1145/2603088.2603115. URL https://doi.org/10.1145/2603088.2603115.

Longo G., Milsted K., e Soloviev S., *The genericity theorem and the notion of parametricity in the polymorphic λ-calculus*, in «Theoretical Computer Science», 121, 1993, pp. 323-349.

Okada M., e Scott P.J., *A note on rewriting theory for uniqueness of iteration*, in « Theory and Applications of Categories», 6, 1999, pp. 47-64.

Pistone P., *Polymorphism and the obstinate circularity of second order logic, a victims' tale*, in «The Bulletin of Symbolic Logic», 24(1), 2018, pp. 1-52.

Pistone P. e Tranchini L., *The Yoneda reduction of polymorphic types*, in corso di pubblicazione in *Prooceeding of CSL*, 2021 URL https://arxiv.org/abs/1907.03481.

Pistone P., Tranchini L. e Petrolo M., *The naturality of natural deduction (II). Some remarks on atomic polymorphism*, 2019, in revisione, URL https://arxiv.org/abs/1908.11353.

Prawitz D., *Natural deduction, a proof-theoretical study*, Stoccolma, Almqvist & Wiskell, 1965.

Prawitz D., *Ideas and results in proof theory*, in «Studies in Logic and the Foundations of Mathematics», 63, 1971, pp. 235-307.

Prawitz D., *Proofs and the meaning and completeness of the logical constants*, in *Essays on Mathematical and Philosophical Logic: Proceedings of the Fourth Scandinavian Logic Symposium and the First Soviet-Finnish Logic Conference, Jyväskylä, Finland, June 29 July 6,* Dordrecht, Kluwer, 1979, pp. 25-40.

Prior A.N., *The runabout inference-ticket,* in «Analysis», 21(2), 1960, pp. 38-39.

Read S., *General-elimination harmony and the meaning of the logical constants*, in «Journal of Philosophical Logic», 39, 2010, pp. 557-76.

Reynolds J.C., *Types, abstraction and parametric polymorphism*, in *Information Processing '83*, R.E.A. Mason (ed.), North Holland, 1983, pp. 513-523.

Scherer G., *Deciding equivalence with sums and the empty type*, in *Proceedings of the 44th ACMSIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages, POPL 2017, Paris, France, January 18-20, 2017*, Castagno G. e Gordon A.D. (ed.), ACM, 2017, pp. 374-386. URL http://dl.acm.org/citation.cfm?id=3009901.

Schroeder-Heister P., *Untersuchungen zur regellogischen Deutung von Aussagenverknüpfungen*. Bonn, Bonn University, Tesi di dottorato, 1981.

Schroeder-Heister P*., A natural extension of natural deduction,* in «The Journal of Symbolic Logic», 49(4), 12/1984, pp. 1284-1300.

Schroeder-Heister P., *The calculus of higher-level rules, propositional quantification, and the foundational approach to proof-theoretic harmony*, in «Studia Logica», 102(6), 2014a, 1185-1216. ISSN 0039-3215. doi: 10.1007/s11225-014-9562-3.

Schroeder-Heister P., *Harmony in proof-theoretic semantics: A reductive analysis*, in *Dag Prawitz on Proof and Meaning*, Wansing H (ed.), Springer, 2014b, pp. 329-358.

Schroeder-Heister P., *Open Problems in Proof-Theoretic Semantics*, in *Advances in Proof-Theoretic Semantics*, Piecha T. e Schroeder-Heister P. (ed.), Springer, 2016, pp. 253-283. ISBN 978-3-319-22686-6. doi: 10.1007/978-3-319-22686-6_16. URL https://doi.org/10.1007/978-3-319-22686-6_16.

Solov'ev S.V., *The category of finite sets and cartesian closed categories*, in «Journal of Soviet Mathematics», 22, 1983, pp. 1387-1400.

Statman R., *λ-definable functionals and* βη*-conversion*, in «Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung», 23, 1983, pp. 21-26.

Strachey C., *Fundamental concepts in programming languages*, in «Higher Order and Symbolic Computation», 13, 1967, pp. 11-49.

Tennant N., *Natural Logic*, Edimburgo, Edimburgh University Press, 1978.

Tranchini L., *Truth from a proof-theoretic perspective*, in «Topoi», 31(1), 2012, pp. 47-57.

Tranchini L., *Proof-theoretic harmony: towards an intensional account*, in «Synthese», Sep/2016a. doi: 10.1007/s11229-016-1200-3.

Tranchini L., *Proof-theoretic semantics, paradoxes, and the distinction between sense and denotation*, in «Journal of Logic and Computation», 26(2), 2016b, pp. 495-512.

Tranchini L., *Stabilizing quantum disjunction*, in «Journal of Philosophical Logic», 47, 2018, pp. 1029-1047.

Tranchini L., *Proof, meaning and paradox: Some remarks*, in «Topoi», 38, 2019, pp. 591-603.

Tranchini L., Pistone P., e Petrolo M., *The naturality of natural deduction*, in «Studia Logica», 107(1), 2019, pp. 195-231.

Widebäck F., *Identity of proofs*, Stoccolma, Almqvist & Wiksell, 2001.

Logica e spiegazione Scientifica in meccanica statistica

Valia Allori*

1. Introduzione

Perché usare la logica? In questo articolo argomenterò a favore del fatto che il ragionamento logico ci aiuti a comprendere cosa significhi che una teoria scientifica come la meccanica statistica sia in grado di spiegare un fenomeno.

Andiamo con ordine. Cosa significa che una teoria scientifica spiega un certo fenomeno? Trovare una teoria filosofica della spiegazione scientifica che sia accettata universalmente è un'impresa pressoché impossibile: si va dal modello a leggi di copertura, secondo cui una spiegazione è un argomento in cui appaiono come premesse delle leggi di natura, ad approcci causali in cui si fornisce una spiegazione quando si identifica la causa di un fenomeno.[1] Al contrario di quello che

* Department of Philosophy, Northern Illinois University, vallori@niu.edu

[1] Si veda ad esempio Hempel C.G, Oppenheim P., *Studies in the Logic of Explanation*, in «Philosophy of Science», 15/1948, pp. 135-175; Hempel C. G., *Aspects of Scientific Explanation and Other Essays in the Philosophy of Science*, New York, The Free Press, 1965.); Salmon W., *Statistical Explanation and Statistical Relevance*, Pittsburgh, University of Pittsburgh Press, 1971; Salmon W., *Scientific Explanation and the Causal Structure of the World*, Princeton, Princeton University Press, 1984; Salmon W., *Causality Without Counterfactuals*, «Philosophy of Science», 61, 2/1994, pp. 297-312; Salmon W., *Causality and Explanation: A Reply to Two Critiques*, «Philosophy of Science», 64, 3/1997, pp. 461–477; Salmon W., *Causality and Explanation*, New York, Oxford University Press, 1998; Friedman M., *Explanation and Scientific Understanding*, «Journal of Philosophy», 71/1974, pp. 5-1; Kitcher P., *Explanation, Conjunction and Unification*, «Journal of Philosophy»,

accade in filosofia, in fisica più pragmaticamente sembra essere abbastanza chiaro quando una teoria riesca o meno a dare una spiegazione adeguata. Per esempio, la meccanica classica spiega un numero vastissimo di fenomeni semplicemente risolvendo l'equazione di Newton. Quindi, spiegare un fenomeno significa dedurre come gli oggetti che costituiscono il fenomeno in esame si comportino, cioè come evolvano nel tempo, una volta date le leggi e le condizioni iniziali. Inoltre, la meccanica classica, la cui equazione fondamentale è quella di Newton, è anche in grado di derivare altre leggi, non fondamentali, in termini dell'equazione di Newton. In questo caso si parla di riduzione di una teoria ad un'altra. Per esempio, uno dei successi della teoria di Newton è di essere riuscita nella derivazione delle leggi fenomenologiche di Keplero, che descrivono le orbite dei pianeti intorno al Sole, in termini di particelle puntiformi che si muovono in accordo con la legge di Newton, una volta considerata la forza di gravità. Schematicamente, tali derivazioni sono deduzioni: data una qualunque condizione iniziale, sotto certe approssimazioni che ragionevolmente descrivono il fenomeno in esame, la soluzione dell'equazione del moto di Newton riproduce le leggi di Keplero. Quindi spiegare una legge non fondamentale ancora una volta significa usare la logica deduttiva.

Le cose sono più complicate quando invece di corpi solidi come i pianeti si considerano dei gas. I fenomeni da spiegare sono governati da leggi fenomenologiche, quelle della termodinamica, la più famosa delle quali è la seconda legge, la quale afferma che l'entropia di qualunque sistema fisico non diminuisce mai. L'approccio di Boltzmann ambisce a mostrare che tali leggi si possono ricostruire a partire da una dinamica

73/1976, pp. 207-12; Kitcher P., *Explanatory Unification*, «Philosophy of Science», 48/1981, pp. 507-31; Kitcher P., *Explanatory Unification and the Causal Structure of the World*, in Kitcher P., Salmon W., (a cura di.), 1989, *ibidem* pp. 401-505; Woodward, J. *The Causal Mechanical Model of Explanation*, in Kitcher P., Salmon W., (a cura di.), 1989, *ibidem* pp. 357-383; Woodward J., *Explanation, Invariance and Intervention*, «Philosophy of Science», 64/1997, pp. 26-41; Woodward J., *Explanation and Invariance in the Special Sciences*, «The British Journal for the Philosophy of Science», 51/2000, pp. 197-254; Woodward J., *What is a Mechanism? A Counterfactual Account*, «Philosophy of Science», 69/2002, pp. 366-377; Woodward J., *Making Things Happen: A Theory of Causal Explanation,* New York, Oxford University Press, 2003; Woodward J.*, Counterfactuals and Causal Explanation,* «International Studies in the Philosophy of Science», 18, 1/2003, pp. 41-72.

microscopica Newtoniana, usando metodi statistici. Sebbene non risulti possibile dimostrare che la seconda legge della termodinamica valga per tutte le condizioni iniziali, si è in grado di mostrare che essa vale per la stragrande maggioranza dei casi. Quindi, sebbene non si possano dedurre dalla dinamica microscopica in maniera esatta, c'è comunque un senso in cui le leggi della termodinamica vengono riprodotte. Quale è questo senso? In questo articolo vorrei discutere proprio questo. In altre parole, vorrei discutere il tipo di spiegazione dei fenomeni macroscopici fornito dalla meccanica statistica e confrontarlo in particolare con il modello di spiegazione scientifica a leggi di copertura proposto da Hempel (sia quello nomologico deduttivo che quello statistico induttivo). Sebbene questo tipo di spiegazione abbia molte caratteristiche in comune con entrambi i modelli, nel caso del modello statistico induttivo vedremo come non è necessario invocare la nozione di probabilità in quanto sembra che basti la nozione piú debole di *tipicità*.

2. Modello a leggi di copertura e meccanica classica

Uno dei primi modelli filosofici di analisi del concetto di spiegazione scientifica è il modello a leggi di copertura, formulato originariamente da Carl Hempel e Paul Oppenheim[2] ed elaborato in seguito in maniera definitive da Hempel.[3]

L'idea fondamentale è che un fenomeno viene spiegato quando viene reso prevedibile, e viceversa. Più precisamente, un fenomeno è reso prevedibile se è possibile pensarlo come conclusione di un argomento che contenga come premesse le leggi di natura rilevanti e le condizioni iniziali dell'oggetto. In altri termini, il fenomeno E risulta la conclusione di un argomento valido con premesse date dai dati iniziali I_i e dalle leggi L_i, $i = 1, \dots, N$. Quindi vale lo schema:

$$\frac{\begin{array}{c} I_1, I_2, \dots, I_N \\ L_1, L_2, \dots, L_N \end{array}}{\therefore \quad E}$$

[2] Carl Hempel e Paul Oppenheim, *op. cit.*, 1948.

[3] Carl Hempel, *op. cit.*, 1964.

Se le leggi sono universali e deterministiche, questo modello si chiama nomologico- deduttivo (ND), e a volte può essere utile riscrivere il suo schema fondamentale come segue:

$$\frac{\begin{array}{c} x \text{ è A} \\ \text{Tutti gli } A \text{ sono } B \end{array}}{\therefore \quad x \text{ è } B}$$

Quindi, notare che esiste una legge universale tale per cui tutti gli *A* sono *B* spiega perché *x*, che è un *A*, sia anche un *B*. Un esempio semplice del modello ND è il seguente. Come si spiega che *x*, questo oggetto, sia un *B*, cioè un conduttore di elettricità? La legge di natura rilevante è che "ogni metallo conduce elettricità" (*L* = Tutti gli *A* sono *B*) a cui si deve aggiungere che "l'oggetto considerato è un metallo" (*x* è *A*). Si spiega che il campione in esame conduce elettricità in termini della sua natura di metallo e di una legge che collega l'essere un metallo al condurre elettricità. Questo rende il fenomeno da spiegare prevedibile logicamente in maniera deduttiva, e in virtù di questo lo si spiega.

Invece se è presente almeno una legge statistica, si parla di modello statistico induttivo (SI). L'idea è che se si riesce a dimostrare che due proprietà appaiono insieme con alta probabilità allora si riesce a spiegare perché un oggetto che possiede una delle due proprietà possieda anche l'altra. Formalmente si ha:

$$\frac{\begin{array}{c} x \text{ è } A \\ Prob(x \text{ è } A \text{ e } B) = r \end{array}}{\therefore \quad x \text{ è } B} [r]$$

dove *r* è la forza dell'induzione. Per esempio: data una mela (*x*) che è rossa (*A*), se si riesce a mostrare che con alta probabilità (*r*) le mele rosse sono anche dolci (*B*), allora uno ha anche mostrato perché questa mela rossa sia dolce.

Consideriamo ora la meccanica classica. In questa teoria, ogni oggetto fisico è costituito da particelle puntiformi che obbediscono ad una singola legge di natura data dall'equazione di Newton *F* = *ma*, dove è la forza che agisce su un determinato oggetto (per esempio la forza di gravità), *m* la sua massa e *a* l'accelerazione prodotta dalla forza sul corpo. La meccanica classica ha l'ambizione di essere una "teoria del tutto", cioè di descrivere ogni fenomeno fisico, sia nel piccolo che nel grande. In altre parole, la teoria è universale.

Leggendo i libri di fisica, sembra proprio che il tipo di spiegazione fornito dalla teoria di Newton sia perfettamente allineato alla spiegazione fornita dal modello ND. Per esempio, supponiamo di voler sapere quale sia l'accelerazione che agisce su un corpo sulla superficie della Luna. Applichiamo la legge di Newton $F = ma$ dove $F = G\frac{mM}{R^2}$. In questa formula G è la costante di gravitazione universale uguale a $6{,}67 \times 10^{-11}$ $m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}$, M è la massa della Luna pari a $7{,}35 \times 10^{-22}$ kg , e R è il suo raggio, pari ha $1{,}74 \times 10^6$ m. Quindi, semplificando m da entrambi i lati, si ottiene $a = G\frac{M}{R^2}$, e sostituendo i valori numerici si ottiene un'accelerazione di 1,62 m/s^2. Questo calcolo è compatibile con i valori sperimentali e la dimostrazione è ciò che spiega il valore dell'accelerazione sulla Luna.

Si pensi inoltre alla meccanica del corpo rigido: si dimostra che le leggi della dinamica di Newton valgono anche nel caso di corpi estesi solidi (e quindi indeformabili) quando applicate ad un punto speciale, chiamato centro di massa, e sostituendo nel caso delle rotazioni il cosiddetto momento di inerzia al posto della massa. Questi esempi sembrano confermare che in meccanica classica la spiegazione segue il modello ND: date le leggi, e date le condizioni iniziali, se il fenomeno viene dedotto allora viene spiegato.

Il modello ND è in grado catturare quello che succede nella derivazione di leggi fenomenologiche in termini di leggi più fondamentali. Questo si vede chiaramente in meccanica classica, che sembra in grado di spiegare leggi meno universali della legge di Newton, e quindi di unificare fenomeni ritenuti fino a quel momento di natura diversa. Infatti, uno dei successi di Newton è stato quello di fornire una descrizione dei movimenti dei corpi sia sulla Terra che nel cosmo: non solo la teoria è in grado si spiegare perché i gravi cadono con accelerazione costante e uguale a $g = 9{,}8\ m/s^2$, ma anche di riprodurre le leggi fenomenologiche di Keplero che descrivono le orbite planetarie. Il caso del moto dei gravi è così semplice e indicativo che vale la pena darne conto esplicitamente.

Un grave è un corpo che si muove nel campo gravitazionale terrestre. La sua equazione del moto è $F = ma$. In questa equazione F è la forza di gravità, data da $F = Gm\frac{M}{r^2}$, dove M è la massa della Terra pari a $5{,}97 \times 10^{24}$ kg, e r è la distanza del grave dal centro della Terra data dall'altezza h del corpo dal terreno sommata al raggio R della terra. Uguagliando le due quantità ed eliminando la massa m del grave si ha $a = G\frac{M}{r^2}$, che significa – sostituendo i valori delle varie costanti – un'accelerazione pari a $a = 39{,}38 \times 10^{13}\frac{1}{r^2}$. Siccome stiamo analizzando il moto dei gravi, l'altezza h del corpo dal suolo (al massimo sul monte Everest, di quota 8,848 m) è trascurabile rispetto al raggio R della Terra (pari a $6{,}37 \times 10^9$ m). Quindi si ha $a{\sim}9{,}8\frac{m}{s^2}$, che è il corretto valore sperimentale dell'accelerazione dei gravi g trovato da Galileo.

Il caso delle leggi di Keplero è più complicato e non ha molto senso riprodurlo qui.[4] Sia come sia, quello che si ottiene è che per ogni condizione iniziale compatibile col fenomeno da spiegare (i pianeti in orbita solare), date ragionevoli approssimazioni (come quella di considerare la massa del pianeta trascurabile rispetto alla massa del Sole, per quindi trascurare la forza esercitata dal pianeta sul Sole e considerare solo la forza del Sole sul pianeta), la soluzione dell'equazione di Newton riproduce le leggi di Keplero: le orbite dei pianeti sono ellissi, il segmento che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali, i quadrati dei tempi che i pianeti impiegano a percorrere le loro orbite sono proporzionali al cubo delle loro distanze medie dal Sole.

Consideriamo per semplicità il moto dei gravi. In questo caso, la legge di Newton è esatta mentre la deduzione dell'accelerazione gravitazionale avviene solo in un certo regime, cioè quello per altezze piccole rispetto al raggio terrestre, e quindi l'equazione del moto dei gravi è valida solo in questa approssimazione.

Una caratteristica interessante di questo tipo di spiegazione rispetto a quelle che valgono in maniera esatta è data dal fatto che questo

[4] Si veda per esempio Arnold V.I, *Metodi matematici della meccanica classica*, 1992, Roma, editori Riuniti.

schema non ha il famoso problema dell'asimmetria, una delle obiezioni sollevate contro il modello ND. Tale problema è che secondo il modello ND tutte le predizioni sono anche spiegazioni, dato che entrambe sono conclusioni di argomenti validi: spiego che questo oggetto conduce elettricità perché è un metallo e tutti i metalli conducono elettricità, e prevedo che se prendo un oggetto che è un metallo allora conduce elettricità. Però si possono trovare esempi di predizioni che non sono spiegazioni: mentre l'altezza di un palo spiega la lunghezza dell'ombra che esso genera, la lunghezza dell'ombra non spiega l'altezza del palo che la genera.[5] In altri termini, data l'altezza del Sole sull'orizzonte, si può calcolare con un po' di trigonometria sia l'altezza *H* di un palo in termini della lunghezza *L* della sua ombra, che viceversa la lunghezza *L* dell'ombra del palo in termini dell'altezza *H* del palo. Quindi, si possono produrre due argomenti validi, entrambi i quali forniscono una spiegazione secondo il modello ND: uno che esprime *L* in termini di *H*, e uno che esprime *H* in termini di *L*. Tuttavia, mentre il primo dà una spiegazione del fatto che l'ombra sia di quella lunghezza data l'altezza del palo, il secondo no: non è perché l'ombra è lunga *L* che il palo è altro *H*! L'altezza del palo dipende da varie cose (lo scopo del palo, per prima cosa), ma non dalla lunghezza della sua ombra. Questa obiezione al modello ND vuole quindi evidenziare che la spiegazione è asimmetrica mentre la predizione no, e spesso si suggerisce che per spiegare, ma non per predire, bisogna fornire le cause di un fenomeno. Questo problema, se considerato tale, esiste per tutte le derivazioni esatte. Invece non emerge nei casi in cui la derivazione faccia uso di approssimazioni, come nel caso della spiegazione di leggi particolari in termini di leggi generali, per esempio nel caso della deduzione del moto dei gravi dall'equazione di Newton. Questo è dovuto al fatto che le approssimazioni funzionano in un senso ma non nell'altro. Cioè, la legge di Newton è precisa, quella del moto dei gravi costituisce una sua approssimazione, e quindi si spiega la seconda nei confronti della prima ma non la prima nei confronti della seconda.

[5] Wesley Salmon, *op.cit.*, 1989, p.47.

3. Le leggi della termodinamica e la meccanica statistica di Boltzmann

Cosa succede se ora invece di spiegare i fenomeni che coinvolgono oggetti macroscopici solidi, deducendoli dall'equazione di Newton in maniera esatta o approssimata, si vogliono spiegare gli oggetti senza una forma definita come i gas? A livello macroscopico i fenomeni che coinvolgono trasformazioni di gas sono governati dalle leggi della termodinamica. Queste leggi sono fenomenologiche, nel senso che regolano le trasformazioni di un sistema (gassoso ma anche no) in seguito a processi di scambio di calore o 'lavoro' che coinvolgono cambiamenti di variabili, quali ad esempio la temperatura, la pressione e il volume, senza investigare il fenomeno dal punto di vista microscopico. In altre parole, si tratta di leggi che non pensano al gas come ad un agglomerato di particelle che si muovono secondo le leggi classiche, ma ad un oggetto 'opaco', il cui comportamento viene descrtto da variabili quali temperatura e pressione che cambiano secondo certe regole. Tali regole sono date appunto dalle leggi della termodinamica e si possono riassumere come segue.

La legge, o principio, zero della termodinamica definisce il concetto di temperatura come la proprietà che due corpi hanno in comune quando sono in equilibrio termico, cioè quando il loro stato non cambia. La prima legge invece esprime il principio di conservazione dell'energia, che può essere trasformata (in calore o in lavoro) ma né creata né distrutta. Invece il secondo principio è meno familiare. Può essere formulato in vari modi, tutti equivalenti tra loro. I primi due sono formulati in termini di trasformazioni possibili, mentre il terzo è in termini di una quantità chiamata entropia. Le prime due formulazioni sostanzialmente dicono che il moto perpetuo non esiste. Più precisamente queste formulazioni, rispettivamente chiamate di Clausius e di Kelvin-Planck, dicono che è impossibile trasferire calore da un corpo freddo a un corpo caldo senza l'aiuto di un lavoro esterno, e viceversa che è impossibile trasformare completamente in lavoro il calore assorbito da una data sorgente. Alternativamente si può dire che esiste una variabile, chiamata entropia, che aumenta sempre (o al massimo rimane costante) durante le possibili trasformazioni di un gas.

Queste leggi sono i vincoli a cui le trasformazioni dei gas, pensati come oggetti macroscopici, si devono attenere. Se invece si pensa, come nel caso dei corpi solidi, che anche i gas siano costituiti da particelle che si muovono secondo la dinamica classica, allora in linea di principio si dovrebbe essere in grado di riprodurre le leggi della termodinamica in termini della dinamica Newtoniana delle particelle che compongono il gas. Boltzmann, alla fine del 19esimo secolo, si imbarcò in questa impresa.

Ci sono due difficoltà che si incontrano immediatamente se si vuol portare a termine questo progetto. Prima di tutto, si devono conoscere le forze di interazione tra le particelle, le F da inserire nell'equazione di Newton, che non sono di origine gravitazionale. Inoltre, si devono risolvere le equazioni di Newton per un gran numero di particelle, dell'ordine del numero di Avogadro, $N_A = 6{,}023 \times 10^{23}$. Fortunatamente, il fatto che ci siano moltissime particelle permette di usare metodi statistici e di avere informazioni sufficienti sui fenomeni da spiegare anche con queste limitazioni. La teoria risultante viene chiamata per questo motivo meccanica statistica, ed è stata sviluppata, oltre che dal già menzionato Boltzmann, anche da Gibbs. In questo articolo mi limiterò a discutere l'analisi di Boltzmann.[6]

Vediamo di riassumere, per sommi capi, gli ingredienti della meccanica statistica di Boltzmann. Assumiamo che un gas sia composto da N particelle puntiformi che si muovono secondo le leggi classiche. Per questo motivo, ogni particella è descritta in maniera istantanea dalla coppia composta dalla sua posizione r e dalla sua velocità v. Siccome in ogni gas ci sono N particelle, lo stato del gas ad un determinato istante è dato dal cosiddetto microstato $N = (r_1, \ldots r_N, v_1, \ldots v_N)$, cioè dall'insieme delle posizioni e velocità di ogni particella del gas in quell'istante. L'insieme di tutti i microstati possibili è chiamato spazio delle fasi. Per riprodurre le leggi della termodinamica in termini microscopici prima di tutto dobbiamo descrivere le variabili (macroscopiche) usate nelle

[6] Per un interessante approccio sull'importanza della meccanica di Gibbs, si veda Wallace D., *The Necessity of Gibbisan Mechanics*, in V. Allori, (a cura di), *Statistical Mechanics and Scientific Explanation: Determinism, Indeterminism and Laws of Nature,* Singapore, World Scientific, 2020: 357-383.

leggi della termodinamica, come ad esempio la temperatura, in termini di posizioni e velocità di particelle. Non dovrebbe essere difficile capire come il principio zero e il primo principio della termodinamica non presentano grossi problemi nell'essere analizzati da questo punto di vista. Infatti, la temperatura è definita come l'energia cinetica media delle particelle del gas, e il primo principio esprime la conservazione dell'energia, che vale anche per le particelle. Il problema più serio nella derivazione delle leggi macroscopiche da quelle microscopiche viene dal secondo principio, il quale afferma che l'entropia aumenta sempre. Cos'è, microscopicamente, l'entropia? Perché aumenta sempre? Vedremo in seguito come rispondere a queste domande. Proseguendo invece con ordine, se ci si pensa un attimo si comprende come molte differenze microscopiche non diano origine ad alcuna differenza macroscopica: per esempio, un gas descritto da un dato microstato X e un gas descritto da un altro microstato X', esattamente uguale a X a parte il fatto che la settima particella ora ha velocità un po' più bassa (o è diretta un pochino più in alto, per esempio) sono macroscopicamente indistinguibili, sebbene microscopicamente diversi. Lo stesso vale per differenze di posizione: per esempio, le temperature di due gas, uno descritto da X e l'altro descritto da X'', diverso da X solo perché si scambiano la prima e la 456-esima particella, saranno identiche. Questo significa che lo spazio delle fasi si può suddividere in sottoinsiemi chiamati macrostati Γ, che raggruppano microstati che descrivono gas che sono identici dal punto di vista macroscopico, per esempio hanno la stessa temperatura.

Essendo i macrostati insiemi di microstati, essi hanno una dimensione data dal numero di microstati che contengono. In particolare, si dimostra che esiste un macrostato che è più grande di tutti gli altri di moltissimi ordini di grandezza. Si calcola che il rapporto di dimensioni tra questo macrostato e un qualunque altro sia di circa $10^{10^{23}}$ cioè in sostanza, tale macrostato occupa praticamente tutto lo spazio delle fasi.[7] A cosa corrisponde questo macrostato gigantesco? A quello che termodinamicamente viene chiamato stato di equilibrio. Esso, per esempio, è

[7] Per questa stima si veda Penrose R., *The Emperor's New Mind,* Oxford University Press, 1989.

lo stato che verrà in breve tempo raggiunto da due corpi a temperature diverse posti a contatto tra loro, ed è caratterizzato dall'avere la temperatura comune raggiunta dai due corpi. Oppure descrive lo stato finale dell'evoluzione di un profumo inizialmente spruzzato in una stanza da una persona in un angolo, cioè il fatto che si distribuisca nell'intera stanza; e così via. È quindi lo stato in cui non si osservano più ulteriori cambiamenti macroscopici del gas. La seconda legge, detta in maniera un po' più precisa di prima, dice che l'entropia aumenta sempre finché non diventa massima all'equilibrio. In altri termini, la seconda legge esprime la cosiddetta convergenza all'equilibrio: un sistema continua a cambiare fintanto che non raggiunge lo stato di equilibrio in cui non cambia più. La proposta di Boltzmann a questo punto è di identificare, a meno di un fattore logaritmico per permettere di rendere la quantità additiva, l'entropia S con la 'grossezza' del macrostato: $S = K_B \log |\Gamma|$, dove K_B è la costante di Boltzmann. In questo modo si può ritrovare la seconda legge dal punto di vista della dinamica microscopica, anche se con precisazioni importanti. Vediamo come.

Il microstato, che descrive il gas in maniera completa, si muove nello spazio delle fasi passando per diversi macrostati. Dal punto di vista di quello che accade al gas, questo equivale a dire che il gas assume, per esempio, diverse temperature e diverse entropie nel tempo. Dal punto di vista di ciò che è possibile, il microstato può passare da un certo macrostato ad un macrostato più piccolo: la dinamica non lo impedisce. Però è più probabile che accada l'opposto e cioè che il microstato vada in macrostati sempre più grossi, semplicemente perché essi contengono più microstati accessibili. Questo finché non si raggiunge lo stato di equilibrio, che è il più grande di tutti: è così grande che è in pratica impossibile venirne fuori in tempi osservabili, anche se è comunque possibile in principio. Quindi, riassumendo: per la stragrande maggioranza dei microstati, l'entropia aumenta. Non per tutti però: niente vieta che un microstato sistematicamente finisca in un macrostato più piccolo. In questo caso l'entropia potrebbe in linea di principio diminuire.[8]

[8] Le cose sono in realtà piú complicate di come presentate qui, in particolare, c'è bisogno della cosiddetta ipotesi del passato, secondo cui l'universo è iniziato con un'entropia molto bassa. Questa è necessaria per garantire che l'entropia aumenti verso il futuro (come visto nel testo) e non anche verso il passato: per le stesse ragioni per cui è probabile che l'entropia

4. La spiegazione in meccanica statistica e il modello a legge di copertura

Le domande da porsi sono ora le seguenti: è riuscito Boltzmann a spiegare la seconda legge della termodinamica? Se sì, come? Come si confronta questo tipo di spiegazione con quelli visti? Inoltre, è questa una spiegazione soddisfacente?

Vediamo prima come si rapporta la derivazione di Boltzmann con le derivazioni viste in precedenza. È precisa o è approssimata? Sembrerebbe ragionevole affermare che la derivazione delle leggi termodinamiche in termini di quelle microscopiche avvenga in maniera approssimata. Nel caso dell'entropia infatti si dimostra che essa aumenta per la stragrande maggioranza dei gas. In altre parole, i gas 'anti-termodinamici,' per i quali cioè l'entropia diminuisce, sono pochi. Se chiamiamo E l'insieme di tali casi eccezionali, o 'anti termodinamici', per cui cioè l'entropia diminuisce, allora si può dimostrare che tale insieme è molto piccolo rispetto all'insieme T dei microstati 'termodinamici', e qui l'entropia aumenta: $E << T$.

Questo è in parte simile alla derivazione del moto dei gravi, anche se in quel caso si assumeva che l'altezza massima h di un grave dal suolo terrestre fosse trascurabile rispetto al raggio della Terra R: $h << R$. Comunque, la differenza sembra essere minima: in entrambi i casi si tratta di una derivazione non esatta, valida solo sotto certe approssimazioni. Per rafforzare l'idea che il tipo di spiegazione sia lo stesso, osserviamo che in entrambi i casi ogni spiegazione è una predizione e viceversa: dato un gas (x) non in equilibrio (A), si dimostra che a meno di casi eccezionali esso si espanda (A). Questa dimostrazione è sia una

aumenti nel futuro è piú probabile che lo stato presente derivi da un macorstato piú grande (quindi che l'entropia diminuisca), quando invece non è empiricamente cosí. Per questo e altro sulla spiegazione di Bolzmann si vedano i seguenti testi: Albert D. Z., *Time and Chance*, Harvard University Press, 2001; Goldstein S*., Boltzmann's Approach to Statistical Mechanics*, in J. Bricmont, *et al.*, (a cura di), *Chance in Physics. Foundations and Perspectives*, Berlin, Springer, 2001, pp. 39-54;

Zanghì N., *I fondamenti concettuali dell'approccio statistico in fisica,* in V. Allori, M. Dorato, F., Laudisa, & N. Zanghì, (a cura di), *La Natura Delle Cose. Introduzione ai Fondamenti e alla Filosofia della Fisica*, Roma, Carocci, 2005, pp. 139-228.

previsione che una spiegazione dell'espansione del gas. Anche in questo caso, come nel caso della derivazione del moto dei gravi, non si ha il problema dell'asimmetria perché le approssimazioni valgono in un senso ma non nell'altro.

Si potrebbe però notare come la situazione sia diversa in un altro senso importante: mentre nel caso dei gravi si dimostra che tutti i corpi che si muovono secondo le leggi classiche, nelle condizioni opportune, si muovono con accelerazione costante, nel caso dei gas abbiamo visto invece che possiamo dimostrare solo che la stragrande maggioranza di essi si espanderà. In altre parole, non è vero che un gas le cui componenti obbediscono alla legge di Newton è garantito evolvere verso il suo stato di equilibrio: esiste sempre la possibilità di scegliere una condizione iniziale speciale per cui l'entropia non aumenta. In questo modo, la seconda legge viene riprodotta, ma solo nella stragrande maggioranza dei casi.

Questo sembra suggerire che ci sia qualche cosa di diverso in questo tipo di spiegazione. Molti hanno reinterpretato la spiegazione della seconda legge della termodinamica in termini di 'stragrande maggioranza' di stati, dicendo che la probabilità che aumenti l'entropia è alta.[9] In altre parole, invece di dire che per la stragrande maggioranza dei casi i gas si espandono, e questo spiega perché questo gas si espande, si potrebbe dire che la spiegazione è data dal fatto che la probabilità del gas di espandersi sia alta. Quindi si potrebbe scrivere il seguente schema esplicativo del fatto che un gas (*xx*) non in equilibrio (*A*) si espanda (*B*):

$$\frac{\begin{array}{c} x \text{ è } A \\ Prob(x \text{ è } A \text{ e } B) = r \quad (\text{con } r \text{ molto alto}) \end{array}}{\therefore \qquad x \text{ è } B}$$

dove *Prob* (*x* è *A* e *B*) = (con *r* molto alto) viene letto come "la probabilità che un gas espanda è *r*, che è un numero molto grande". Quindi in questo caso non si avrebbe piú un processo deduttivo ma uno induttivo molto forte.

[9] Si veda per esempio David Z. Albert, *op. cit.*, 2000.

Si potrebbe obiettare che il tipo di inferenza usata in meccanica statistica non sembra induttiva: per calcolare il numero di microstati eccezionali si usano teoremi, il che suggerisce una derivazione deduttiva. Ma in realtà non c'è contraddizione perché quello che la meccanica statistica mostra deduttivamente, con dei teoremi, è che il numero di microstati eccezionali E è molto piccolo rispetto a quelli termodinamici T. Poi si usa questo fatto per spiegare, con quella che sembra un'inferenza induttiva forte, i vari fenomeni osservati. Quindi si deduce in quale approssimazione si deve mettersi per riprodurre la seconda legge (cioè si deduce che $E << T$ – a differenza di quello che sucedeva per la caduta dei gravi in cui l'approssimazione in cui mettersi, ($h << R$), era evidente.

Un'altra obiezione, a mio avviso piú valida, è che il concetto di probabilità non sembra essere necessario: qui si sta parlando di ordini di grandezza, non di numeri precisi. In altre parole, dire che un fenomeno ha probabilità 0.50 di accadere è diverso dal dire che abbia probabilità di accadere pari a 0.45. Invece nella derivazione della seconda legge tali differenze non contano: il numero di casi eccezionali, cioè il numero di microstati per i quali l'entropia aumenta, cioè i gas che non espandono ma si ritirano, sono pochissimi e poco importa che siano una frazione pari a 0,0001 o pari a 0,0002 del totale dei gas. Quello che importa è che siano molti meno di quelli che si espandono, senza precisare quanto meno.[10]

Per questo motivo (fra altri), alcuni hanno proposto che invocare la nozione di probabilità non sia necessario, e che basti la nozione più debole di *tipicità*.[11] Questo equivale a tradurre "il gas espande per la stragrande maggioranza delle condizioni iniziali" con "l'espansione dei gas è un fenomeno tipico" al posto di "la probabilità che il gas si espanda è elevata".

[10] Per una discussione sulle differenze tra i concetti di probabilità e tipicalità, si veda: Goldstein S., *Typicality and Notions of Probability in Physics*, in Y. Ben-Menahem, e M. Hemmo, (a cura di), *Probability in Physics,* Heidelberg, Springer, 2011, pp. 59-71; Wilhelm I., *Typical: A Theory of Typicality and Typicality Explanation*, «The British Journal for the Philosophy of Science» axz016., 2019. Per critiche alla tipicità si veda: Frigg R., e Werndl C., *Demystifying Typicality*, «Philosophy of Science» 5/2012, pp. 917-929; Frigg R., *Why Typicality Does Not Explain the Approach to Equilibrium*, in M. Suárez, (a cura di.), Probabilities, Causes and Propensities in Physics, Dordrecht, Springer, 2011: pp. 77-93; Werndl, C.*, Justifying Typicality Measures of Boltzmannian Statistical Mechanics and Dynamical Systems*, «Studies in History and Philosophy of Modern Physics» 44, 4/2013, pp. 470-479.

[11] Sheldon Goldstein, *op. cit.*, 2001; Nino Zanghì, *op. cit.*; 2005.

5. Tipicità vs. probabilità

Un fenomeno è detto tipico se e solo se si può mostrare che la stragrande maggioranza di sistemi simili all'originale ma con diverse condizioni iniziali mostrano lo stesso comportamento. Tecnicamente, la nozione di 'stragrande maggioranza' viene descritta da una misura, come nel caso della probabilità, ma in questo caso l'unico scopo della misura è contare le pochissime eccezioni al comportamento osservato senza badare a troppi dettagli (come invece farebbe la probabilità). Per questo motivo, la nozione di tipicità è più debole di quella di probabilità. In questo modo, se un oggetto *x* ha la proprietà *A*, e la proprietà *B* è tipica per gli oggetti di tipo *A*, allora la spiegazione del perché *x* ha la proprietà *B* è data dal seguente schema:

$$\frac{\begin{array}{c} x \text{ è } A \\ Tip\ (\text{x è } A \text{ e } B) \end{array}}{\therefore\ \text{x è } B}$$

dove *Tip* (·) è un operatore simile a *Prob* (·) che si legge: "tipicamente, tutti gli *A* sono *B* ". In altri termini, la spiegazione del fatto che un dato sistema ha una certa proprietà *B* viene fornita mostrando che questa proprietà è tipica per gli oggetti di quel tipo (oggetti di tipo *A*). Per esempio, la spiegazione del fatto che questo gas si espanda è data dal fatto che si riesca a provare che l'espansione è un fenomeno tipico per i gas non in equilibrio. Ovvero, per la stragrande maggioranza dei casi si può mostrare che i gas si espandono. Eccezioni esistono, ma sono rare.

Confrontando questo schema esplicativo e quello del modello SI, facciamo notare che formalmente sono identici. La differenza è nella logica degli operatori (*Tip vs Prob*), nel senso che abbiamo visto che i due concetti sono distinti.[12]

Si noti infatti come alcune spiegazioni probabilistiche non siano spiegazioni basate sulla tipicità del fenomeno. Si consideri per esempio il nucleo di un dato elemento che ha la probabilità di decadere pari a 0.4

[12] Si veda Crane H., & Wilhem, I., *The Logic of Typicality*, in V. Allori, (a cura di), *op. cit.*, 2020, pp.173-230, per due proposte per una logica formale per l'operatore *Tip*, una basata sulla logica modale proposizionale e una sulla logica intuizionistica.

(qualunque numero andrebbe bene, purché non sia elevatissimo). Quindi si può spiegare perché tale nucleo sia decaduto usando il modello IS, fornendo quindi una spiegazione probabilistica. Invece, data la scelta della probabilità di decadimento come piccolo (è il 40% non il 90%), non è tipico per tale nucleo decadere.

Un'altra osservazione interessante riguardo il confronto tra spiegazione probabilistica e tipica è la seguente. Quando ho introdotto il modello SI ho fatto l'esempio della mela:

Se uno mostra che è molto probabile che una mela rossa sia anche dolce, allora si spiega perché questa mela rossa sia anche dolce. Ritengo in realtà che, assumendo di accettare questo tipo di spiegazione, presumibilmente il motivo per cui si ritiene di aver fornito una spiegazione in questo caso è perché si ha in mente un fenomeno tipico più che un fenomeno probabile. Qui infatti i dettagli su quanto questo sia probabile (0.98 o 0.97?) non contano granché, fino a quando i valori rimangono elevati. Quindi si sarebbe potuto dire: abbiamo mostrato che le mele rosse sono tipicamente dolci, e questo spiega perché questa mela rossa è dolce. Questo è un ragionamento basato sulla tipicità, compatibile con l'idea originale di Hempel che il modello SI funzioni solo per probabilità alte.[13]

In aggiunta, per rinforzare l'idea che le due spiegazioni (quella probabilistica e quella basata sulla tipicità) siano di natura diversa, si potrebbe osservare che le spiegazioni probabilistiche sono contro-intuitive, mentre quelle basate sulla tipicità non lo sono. Per esempio, si immagini di esser risultati positivi ad un test diagnostico per identificare una malattia rara, diciamo una di quelle per cui si registra un caso ogni 10 mila persone (grado di incidenza). Dato un test positivo, qual'è la probabilità di avere effettivamente la malattia, se la specificità del test

[13] In seguito, critici hanno argomentato che il modello funzioni anche per piccole probabilità. A questo proposito si veda ad esempio Strevens M., *Do Large Probabilities Explain Better?* «Philosophy of Science» 67/2000, pp. 366-90, per un argomento che la forza dell'induzione non sia necessariamente collegata alla forza della spiegazione. Questo non invalida il mio discorso, perché non sto argomentando che tutte le spiegazioni siano spiegazioni basate sulla tipicità.

è del 99% e la sensibilità del 100%? Cioè, qual'è la probabilità che si sia effettivamente malati nell'ipotesi che il test rilevi 99 positivi su 100, mentre non ci sono falsi negativi, cioè malati non positivi al test? La probabilità di avere la malattia dato il test positivo, calcolata usando il teorema di Bayes, è molto bassa, attorno all'1%. In altri termini, il test mostra un falso positivo il 99% delle volte. Questo, molto rozzamente, perché in un certo senso l'estrema rarità della malattia 'vince' sull'alta, ma non altissima, sensitività del test.[14] Quindi risultare positivi ad una malattia senza effettivamente essere malati viene spiegato dal fatto che il teorema di Bayes mostra che la probabilità di avere effettivamente la malattia è bassa, se la malattia è abbastanza rara, anche se la specificità del test è elevata. Questo risultato è estremamente contro-intuitivo: la maggior parte delle persone che ricevono un risultato positivo al test sarebbe sicuramente terrorizzata. Anzi, la maggior parte dei medici che leggono i test di solito danno consigli che di fatto ignorano il risultato del teorema di Bayes.[15] Al contrario, i ragionamenti basati sul concetto di tipicità sono semplicissimi: si può argomentare con studi di genetica che tipicamente i cani sono affettuosi,[16] e questo è il motivo per cui il mio cane è affettuoso.

[14] Questo è un modo per vedere da dove vengano questi numeri senza usare direttamente l'equazione del teorema di Bayes. Si pensi ad una popolazione di 10.000 persone. Visto che l'incidenza della malattia è di 1 su 10,000, nella popolazione ci sarà 1 malato e 9.999 sani. Quel malato risulterà sicuramente positivo al test per diagnosticare la malattia, perchè non ci sono falsi negativi (malati non positivi), come da assunto. Invece tra i non malati si ha la seguente distribuzione. Visto che i falsi positivi (i sani positivi) sono 1 su 100 (la sensitività è del 99%), i non malati positivi saranno $9.999 \times \frac{1}{100}$, mentre il resto dei sani ($9.999 \times \frac{99}{100}$) sarà negativo. La probabilità di avere effettivamente la malattia dato un test positivo è quindi dato dal numero di malati positivi (cioè 1) diviso il numero totale di positivi al test. Quest'ultimo è il numero di positivi malati sommato al numero di positivi non malati, quindi pari a $1 + 9.999 \times \frac{1}{100} = 100{,}99$. Quindi si ha *prob* (essere malato,dato un test positivo) $\frac{1}{100{,}99} = 0{,}0099$, ovvero neanche l'1%.

[15] Si veda Casscells W., Schoenberger A., Grayboys T., *Interpretation by physicians of clinical laboratory results*, «New England Journal of Medicine», 299/1978, pp. 999-1000; Eddy D.M., *Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities*, in D. Kahneman, P. Slovic, & A. Tversky (a cura di), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases,* Cambridge, Cambridge University Press, 1982, pp. 249-267; Gigerenzer G., & Hoffrage U., *How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency* formats, «Psychological Review», 102/1995, pp. 684-704. Interessante è anche il seguente testo: Besozzi M., *Errori Cognitivi, Proabilità e Descisioni Mediche*, 2013, disponibile qui: https://www.bayes.it/ebook/ECPEDM.pdf

[16] Wynne C.D.L., *Dog Is Love: Why and How Your Dog Loves You*, Houghton Mifflin Harcourt, 2019.

Questo è anche legato al fatto che spesso seguiamo stereotipi esplicativi. Come si spiega che Federica, che doveva spostare il suo divano da una parete all'altra, non ha chiesto aiuto a suo padre ottantenne? Si spiega osservando che non si chiede ad un ottuagenario di spostare il divano perché *tipicamente* gli ottuagenari non sono sufficientemente in forma da spostare divani senza farsi del male. Questo è uno stereotipo, dato che non tutti gli ottuagenari sono così, ma di solito è efficiente assumere che sia così perché quanto affermato dallo stereotipo è vero per la maggior parte degli ottuagenari. Come si spiega che Roberto, che non trovava la farmacia, non ha chiesto indicazioni al bambino di quattro anni che giocava nel parco di fronte a lui? Si spiega osservando che non si chiedono informazioni stradali ai bambini di quattro anni perché *tipicamente* i bambini di quattro anni non hanno percezioni spaziali affidabili, e così via.[17]

Quindi, con forse un pizzico di ironia, si può dire che fornendo una spiegazione tipica si fornisce uno stereotipo in cui le eccezioni sono molto molto poche: lo stereotipo del gas è di espandersi, anche se è possibile che questo non succeda.

È vero che spesso parliamo in termini di probabilità, ma quando i dettagli non contano molto la spiegazione che forniamo è basata sulla tipicità, non sulla probabilità: non ci chiediamo con quale probabilità esatta sia vero che un bambino di quattro anni non sia in grado di dare indicazioni stradali. Ci basta sapere che la stragrande maggioranza di essi non lo siano.

6. È adeguata la spiegazione basata sulla tipicità?

Indipendentemente dalla relazione tra la spiegazione della seconda legge della termodinamica in termini di tipicità e il modello a legge di copertura, ci si può domandare se il tipo di spiegazione basato sulla tipicità sia o meno adeguato.

Prima di tutto, osserviamo che lo schema esplicativo presentato non sembra far uso della nozione di causa. Questo è compatibile col fatto che in fisica la nozione di causa è palesemente assente. Però la nozione

[17] Bloom P., *Just Babies: The origins of good and evil*. New York, Crown, 2013.

di tipicità viene usata per fornire spiegazioni anche in altri ambiti in cui invece la nozione di causalità può essere rilevante. Si potrebbe infatti obbiettare che per esempio nelle cosiddette scienze sociali la spiegazione debba essere una sorta di spiegazione causale. In realtà si può mostrare come sembra che ci sia la giusta correlazione tra tipicità e causa, nel senso che anche quelle che sembrano spiegazioni causali sono in verità spiegazioni basate sulla tipicità. Infatti, si consideri per esempio l'affermazione "le mele rosse sono tipicamente dolci". Questa può essere spiegata da un fattore genetico che determina sia il colore che il sapore delle mele: questa mela è quello che è a causa dei suoi geni, e la causa del fatto che ci siano mele rosse e dolci è la presenza di quel fattore genetico. Però questa affermazione è essa stessa un'affermazione di tipicità: quel gene tipicamente fa emergere mele sia rosse che dolci, anche se è possibile che alcune mele siano rosse e non dolci. In questo modo si vede come lo schema esplicativo basato sulla tipicità non si sposi necessariamente al modello a leggi di copertura, essendo compatibile con una comprensione causale della spiegazione.[18]

A parte questo, una caratteristica fondamentale della spiegazione basata sulla tipicità è il fatto di non essere universale: il fenomeno si spiega per la stragrande maggioranza dei casi, ma non per tutti. La domanda cruciale è se questo sia sufficiente a spiegare effettivamente il fenomeno in maniera adeguata.

Tra i vari criteri usati per determinare l'adeguatezza di una spiegazione, si annoverano i seguenti: capacità informativa, capacità predittiva e attendibilità (*expectability*). Analizzando il modello di spiegazione basato sulla tipicità in base a questi criteri si può argomentare che è adeguato. Infatti, un fenomeno viene adeguatamente spiegato quando, per esempio, si è in grado di fornirne una descrizione informativa e concisa. Lo schema di tipicità è sicuramente semplice, come mostrato dalla sua formalizzazione riassumibile in una singola frase, visto che basta mostrare che un fenomeno è tipico senza perdersi in troppi dettagli. Lo schema è anche informativo, dato che ci dice come sarà il comportamento della stragrande maggioranza dei sistemi, anche se non di tutti. Infine, come già enfatizzato, la connessione con il

[18] Si veda anche Isaac Wilhelm, *op. cit.,* 2002.

modello ND fa sì che questo approccio abbia anche grandi capacità predittive. Infatti, se si è in grado di mostrare che una proprietà è tipica, allora si potrà anche prevedere con alto grado di confidenza l'osservabilità di tale proprietà in sistemi simili a quello analizzato. Ovvero, dato che si è mostrato che un gas *tipicamente* si espande, questo è quello che ci si deve aspettare facciano i gas che osserveremo in futuro. Tali predizioni non potrebbero essere fatte con simile grado di confidenza se si riuscisse a spiegare il fenomeno solo per alcuni casi, e non la maggior parte. Infatti, se si riuscisse a mostrare solo che alcuni gas, ma non la maggioranza, si espandono, sarebbe difficile dire cosa aspettarsi da un gas che non è ancora stato osservato, perché l'insieme dei gas che non si espandano non è necessariamente piccolo. Quindi, sebbene il fenomeno non venga riprodotto per *ogni* condizione iniziale, quello che sembra rendere la spiegazione accettabile è che esso possa comunque essere riprodotto per la *stragrande maggioranza* dei casi, *e non solo per pochi* casi.

Alcuni hanno suggerito che quando si mostra che un fenomeno è tipico, allora non c'è niente altro da spiegare perché spiegare significa rimuovere l'"effetto sorpresa".[19] Per esempio, il fatto che un gas a caso si espanda non è sorprendente, una volta che si comprende la spiegazione fornita da Boltzmann. Quello che sarebbe sorprendente è se un gas, scelto a caso, non si espandesse. Una spiegazione meno soddisfacente sarebbe una in cui si scegliesse accuratamente una condizione iniziale in modo che essa riproduca il fenomeno, che invece non sarebbe riprodotto per tutti gli altri casi. Se accettassimo questo tipo di spiegazione, appositamente scegliendo la condizione iniziale (*fine tuning*), si potrebbero spiegare troppe cose. L'idea di spiegare intesa come rimuovere l'"effetto sorpresa" è connessa a quello che Hempel chiamava "attendibilità" (*expectability*). Non ci stupiamo che un pezzo di sale si dissolva in acqua perché sappiamo la ragione per cui questo succede: gli ioni

[19] Bricmont J., *Bayes, Boltzmann and Bohm: Probabilities in Physics*, in J. Bricmont, G.C. Ghirardi, D. Dürr, F. Petruccione, M.C.Galavotti, & N. Zanghí, (a cura di), *Chance in Physics: Foundations and Perspectives*, Berlin, Springer, 2001, pp. 3-21; Bricmont, J., *Probabilistic Explanations and the Derivation of Macroscopic Laws,* in V. Allori, (a cura di), *op.cit.*, 2002, pp. 31-64.

positivi dell'acqua (H+) attraggono gli ioni negativi del sale (Cl-), e quelli negativi dell'acqua (O-) attraggono gli ioni positivi del sale (Na+). Ci aspettiamo di osservare il fenomeno, che accadrà indipendentemente dalle condizioni iniziali degli ioni (compatibili col fatto che siano in soluzione). Invece, consideriamo il caso di una scimmia che, digitando a caso su una tastiera, finisca per scrivere la *Divina Commedia*. Si può spiegare questo fatto scegliendo appositamente una condizione iniziale per cui questo effettivamente capiti. In questo senso il fenomeno è possibile: non c'è nessuna legge di natura che lo proibisca. Quindi c'è un senso in cui il fenomeno viene spiegato. Però non ci aspettiamo che questo accada. Il fenomeno è quindi sorprendente, e indicare una condizione iniziale specialissima, magari unica, per cui il fenomeno possa essere riprodotto non aiuta a diminuire la sorpresa. Quindi c'è un senso in cui non stiamo spiegando il fenomeno in maniera completa, se ci rifacciamo a condizioni iniziali particolari. In altre parole, non ci aspettiamo che scimmie scrivano libri schiacciando tasti a caso. Questo non è qualcosa che tipicamente le scimmie fanno e proprio per questo, se succede, troviamo questo fatto sorprendente – perché una condizione iniziale diversa non avrebbe dato lo stesso risultato. Invece, se si riesce a mostrare che la maggior parte delle condizioni iniziali dà luogo a quel fenomeno, cioè se si dimostra che il fenomeno è indipendente dalla condizione iniziale, allora la sorpresa cessa. Quindi questo suggerisce che quando si cerca la spiegazione di un fenomeno in realtà quello che si cerca è un meccanismo che rimuova la sorpresa nel vedere tale fenomeno, e un meccanismo che garantisce questo è uno tale per cui o la totalità o la stragrande maggioranza dei casi genera tale fenomeno.

Si potrebbe obiettare che ci sia comunque qualche cosa che manca, perché dopo tutto non si riesce a riprodurre il fenomeno per *tutte* le condizioni iniziali. Quindi si potrebbe sostenere che si debba dare una spiegazione di un fenomeno anche quando questo sia atipico. Sebbene questa sia una posizione possibile, è difficile però capirne la motivazione: se la forza di avere una spiegazione per tutti i casi viene dal fatto che questo rende il fenomeno prevedibile, allora tale forza rimane per il fenomeno tipico ma non per quello atipico (per definizione). Quindi, che aspetto avrebbe una spiegazione di un fenomeno atipico? Presumibilmente farebbe riferimento alle condizioni iniziali speciali. Cosa spiega che l'intero testo della *Divina Commedia* sia uscito dalla macchina da scrivere usata da una scimmia? Quello che spiega questo fatto è che esista una condizione iniziale particolarissima che lo abbia permesso. Non è forse una spiegazione accettabile, sebbene non sia basata sul concetto di tipicità? Rispondendo affermativamente alcuni hanno argomentato che richiedere che per spiegare si debba riprodurre il fenomeno per la stragrande maggioranza delle condizioni iniziali sia in verità troppo restrittivo: spiegazioni che utilizzano condizioni iniziali speciali sono comunque spiegazioni. Infatti, basta fornire una condizione iniziale per cui il fenomeno emerga senza necessariamente menzionare per quante condizioni iniziali questo sia vero.[20]

Sebene questa posizione appaia legittima, in questo caso si perde a mio avviso il legame tra spiegazione e attendibilità, perchè la sorpresa di osservare il fenomeno deriva dal realizzarsi di una condizione iniziale atipica, speciale. In altre parole, ci si attende un fenomeno se è tipico, quindi la tipicità di un fenomeno minimizza la sorpresa. Al contrario se il fenomeno è atipico, se quindi il fenomeno emerge soltanto per condizioni iniziali speciali, si massimizza la sorpresa: si rimane ancora più sorpresi di ritrovarsi in quel raro caso in cui il fenomeno si realizza. Il fenomeno atipico non contraddice o falsifica la teoria, in quanto viene previsto: esiste una condizione iniziale in cui si realizza. Ma non è chiaro che venga spiegato, se si vuole connettere l'attendibilità alla spiegazione, dato che il feomeno tipico non ce lo si può aspettare per definizione. E perché si dovrebbero connettere così fortemente le due nozioni? Perché se non lo si facesse la spiegazione sembrerebbe *ad hoc*, artificiale, disperata: la scimmia che scrive la *Divina Commedia* non è quello che le scimmie tipicamente fanno. Osservare un fenomeno di questo tipo spiega come mai si trovi sorprendente che una scimmia scriva libri famosi, mentre non ci si meraviglia che i gas espandano. Oltre a questo, mi risulta difficile capire cosa si possa chiedere di più.

[20] Si veda per esempio Valentini A.*, Foundations of Statistical Mechanics and the Status of the Born Rule in the de Broglie-Bohm pilot-wave theory,* in V. Allori, (a cura di), *op.cit.*, 2020, pp. 423-478.

In conclusione, aggiungo che l'idea che una spiegazione soddisfacente faccia spesso riferimento alla tipicità viene confermata dalla pratica scientifica. Per esempio, una delle ragioni per cui è stata proposta la teoria dell'universo inflazionario è che il modello del Big Bang richiede assunzioni stringenti sulle condizioni iniziali. Al contrario, la teoria inflazionaria è in grado di spiegare i fenomeni senza far riferimento a condizioni iniziali speciali, e proprio per questo motivo è stata considerata una teoria migliore.[21]

7. Conclusioni

In questo articolo ho argomentato che il modello a legge di copertura, secondo cui una spiegazione è la conclusione di un argomento che contiene leggi di natura come premesse, con le debite precisazioni risulta piuttosto adatto a descrivere le spiegazioni che si incontrano in fisica classica. Questo è vero sia quando la derivazione del fenomeno è esatta, sia quando si ricorre ad approssimazioni. Ho mostrato poi come la spiegazione delle leggi della termodinamica in termini della meccanica statistica abbia in comune alcuni aspetti del modello nomologico deduttivo, ma anche del modello statistico induttivo. A questo proposito ho evidenziato come alcuni abbiano argomentato come, invece del concetto di probabilità usato nel modello statistico induttivo, sia invece preferibile usare in questo contesto il concetto di tipicità. Ho infine mostrato come si possa argomentare a favore del fatto che tale tipo di spiegazione, che ho chiamato spiegazione basata sulla tipicità, risulti effettivamente un tipo di spiegazione adeguata e anche comune nella pratica scientifica.

[21] Guth A. H. *Inflationary Universe: A Possible Solution for the Horizon and Flatness Problems*, «Physical Review D» 23/1981, pp. 347-356; Guth A.H., & Steinhardt P.J., *The Inflationary Universe*, «Scientific American», 1984, pp. 116-128.

Bibliografia

Albert D.Z., *Time and Chance*, Harvard University Press, 2001.

Arnold V.I., *Metodi matematici della meccanica classica*, Roma, editori Riuniti, 1992.

Besozzi M. *Errori Cognitivi, Proabilità e Descisioni Mediche*, 2013: https://www.bayes.it/ebook/ECPEDM.pdf

Bloom P., *Just Babies: The origins of good and evil*. New York, Crown, 2013.

Bricmont J., *Bayes, Boltzmann and Bohm: Probabilities in Physics*, in J. Bricmont, G.C. Ghirardi, D. Dürr, F. Petruccione, M.C.Galavotti, & N. Zanghí, (a cura di), *Chance in Physics: Foundations and Perspectives*, Berlin, Springer, 2001, pp. 3-21.

Bricmont, J., *Probabilistic Explanations and the Derivation of Macroscopic Laws*, in V. Allori, (a cura di), *Statistical Mechanics and Scientific Explanation: Determinism, Indeterminism and Laws of Nature*, Singapore, World Scientific, 2002, pp. 31-64.

Casscells W., Schoenberger A., Grayboys T., *Interpretation by physicians of clinical laboratory results*, «New England Journal of Medicine», 299/1978, pp. 999-1000

Crane H., & Wilhem, I., *The Logic of Typicality*, in V. Allori, (a cura di), *Statistical Mechanics and Scientific Explanation: Determinism, Indeterminism and Laws of Nature*, Singapore, World Scientific, 2020, pp. 173-230.

Dowe P., *Wesley Salmon's Process Theory of Causality and the Conserved Quantity Theory*, «Philosophy of Science», 59, 2/192, pp. 195-216.

Eddy D. M. *Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities*, in D. Kahneman, P. Slovic, & A. Tversky (a cura di), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*, Cambridge, Cambridge University Press, 1982, pp. 249-267.

Friedman M., *Explanation and Scientific Understanding*, «Journal of Philosophy», 71/1974, pp. 5-1.

Frigg R., e Werndl C., *Demystifying Typicality*, «Philosophy of Science» 5/2012, pp. 917-929.

Frigg R., *Why Typicality Does Not Explain the Approach to Equilibrium,* in M. Suárez, (a cura di.), *Probabilities, Causes and Propensities in Physics*, Dordrecht, Springer, 2011: pp. 77-93.

Gigerenzer G., & Hoffrage U., *How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats*, «Psychological Review», 102/1995, pp. 684-704.

Goldstein S., *Boltzmann's Approach to Statistical Mechanics*, in J. Bricmont, *et al.*, (a cura di), *Chance in Physics. Foundations and Perspectives*, Berlin, Springer, 2001, pp. 39-54.

Goldstein S., *Typicality and Notions of Probability in Physics*, in Y. Ben-Menahem, e M. Hemmo, (a cura di), *Probability in Physics*, Heidelberg, Springer, 2011, pp. 59-71.

Guth A. H. *Inflationary Universe: A Possible Solution for the Horizon and Flatness Problems*, «Physical Review D» 23/1981, pp. 347-356.

Guth A. H., & Steinhardt P.J., *The Inflationary Universe*, «Scientific American», 1984, pp. 116-128.

Hempel C. G, Oppenheim P., *Studies in the Logic of Explanation*, in «Philosophy of Science», 15/1948, pp. 135-175.

Hempel C. G., *Aspects of Scientific Explanation and Other Essays in the Philosophy of Science*, New York, The Free Press, 1965.

Kitcher P., *Explanation, Conjunction and Unification*, «Journal of Philosophy», 73/1976, pp. 207-12.

Kitcher P., *Explanatory Unification*, «Philosophy of Science», 48/1981, pp. 507-31.

Kitcher P., *Explanatory Unification and the Causal Structure of the World*, in Kitcher P., Salmon W., (a cura di.), 1989, *Scientific Explanation*, Minneapolis. University of Minnesota Press, 1989, pp. 401-505.

Penrose R., *The Emperor's New Mind,* Oxford University Press, 1989.

Salmon W., *Statistical Explanation and Statistical Relevance*, Pittsburgh, University of Pittsburgh Press, 1971.

Salmon W., *Scientific Explanation and the Causal Structure of the World*, Princeton, Princeton University Press, 1984.

Salmon W., *Causality Without Counterfactuals*, «Philosophy of Science», 61, 2/1994, pp. 297-312.

Salmon W., *Causality and Explanation: A Reply to Two Critiques*, «Philosophy of Science», 64, 3/1997, pp. 461-477.
Salmon W., *Causality and Explanation*, New York, Oxford University Press, 1998.
Strevens M., *Do Large Probabilities Explain Better?* «Philosophy of Science» 67/2000, pp. 366-90.
Valentini A., *Foundations of Statistical Mechanics and the Status of the Born Rule in the de Broglie-Bohm pilot-wave theory*, in V. Allori, (a cura di), *Statistical Mechanics and Scientific Explanation: Determinism, Indeterminism and Laws of Nature*, Singapore, World Scientific, 2020, pp. 423-478.
Wallace D., *The Necessity of Gibbisan Mechanics,* in V. Allori, (a cura di), *Statistical Mechanics and Scientific Explanation: Determinism, Indeterminism and Laws of Nature,* Singapore, World Scientific, 2002, pp. 583-613.
Werndl, C., *Justifying Typicality Measures of Boltzmannian Statistical Mechanics and Dynamical Systems*, «Studies in History and Philosophy of Modern Physics» 44, 4/2013, pp. 470-479.
Wilhelm I., *Typical: A Theory of Typicality and Typicality Explanation*, «The British Journal for the Philosophy of Science» axz016., 2019.
Woodward, J. *The Causal Mechanical Model of Explanation*, in Kitcher P., Salmon W., (a cura di.), 1989, *Scientific Explanation,* Minneapolis. University of Minnesota Press, 1989, pp. 357-383.
Woodward J., *Explanation, Invariance and Intervention*, «Philosophy of Science», 64/1997, pp. 26-41.
Woodward J., *Explanation and Invariance in the Special Sciences*, «The British Journal for the Philosophy of Science», 51/2000, pp. 197-254.
Woodward J., *What is a Mechanism? A Counterfactual Account*, «Philosophy of Science», 69/2002, pp. 366-377.
Woodward J., *Making Things Happen: A Theory of Causal Explanation*, New York, Oxford University Press, 2003.
Woodward J., *Counterfactuals and Causal Explanation*, «International Studies in the Philosophy of Science», 18, 1/2003, pp. 41-72.

Wynne C.D.L., *Dog Is Love: Why and How Your Dog Loves You,* Houghton Mifflin Harcourt, 2019.

Zanghì N., *I fondamenti concettuali dell'approccio statistico in fisica*, in V. Allori, M. Dorato, F., Laudisa, e N. Zanghì, (a cura di.), *La Natura Delle Cose. Introduzione ai Fondamenti e alla Filosofia della Fisica*, Roma, Carocci, 2005, pp.139-228.

La fallacia della composizione nelle dottrine economiche di Hume

Paolo Maffezioli

Introduzione

La fallacia della composizione è un tipo di ragionamento, apparentemente valido, in cui si conclude che un intero gode di una certa proprietà, dal fatto che una o più parti di esso ne godono[1]. Dato che vi sono proprietà, chiamate talvolta in logica ereditarie[2], per cui l'inferenza dalle parti all'intero non conduce in errore, ed altre per cui tale inferenza invece è illegittima, la fallacia della composizione riposa sulla credenza infondata che tutte le proprietà siano ereditarie. La fallacia della composizione è probabilmente la fallacia più nota in economia[3]. Il merito di aver messo in guardia gli economisti contro questo tipo di errore logico va senza alcun dubbio attribuito a John Maynard Keynes che, nella sua celebre *Teoria generale dell'occupazione, dell'interesse e della moneta*, si servì dell'argomento per composizione per formulare il famoso paradosso della parsimonia[4]. L'obiettivo di Keynes era mostrare che la collettività e gli individui non sempre obbediscono alle stesse leggi economiche e che, pertanto, non è detto che ciò che vale per i privati cittadini e le imprese, necessariamente valga anche per la nazione nel suo complesso. «L'errore sta nella deduzione plausibile che, quando un individuo risparmia, egli aumenti di un uguale ammontare

[1] Nolt, Rohatyn e Varzi, 2007, pp. 224-225.
[2] Woods e Walton, 1977.
[3] Woods, Irvine e Walton, 2000.
[4] Keynes, 2013.

l'investimento complessivo. È vero che quando un individuo risparmia egli aumenta la propria ricchezza; ma la conclusione che aumenti ugualmente la ricchezza complessiva non tiene conto della possibilità che un atto individuale di risparmio possa esercitare reazioni sul risparmio di qualcun altro e quindi sulla ricchezza di qualcun altro»[5].

In questo lavoro mostrerò che, quasi due secoli prima, David Hume ricorse alla fallacia della composizione per convincere gli *speculative politicians*, a cui erano destinati i *Discorsi Politici*, che una politica monetaria espansiva è inefficace a promuovere il benessere della nazione [6]. In poche parole, Hume usò la fallacia della composizione per mostrare che un paese non può arricchirsi semplicemente "stampando moneta". Tali manovre, secondo Hume, pur avvantaggiando alcune categorie di cittadini, non hanno nessuna influenza sul benessere della nazione; anzi, la rendono particolarmente esposta a crisi finanziarie. Contro l'interpretazione tradizionale che vede in Hume un sostenitore dell'efficacia degli stimoli monetari, la tesi sostenuta in questo lavoro, sulla scia di due recenti interpretazioni dovute e Carl Wennerlind[7] e Maria Pia Paganelli[8], è che Hume fosse convinto dell'impotenza della politica monetaria; ed è nel contesto di una forte preoccupazione per l'inflazione che si deve giudicare del celebre meccanismo di riequilibrio della bilancia commerciale, brillantemente descritto nel saggio dedicato a questo tema[9]. Infine, metterò in relazione la fallacia della composizione di Hume con il cosiddetto "effetto di Cantillon", ovvero con l'analisi della non-neutralità della moneta fatta dal banchiere Richard Cantillon nel *Saggio sulla natura del commercio in generale*[10].

Al di là della tesi storiografica, che nella migliore delle ipotesi interesserà lo specialista del pensiero economico, insisterò sull'attualità della teoria della moneta di Hume e sul ruolo in essa giocato dalla logica. Vale forse la pena di notare, infatti, che, sebbene poco frequentato dalla storiografia filosofica (*œconomica sunt, non leguntur*), il pensiero

[5] Ivi, p. 217.
[6] Hume, 1971.
[7] Wennerlind, 2005.
[8] Paganelli, 2006.
[9] Hume, 1971, pp. 716-733.
[10] Cantillon, 1955.

economico di Hume si presenta oggi, alla luce del recente dibattito sulle cause della crisi economica europea, particolarmente attuale. Da una parte, allo Hume dei *Discorsi* si deve una lucida e tenace opposizione alle politiche mercantiliste di avanzi commerciali, i cui epigoni contemporanei vengono annoverati dal *consensus narrative* di oggi tra le vere cause degli squilibri macroeconomici europei (quella apparente essendo l'insostenibilità dei debiti pubblici dei paesi periferici). D'altra parte, a Hume va attribuito un certo conservatorismo nella sua analisi del ruolo della banca centrale, il cui operato dovrebbe limitarsi esclusivamente alla politica monetaria, senza sconfinare in quella economica (*in primis* aumento della produzione e riduzione della disoccupazione).

Senza indulgere ad immotivati trionfalismi, mi auguro che dall'analisi emergerà chiaramente che problemi sulla natura e sul funzionamento della moneta che Hume si poneva nel 1752 sono molto simili a quelli su cui ancora verte il dibattito contemporaneo e dalla cui soluzione, oggi come allora, dipendono importanti decisioni politiche. Ora, il fatto che Hume sia intervenuto su questi temi nel dibattito del suo tempo non è un fatto che in sé dovrebbe particolarmente meravigliare lo studioso di logica; che lo abbia fatto facendo un uso assolutamente accorto e consapevole delle fallacie logiche può forse permetterci di fare qualche riflessione non banale sull'utilità e il ruolo della logica in economia.

Hume e la teoria quantitativa della moneta

Sebbene oggi Hume sia noto principalmente per i suoi contributi alla filosofia, le sue opere filosofiche ebbero scarsissimo successo mentre lui era in vita. Con suo grande sconforto, Hume rimase agli occhi dei suoi contemporanei, oltre che lo storico dell'Inghilterra, l'autore dei *Saggi*, che gli valsero immediata fama letteraria e, come vedremo tra poco, gli assicurarono un posto di primo piano nella storia del pensiero economico[11]. I *Saggi* contengono, infatti, un piccolo nucleo di scritti pubblicati a Edimburgo nel 1752 con il titolo *Discorsi Politici*, tra cui ne spiccano due di argomento monetario, dal titolo *Sulla moneta* e *Sulla*

[11] Bonino, 1996.

bilancia commerciale[12]. In questi lavori Hume introduce due concetti che avranno una grande fortuna: la tesi della neutralità della moneta e il meccanismo di riequilibrio automatico della bilancia commerciale.

Va innanzitutto precisato che questi due concetti, sebbene siano oggi pressoché indissolubilmente legati al nome di Hume, furono ampiamente discussi negli scritti di molti autori, ben prima della pubblicazione dei *Discorsi* di Hume. La situazione è inoltre curiosamente complicata dal fatto che tali autori sono proprio quei mercantilisti che, secondo la tradizionale storiografia del pensiero economico, Hume avrebbe confutato. Anche volendo ignorare tali problemi storiografici, la cui soluzione esula ampiamente dagli scopi del presente lavoro, va comunque tenuto presente che praticamente tutti i termini chiave che sono entrati nel lessico del pensiero economico di Hume non compaiono nei suoi testi.

Fatte dunque queste dovute precisazioni, è opportuno ricordare, in primo luogo, cosa si intende per neutralità della moneta. Con questa espressione si è soliti riferirsi all'idea che ad ogni aumento della quantità di moneta in un paese corrisponde solo un proporzionale aumento dei prezzi di beni e servizi di quel paese. In altre parole, più moneta significa solamente più inflazione. Pertanto, secondo Hume, una nazione non può diventare più ricca facendo aumentare la quantità di moneta in circolazione. La vera ricchezza di una nazione risiede, invece, nell'elevato numero dei suoi cittadini e nell'alto livello di operosità. Gli studiosi del pensiero economico sono tutti pressoché concordi nell'attribuire a Hume la più esplicita e generale formulazione della tesi della neutralità della moneta. Ecco alcuni brani particolarmente significativi: «[d]al complesso di questo ragionamento, possiamo concludere che non vi è nessuna specie di conseguenza, riguardo al benessere interno di uno Stato, se la quantità di moneta sia maggiore o minore»[13]; «[s]e consideriamo ogni regno in se stesso, è evidente che la maggiore o minore abbondanza di moneta è senza importanza; infatti i prezzi delle merci sono sempre in proporzione con la quantità della moneta, e una corona del tempo di Enrico VII serviva agli stessi scopi conseguibili con una sterlina di oggi»[14].

[12] Hume, 1971, pp. 689-702 e 716-733.
[13] Ivi, p. 695.
[14] Ivi, p. 689.

Occorre tenere presente due aspetti della tesi della neutralità, almeno nella formulazione che ne dà Hume nel saggio *Sulla Moneta*. In primo luogo, per aumento di moneta Hume intende un aumento della circolazione della moneta (e non un semplice aumento della sua quantità assoluta). Se, infatti, la moneta in aumento venisse tutta tesoreggiata, ovvero se non fosse rimessa in circolazione attraverso il commercio, non avrebbe alcun effetto sui prezzi. «È evidente che i prezzi non dipendono tanto dalla quantità assoluta di prodotti e moneta che sono in una nazione, quanto da quella dei prodotti che vanno o possono andare al mercato, e dalla moneta che circola. Se la moneta fosse chiusa in casse, per quanto concerne i prezzi è come se venisse annullata»[15]. In secondo luogo, un aumento di moneta aumenta proporzionalmente i prezzi, solo se la quantità di prodotto rimane costante. Hume è sufficientemente esplicito nel definire il livello generale dei prezzi P come il rapporto tra la quantità di moneta M e la quantità di beni Y, ovvero $P = {}^{M}/_{Y}$ $P = {}^{M}/_{Y}$. Da questo punto di vista è necessario, affinché un aumento di M generi un proporzionale aumento di P, che Y rimanga costante. Purtroppo, su questo punto Hume si dimostra piuttosto incerto, almeno stando ad alcune controverse affermazioni secondo cui l'aumento di moneta stimola l'operosità dei lavoratori e dunque anche la quantità di beni in commercio.

Al netto di queste difficoltà interpretative, che hanno generato un acceso dibattito tra gli studiosi del pensiero economico di Hume, la tesi della neutralità trova un'immediata applicazione alla teoria del commercio estero, descritta da Hume nel saggio *Sulla bilancia commerciale*[16], in cui Hume il meccanismo di riequilibrio automatico della bilancia commerciale, che è generalmente considerato il secondo contributo principale di Hume al pensiero economico, nonché un vero e proprio *knockdown argument* contro le politiche mercantiliste del suo tempo. Se, infatti, un paese mantiene una posizione di avanzo commerciale con gli altri paesi, se cioè vi esporta più di quello che importa da essi, la moneta inizia ad affluire. Per la tesi della neutralità, tale afflusso genera un proporzionale rialzo dei prezzi, inclusi quelli dei beni destinati al mer-

[15] Ivi, p. 697.
[16] Ivi, pp. 716-733.

cato estero. L'aumento dei prezzi, a sua volta, scoraggia le esportazioni, con conseguente deflusso di moneta dal paese. Questo meccanismo di afflusso e deflusso si arresterà quando nel paese la quantità di moneta sarà pari al valore delle merci. Pertanto, vani sono gli sforzi di quei governi che tanto si affannano a mettere in pratica politiche protezionistiche di dazi commerciali, volte principalmente a far affluire metalli preziosi nel paese. Hume ne conclude che è semplicemente impossibile mantenere una posizione di avanzo commerciale con l'estero.

Sembra dunque che per Hume la moneta sia semplicemente una unità di misura e di scambio e che dalla sua abbondanza non dipenda il benessere sociale. Ma quali sono i fattori che contribuiscono al benessere sociale? Secondo Hume, il vero motore dell'economia sono i cambiamenti degli usi e costumi dei cittadini. Quando la società evolve da una economia agraria ad un commerciale, quando cioè la classe mercantile emerge accanto a quella dei proprietari terrieri, si registra un aumento del livello di benessere sociale. Certamente, tra le conseguenze di questo generale benessere vi è anche un aumento della quantità di moneta; ma ciò non significa che la moneta sia la causa del benessere. Anzi, l'aumento della circolazione di metalli preziosi è piuttosto un effetto collaterale dell'aumento del benessere.

Hume chiarisce molto bene questo punto nel saggio *Sull'interesse*[17]. L'obiettivo qui è mostrare che un aumento della quantità di moneta non può ridurre il tasso di interesse, la cui vera causa è un aumento dei prestatori rispetto ai mutuatari. In una economia agraria, dove la società è divisa in dissoluti ed improduttivi proprietari terrieri e contadini in miseria, un aumento della quantità di moneta non genera nuovi prestatori. Infatti, la moneta in surplus viene tutta quanta sperperata dai proprietari terrieri in futili acquisti, oppure verrà spesa dai contadini per migliorare un poco le loro misere condizioni di vita. In entrambi i casi, non verrà alterato il rapporto tra prestatori e mutuatari. Con la nascita della classe mercantile, invece, nasce nella società anche la passione per la frugalità. I mercanti, da un lato, hanno una maggiore propensione al risparmio rispetto ai proprietari terrieri e, dall'altro, dispongono di maggiori risorse economiche dei contadini. Questi due fattori fanno sì

[17] Ivi, pp. 703-715.

che i mercanti non solo abbiano denaro da prestare, ma che sia anche disposti a farlo. Pertanto, in una società mercantile, aumentano i prestatori rispetto ai mutuatari e il tasso di interesse di abbassa. Nel momento in cui i tassi si abbassano, molte più persone hanno accesso al denaro e dunque la moneta aumenta. Ma è ovvio che non è stata la moneta a causare l'abbassamento dei tassi, bensì un radicale cambiamento nei rapporti sociali. Hume ne conclude che l'apprensione dei governi per la moneta è infondata; meglio sarebbe occuparsi del benessere dei cittadini, mettendo in pratica politiche volte all'incoraggiamento dell'operosità delle persone.

Hume e la non-neutralità della moneta

Tuttavia, vi sono altri numerosi luoghi in cui Hume non pare essere così convinto che la moneta sia neutrale. Hume fa notare innanzitutto come, a fronte dello straordinario afflusso di metalli preziosi dopo la scoperta delle miniere americane, l'aumento dei prezzi in Europa sia stato tutto sommato contenuto. Con un repentino cambio di rotta, Hume afferma addirittura che l'inflazione europea era stata rallentata dall'afflusso di moneta dall'America, in quanto la nuova moneta aveva stimolato la produzione. «[È] certo che dalla scoperta delle miniere in America, l'attività economica è aumentata in tutte le nazioni d'Europa, salvo che in quelle dei possessori di tali miniere; e ciò può *giustamente* attribuirsi, fra le altre ragioni, all'aumento dell'ora e dell'argento»[18].

Tra gli altri luoghi humiani in cui la tesi della neutralità pare smentita, in modo peraltro plateale, occorre ricordare senz'altro il famoso esempio dei mercanti di Cadice[19]. In questo famoso brano, Hume fornisce una descrizione dettagliata degli effetti moltiplicativi che un afflusso di moneta da Cadice può avere sulla produzione e occupazione in Inghilterra. Senza entrare nei dettagli della descrizione, Hume segue le tracce della moneta che dalle mani dei mercanti entra in tutti i settori dell'economia e, prima di generare l'aumento dei prezzi, stimola

[18] Ivi, p. 693. Corsivo mio.
[19] Ivi, p. 693-694.

l'operosità dei cittadini e promuove il benessere sociale. Infine, in un passo altrettanto celebre e controverso, Hume raccomanda ai decisori politici di mantenere in graduale e constante aumento la quantità di moneta, in modo tale da mantenere alto lo spirito di operosità nei cittadini e incentivare il commercio: «[l]a buona politica dell'uomo di governo consiste solo nel far sì che essa [*scil.* la moneta], se possibile, vada aumentando; poiché, in tal modo, egli ravviva lo spirito d'iniziativa nella nazione e incrementa il lavoro, in cui consiste ogni vera potenza e ricchezza»[20]. Secondo la maggior parte degli interpreti, questa affermazione indica chiaramente le simpatie inflazioniste di Hume e il suo appoggio alle politiche di espansione monetaria.

Hume e la distinzione tra moneta esogena ed endogena

Alla luce di queste evidenze testuali, alcuni interpreti hanno concluso che la teoria della moneta di Hume è incoerente[21]. Altri, invece, hanno cercato di mostrarne la coerenza, istituendo (sulla base di più o meno convincenti evidenze testuali) opportune distinzioni. Le interpretazioni "coerentiste", pur nelle loro differenze, sono tutti accomunate dall'idea che la moneta di cui parla Hume nell'esporre la tesi della neutralità non è la stessa moneta, inequivocabilmente non-neutrale, che viene analizzata nell'esempio dei mercanti di Cadice. Nelle dottrine economiche di Hume ci sarebbero dunque due monete o, più precisamente, una duplice prospettiva da cui Hume guarda alla moneta; per rendere ragione della coerenza della teoria humiana della moneta occorre di volta in volta specificare la prospettiva adottata, seppure implicitamente, da Hume.

At tal fine, una distinzione che è stata invocata diverse volte, sebbene in contesti sensibilmente diversi tra loro, è quella tra moneta endogena e moneta esogena. Il problema se la moneta sia endogena oppure endogena ha attraversato varie fasi della storia del pensiero economico ed è ancora ampiamente dibattuto. Sebbene non sia compito del presente lavoro entrare nelle asperità di tale dibattito, occorre almeno ricordare

[20] Ivi, p. 695.
[21] Per una analisi del dibattito, si veda Maffezioli, 2019.

che secondo la concezione esogena della moneta, sostenuta da una certa scuola di pensiero, la quantità di moneta di circolazione è determinata dalla banca centrale e che dalla scelta di quanta moneta immettere nel mercato dipende il volume dell'attività economica. Pertanto, secondo la concezione esogena, la moneta viene creata da una autorità esterna alle forze del mercato e la sua quantità influisce sull'attività economica. Secondo la concezione endogena, d'altra parte, l'offerta di moneta viene determinata dalla domanda da parte dei cittadini e delle imprese e viene generata dalle banche attraverso l'erogazione di prestiti. Pertanto, la moneta viene creata attraverso il sistema bancario all'interno del sistema economico e la sua quantità è un effetto dell'attività economica.

Vi sono almeno due recenti interpretazioni basate sulla distinzione esogeno-endogeno che mirano a mostrare la coerenza della teoria economica di Hume. Secondo la prima interpretazione[22], è stato notato che una banca centrale che amministra, più o meno responsabilmente, la quantità di moneta in circolazione ai tempi di Hume semplicemente non esisteva. Pertanto, attribuire a Hume la concezione di moneta esogena equivarrebbe a commettere un grossolano anacronismo. Hume pensava, infatti, che le banche centrali avrebbero dovuto seguire tutte l'esempio della banca di Amsterdam che deteneva tutta la moneta ivi depositata nei suoi forzieri. D'altra parte, ai tempi di Hume la concezione endogena della moneta è abbondantemente attestata nella letteratura economica dell'epoca; anzi, si trattava della concezione comunemente accettata. Tuttavia, a differenza della concezione moderna, secondo cui la moneta è generata dal sistema bancario attraverso il credito, ai tempi di Hume si credeva che il commercio a determinare la giusta quantità di moneta in circolazione; in altre parole, tanto per Hume quanto per la concezione moderna della moneta endogena, è la domanda di moneta che ne genera l'offerta, ma nel primo caso tale domanda viene soddisfatta dal mercato, mentre nel secondo dalle banche.

Come interpretare dunque i passi in cui Hume parla della tesi della neutralità? Quando Hume dice che i prezzi crescono al crescere della quantità di moneta sta semplicemente riaffermando una concezione comunemente accettata ai suoi tempi e che affonda le radici nel pensiero

[22] M.P. Paganelli, 2006.

antico, soprattutto nella teoria della giustizia aristotelica. Secondo tale concezione, il valore delle merci è loro una proprietà intrinseca e tale valore viene misurato in oro. Essendo una pura e semplice unità di misura, l'oro non ha la capacità di aumentare o diminuire il valore intrinseco di un bene, ma solo il suo valore nominale (prezzo). Per Hume questa è una "massima auto evidente" che corrisponde alla definizione di prezzo ricordata sopra. Ora, affermare che i prezzi sono proporzionali alla quantità di moneta non significa assumere l'esistenza una banca centrale o una qualunque altra istituzione che faccia far aumentare o diminuire la quantità di moneta. Pertanto, la soluzione alla presunta incoerenza della teoria humiana della moneta è che Hume non ha mai sostenuto la tesi della neutralità, se con questo si intende l'idea di una moneta esogena, la cui quantità viene gestita dalla banca centrale. Quella che per la moderna teoria economica è moneta esogena, per Hume non è affatto moneta, da lui apostrofata come *counterfeit money*. Con questa espressione Hume si riferisce le forme di moneta non metallica (cartamoneta, titoli di debito, cambiali, ecc.) e ne condanna l'abuso da parte dei banchieri privati. La vera moneta per Hume è quella aurea, la sola che può esprime il valore intrinseco dei beni.

Un'altra interpretazione[23] che si basa sulla distinzione tra moneta esogena ed endogena parte dall'idea che Hume avesse ben presente il concetto di moneta esogena e che avesse edificato la sua tesi della neutralità proprio per mettere in guardia contro i rischi che derivano dall'uso di moneta non metallica. Più precisamente, ad essere neutrale è la moneta esogena, quella che viene creata *ex nihilo* dall'azione, spesso irresponsabile, delle banche centrali. La moneta endogena, ovvero i metalli preziosi che affluiscono al paese attraverso il commercio, non è affatto neutrale, come ampiamente dimostrano vari testi di Hume. Sebbene Hume ammetta che anche la moneta endogena agisca i prezzi, non è affatto vero che agisca solo sui prezzi. Come brillantemente descritto nell'esempio dei mercanti di Cadice, la moneta endogena in aumento alza sì i prezzi, ma contribuisce anche ad aumentare la produzione e a ridurre la disoccupazione.

Entrambe le interpretazioni concordano su un punto: il brano in cui Hume apparentemente raccomanda di mantenere la moneta in graduale

[23] Wennerlind, 2005

e costante aumento, il vero e proprio *smoking gun* dell'inflazionismo humiano, si basa su un grossolano errore interpretativo. Secondo la prima interpretazione, Hume non starebbe affatto suggerendo un aumento della quantità di moneta, sottoforma di cartamoneta e altri titoli di credito, come vuole l'interpretazione tradizionale; al contrario, Hume auspica che parte della moneta metallica circolante venga prelevata dal mercato e custodita dalla banca centrale. In questo modo sarà possibile impedire che la moneta generi un proporzionale rialzo dei prezzi, a beneficio del commercio estero. In altre parole, Hume non suggerisce un aumento della moneta esogena, bensì una diminuzione della moneta endogena! Pertanto, nel passo in questione, Hume non allude a presunte manovre espansive, volte a far aumentare la quantità di moneta non-metallica in circolazione. Al contrario, Hume sta suggerendo di sottrarre al mercato la moneta metallica in modo tale da contenere i danni dell'inflazione e promuove l'afflusso di metalli preziosi. Anche secondo la seconda interpretazione, l'obiettivo di Hume nel passo in questione è suggerire un modo per abbassare i prezzi e favorire le esportazioni. Ma anziché auspicare un prelievo di monta da parte della banca centrale, Hume sta più semplicemente suggerendo ai decisori politici di mettere in pratica manovre di politica volte alla promozione dello spirito di operosità dei cittadini in modo tale da aumentare la quantità di prodotto e abbassare così i prezzi. Sulla base di una analisi lessicale, si può mostrare che il *magistrate* ('l'uomo di governo', nella traduzione italiana) a cui si allude nel passo era una figura ben definita nel sistema giuridico-economico dell'epoca e che non aveva i poteri legali per mettere in atto manovre di politica monetaria. Pertanto, mentre nella prima interpretazione la diminuzione dei prezzi è ottenuta attraverso una politica monetaria volta a sottrarre al mercato parte della moneta metallica, nella seconda interpretazione la riduzione dei prezzi è ottenuto grazie ad un aumento della produzione. La differenza tra le due interpretazioni diventa molto più chiara quando si consideri nuovamente la definizione di prezzo data in precedenza, $P = {}^{M}/_{Y}\, P = {}^{M}/_{Y}$. Secondo entrambe interpretazioni, l'obiettivo di Hume è suggerire come diminuire P. Secondo la prima interpretazione, Hume suggerisce una diminuzione di M (attraverso una manovra monetaria), mentre nel secondo Hume suggerisce un aumento di Y (attraverso una manovra di politica economica non meglio specificata). In entrambi i casi l'obiettivo di Hume va inteso come un tentativo deflazionista e pertanto la lettura tradizionale che vede nel brano in questione un tentativo da parte di Hume di suggerire manovre inflazioniste è completamente errato.

Hume e la fallacia della composizione

A sostegno della tesi che vede in Hume un nemico, anziché un sostenitore, di politiche inflattive e un avversario della circolazione di forme di moneta non metallica, c'è un ulteriore brano, tratto dal saggio *Sulla Bilancia commerciale* e pressoché completamente ignorato dalla letteratura secondaria sull'argomento, ma che è di una certa rilevanza per il presente lavoro. In questo brano, come riconosciuto da quei pochi autori che se ne sono interessati, Hume sostiene che i fautori delle politiche di espansione monetaria commettono una fallacia della composizione.

È estremamente importante, per cogliere lo spirito della critica humiana, tenere presente il contesto in cui Hume applica la fallacia della composizione. Hume ha appena finito di presentare il suo meccanismo di riequilibrio della bilancia commerciale, da cui ha tratto la conseguenza che in un paese non vi può essere più o meno moneta di quella che serve per misurare il valore dei beni e dei servizi di quel paese. Nel momento, infatti, in cui la moneta aumenta rispetto ai beni e servizi, il prezzo di questi sale, con conseguente perdita di competitività sui mercati esteri e fuoriuscita di moneta. D'altra parte, se c'è meno moneta rispetto alla quantità di beni e servizi, allora il prezzo scende, incoraggiando le importazioni e facendo affluire moneta. Esiste, tuttavia, un modo per fare in modo che mantenere la quantità di moneta sopra o sotto la parità rispetto al valore dei beni e servizi di un paese. «C'è veramente un mezzo con cui è possibile far scendere, e un altro con cui si può far salire la moneta oltre il suo livello naturale, in ogni regno; ma qualora si esaminino questi casi, si troverà che rientrano nella nostra teoria generale, e aggiungono ad essa nuova autorità»[24]. Come abbiamo visto, uno modo per far diminuire i prezzi è ridurre la quantità di moneta (infatti,

[24] Hume,1971 p. 723.

al decrescere *M*, anche *P* decresce). La creazione di moneta artificiale, secondo Hume, ha come conseguenza una riduzione della quantità di metalli preziosi. «Io non conosco altro metodo per far scendere la moneta al di sotto del suo livello, che quelle istituzioni delle banche, dei titoli e della carta-moneta, di cui tanto ci si serve in questo regno. Esse rendono la carta equivalente alla moneta, la fanno circolare attraverso tutto lo Stato, le fanno prendere il posto dell'oro e dell'argento, aumentando in proporzione il prezzo del lavoro e dei beni, e in questo modo o bandiscono una gran parte di quei metalli preziosi, o impediscono il loro ulteriore accrescimento»[25]. Va innanzitutto notato che, in questo passo, Hume dimostra di avere completa consapevolezza della cosiddetta legge di Gresham: se in un paese circolano due monete con valore intrinseco diverso, i consumatori tenderanno a spendere la moneta che ha minore valore intrinseco e a risparmiare l'altra. La conseguenza sarà che, gradualmente, la moneta di maggiore valore intrinseco sparirà dalla circolazione. Come si evince chiaramente, Hume temeva proprio che un abuso della carta moneta potesse scacciare i metalli preziosi dal regno. Infatti, la carta moneta non verrà usata nel commercio con gli stranieri, nei cui paesi non ha valore legale. Per effettuare i pagamenti all'estero, dunque, si useranno i metalli preziosi che gradualmente spariranno dalla circolazione. A titolo di esempio, Hume porta la Francia, dove «la grande abbondanza che si ha […] di metallo pregiato è dovuta, in larga misura, alla mancanza di carta-moneta. I francesi non hanno banche; le cambiali dei commercianti non circolano là come da noi, l'usura o prestito a interesse non è ufficialmente permessa, di modo che molti hanno grosse somme di denaro nelle loro casse; grandi quantità di argenteria sono usate nelle case private e tutte le chiese ne sono piene»[26].

A questo punto Hume usa la fallacia della composizione per smascherare l'errore che sta dietro al ragionamento per cui un aumento della quantità di moneta può aumentare la ricchezza della nazione. «Poiché, un individuo diverrebbe molto più ricco, se il suo patrimonio fosse raddoppiato, c'illudiamo che seguirebbe lo stesso effetto felice effetto se il denaro di tutti aumentasse; non considerando che ciò

[25] *Ibidem*.
[26] Ivi, p. 725.

farebbe aumentare altrettanto il prezzo di ogni bene, e ridurrebbe con l'andar del tempo ogni persona alla stessa condizione di prima»[27]. Hume sta dunque affermando che il seguente argomento è un esempio di fallacia della composizione:

- se la moneta è non-neutrale per un individuo, allora è non-neutrale per la nazione.

In altre parole, un aumento di moneta quale quello descritto da Hume poche pagine prima, ovvero un aumento della circolazione della carta moneta e di altre forme di moneta non-metallica, può benissimo rendere più ricco il singolo cittadino, ma è assolutamente neutrale rispetto al benessere della nazione. Infatti, tali aumenti di moneta sono sostanzialmente diversi dagli aumenti di moneta che un paese registra quando mantiene una posizione di avanzo commerciale con l'estero. In quel caso, come descritto da Hume nell'esempio dei mercanti di Cadice, la moneta è dapprima concentrata nelle mani di pochi mercanti, la cui propensione alla frugalità e il cui amore per gli affari permette di generare quell'effetto moltiplicatore che ha ripercussioni positive sulla produzione e sull'occupazione. Al contrario, gli stimoli monetari di *counterfeit money* sono tali per cui tutti i cittadini istantaneamente vedono il loro patrimonio aumentato. Su questo Hume è perfettamente coerente: in tutti gli esempi per mostrare che la moneta è neutrale Hume considera sempre aumenti monetari che riguardano nazione *as a whole* e mai i singoli cittadini. Pare dunque legittimo affermare che per Hume quello che l'inefficacia delle politiche di espansione monetaria risiede nel fatto che tali manovre non permetto quella concentrazione della ricchezza nelle mani dei mercanti, che per Hume è condizione necessaria affinché la moneta generi il benessere. La totale sfiducia nel sistema bancario di allocare le risorse economiche portò Hume ad avere una cieca fiducia nella capacità della classe mercantile di redistribuzione della ricchezza. Se, infatti, la moneta aumenta indistintamente per tutti i cittadini, come accade nel caso di aumento di moneta non metallica, i mercanti non hanno modo di accumulare le risorse necessarie per iniziare il processo moltiplicatore. Ne seguirà solamente una crescita dei prezzi. Hume non

[27] Ivi, p. 724.

esclude che da tale aumento il singolo cittadino abbia da guadagnarci. Ricordiamo che nel saggio *Sull'interesse*, dove viene riportato uno degli esempi più discussi di aumento di moneta non metallica, Hume non mette in discussione che a livello individuale la moneta possa davvero creare benessere; sia il dissoluto proprietario terriero sia il misero contadino traggono beneficio dall'aumento di moneta! Tuttavia, fintantoché la moneta non si concentra nelle mani di quei pochi che sono nelle condizioni di metterla a frutto (prestandola ad interesse, in questo caso), si avrà solo una crescita dei prezzi. Pertanto, pur se non-neutrale per gli individui, la carta moneta è neutrale a livello collettivo.

Hume e l'effetto Cantillon

Abbiamo visto che per smascherare l'errore che sta dietro alle politiche inflazionistiche di stimoli monetari, Hume si serve della fallacia della composizione. È un errore, dice Hume, concludere che un aumento della quantità di moneta promuove il benessere della nazione, dal fatto che tale aumento promuove il benessere di alcuni individui. Infatti, nel momento in cui la moneta aumenta per tutti i cittadini allo stesso tempo, la moneta è neutrale. Questa idea è chiaramente collegata ad una delle tesi più note e discusse del *Saggio sulla natura del commercio in generale* del banchiere Richard Cantillon[28]. Figura controversa, a causa del suo diretto coinvolgimento nella crisi finanziaria della Compagnia del Mississippi, Richard Cantillon è considerato una figura centrale della storia del pensiero economico[29]. Secondo il logico ed economista Stanley Jevons, Cantillon va annoverato tra i padri fondatori dell'economia politica, accanto a Adam Smith e William Petty. Il *Saggio* di Cantillon fu pubblicato nel 1755, dunque dopo la pubblicazione dei *Discorsi Politici* di Hume, ma fu composto nel 1734. Alla luce delle numerose ed indiscutibili analogie, molti studiosi non escludono che Hume, durante il soggiorno parigino, avesse letto l'opera di Cantillon e ne fosse stato influenzato[30].

[28] Cantillon, 1955. L'introduzione di Luigi Einaudi, benché datata, è estremamente chiara.

[29] Oltre alla già ricordata introduzione di Luigi Einaudi all'edizione italiana, alcuni testi classici su Cantillon sono Bordo, 1983; Cesarano, 1983; Spengler, 1954a, 1954b.

[30] Thornton, 2007.

Nel sesto e settimo capitolo della seconda parte del *Saggio*, Cantillon offre una descrizione accurata della non-neutralità di tre situazioni tipiche in cui la moneta aumenta: scoperta di miniere, posizione di avanzo commerciale, sussidi pagati allo Stato da potenze straniere. In tutti e tre i casi la moneta in aumento, pur aumentando i prezzi, influisce sulle variabili reali dell'economia. A volte positivamente, come nel caso degli avanzi commerciali; altre volte negativamente, quando cioè la moneta aumenta a causa della scoperta di nuove miniere o perché potenze straniere pagano sussidi allo Stato.

Nel caso dell'aumento che si ha quando il paese mantiene la bilancia commerciale in attivo, la descrizione di Cantillon degli effetti moltiplicativi ricorda molto da vicino il brano humiano dei mercanti di Cadice ed è stata talvolta interpretata come evidenza testuale del fatto che Hume fosse a conoscenza del lavoro di Cantillon. Un punto particolarmente importante, su cui Cantillon insiste a lungo, è che un aumento di moneta all'inizio fa crescere i prezzi di alcune merci e non di altre. Per primi saliranno i prezzi delle merci che vengono acquistate da coloro che, avendo ricevuto nuova moneta, decidono di aumentare i loro consumi. Cantillon non esclude che la moneta in aumento, alla fine, alzi il prezzo di tutte le merci; ma vi è certamente un determinato lasso di tempo in cui solo alcuni prezzi sono saliti. «La proporzione nel rialzo dei prezzi determinato in uno Stato dall'aumento e dalla quantità di denaro, dipenderà dall'indirizzo dato dal consumo e alla circolazione da questo denaro. Il Denaro introdotto nello Stato aumenterà naturalmente il consumo indipendentemente dalle mani attraverso le quali esso può passare; ma tale consumo sarà maggiore o minore secondi i casi, riguarderà in misura maggiore o minore questa o quella derrata o mercanzia, secondo i gusti di coloro che acquistano il denaro. I prezzi dei mercati rincareranno più per alcuni generi che non per altri, per quanto abbondante sia il denaro»[31]. Questa crescita asimmetrica dei prezzi è nota, nella letteratura specializzata, come "effetto di Cantillon".

Sembra dunque che la non-neutralità della moneta sia collegata al fatto che la moneta in aumento è concentrata, almeno all'inizio, nelle mani di pochi e non è distribuita uniformemente tra tutti i cittadini. Se ne può

[31] Cantillon, 1955, p. 105.

concludere per Cantillon la distribuzione non uniforme sia condizione sufficiente per la non-neutralità della moneta. Più precisamente, pare ragionevole attribuire, sulla base di alcuni brani del *Saggio*, l'idea che

- *se* la moneta aumenta in modo asimmetrico, *allora* è non-neutrale.

Si tratta di un'assunzione che normalmente viene fatta nella teoria economica: «in practice, we can assume that uneveness of changes in money supply is, in fact, a condition sufficient for non-neutrality of money»[32]. Sorge ora spontaneo chiedersi se, oltre ad essere sufficiente, un aumento asimmetrico di moneta sia anche condizione necessaria per la non-neutralità della moneta, ovvero se sia legittimo affermare che la moneta è non-neutrale *solo se* aumenta in modo asimmetrico. In altre parole,

- *se* la moneta aumenta in modo simmetrico, *allora* è neutrale.

Non mi pare vi siano evidenze testuali abbastanza convincenti per sostenere che Cantillon pensasse che un aumento non simmetrico fosse anche necessario, oltre che sufficiente, per la non neutralità della moneta. Tuttavia, mi pare altrettanto evidente sia esattamente questo quanto Hume sostiene con la fallacia della composizione. Come abbiamo visto, un aumento di moneta che coinvolga, all'istante, tutti i cittadini, cioè che sia simmetrico, secondo la terminologia di questo paragrafo, non ha altra conseguenza che un rialzo dei prezzi. Dunque, se l'aumento di moneta è tale per cui tutti i cittadini ne vengono coinvolti, allora tale aumento sarà neutrale. Ma questo equivale a dire che la distribuzione asimmetrica è condizione necessaria per la non-neutralità della moneta.

Conclusioni

Secondo l'interpretazione tradizionale, in Hume si trovano espresse due teorie della moneta, in contrasto l'una con l'altra. Da un lato, Hume sarebbe il padre della teoria quantitativa, secondo la quale la moneta è neutrale. D'altra parte, Hume avrebbe espresso pareri molto favorevoli

[32] Sieroń, 2019, p. 16.

nei confronti di politiche di espansione monetaria, il cui compito doveva essere quello di mantenere vivo lo spirito di operosità dei cittadini, vera causa del benessere della nazione. In questo lavoro, ho insistito, rifacendomi alle interpretazioni di Wennerlind e Paganelli, sulle preoccupazioni di Hume per l'inflazione e sulla conclamata diffidenza nei confronti della moneta non metallica. È nel contesto dell'analisi degli effetti che una espansione di moneta monetaria "artificiale" che va letto il meccanismo di riequilibrio della bilancia commerciale, che tanto ha reso famoso (e giustamente!) Hume presso gli economisti. Come ho cercato di mostrare, Hume non dubitava, come vuole l'interpretazione tradizionale, del fatto che un paese non possa arricchirsi commerciando con gli stranieri. Al contrario, pensava che quello fosse sostanzialmente l'unico modo che un paese avesse per arricchirsi. Ma in nessun modo l'obiettivo di un aumento del benessere sociale può essere raggiunto abbassando "artificialmente" i prezzi delle merci e promuovere le esportazioni, attraverso il ricorso alla moneta non metallica. In altre parole, vani secondo Hume sono i tentativi di arricchire il paese "stampando moneta".

Come mostrare l'errore alla base di questo modo di ragionare? Come abbiamo visto, Hume si servì della fallacia della composizione. Tale uso da parte di Hume mi pare particolarmente significativo per chi fosse interessato al ruolo della logica in economia. In primo luogo, dimostra che la fallacia della composizione aveva trovato il suo posto nel ragionamento economico ben prima di Keynes. In secondo luogo, la fallacia della composizione può servire a rivalutare il ruolo della logica (informale) come utile strumento in economia. Se si guarda al ruolo della logica in economia oggi, ci si rende conto che la logica ha spesso messo a disposizione degli economisti vere e proprie teorie (formali); molto noto è il caso del calcolo delle relazioni di Tarski che ricevette immediata applicazione, ad opera di Kenneth Arrow, nella teoria della scelta sociale[33]. Una lettura attenta dello Hume dei *Discorsi* ci ricorda che la logica può essere utile non sono nella sua veste formale, ma anche e soprattutto per individuare ed analizzare gli errori del ragionamento economico attraverso lo studio delle fallacie logiche.

[33] Suppes, 2005.

Bibliografia

Bonino G., *La leggenda storiografica di Hume*, «Rivista di filosofia», 87, 1996, pp. 241-265.

Bordo D., *Some aspects of the monetary economics of Richard Cantillon*, «Journal of Monetary Economics», 12, 1983, pp. 235-258

Cantillon R., *Saggio sulla natura del commercio in generale*, Torino, Einaudi, 1955.

Cesarano F., *The rational expectations hypothesis in retrospect*, «The American Economic Review», 73/1, 1983, pp. 198-203

Hume D., *Saggi morali, politici e letterari (parte II)* in *Opere*, a cura di Lecaldano E. e Ministretta E., Bari, Laterza 1971, pp. 659-928.

Keynes J.M., *Teoria generale dell'occupazione, dell'interesse e della moneta*, Torino, UTET, 2013.

Maffezioli P., *Sulla coerenza della teoria humiana della moneta*, «Rivista di filosofia», 110/1, pp. 83-106, 2019.

Nolt J., Rohatyn D. e Varzi A.C., *Logica*, McGraw-Hill, 2007, pp. 224-225.

Paganelli M.P., *Hume and endogenous money,* «Eastern Economic Journal», 32/3, 2006, pp. 533-547.

Sieroń, A., *Money*, *Inflation and Business Cycles. The Cantillon Effect and the Economy*, Routledge, 2019, p. 16.

Spengler J., *Richard Cantillon: first of the moderns I*, «Journal of Political Economy», 62/4, 1954a, pp. 281-295.

Spengler J., *Richard Cantillon: first of the moderns II*, «Journal of Political Economy», 62/5, 1954b pp. 406-424.

Suppes P., *The pre-history of Kenneth Arrow's social choice and individual values*, «Social Choice and Welfare», 25, 2005, pp. 319-326.

Thornton M., *Cantillon, Hume and the Rise of Antimercantilism*, «History of Political economy», 39/3, 453-480, 2007.

Wennerlind C., *David Hume's Monetary Theory Revisited: Was He Really a Quantity Theorist and an Inflationist?*, «The Journal of Political Economy», 113/1, 2005, pp. 223-237.

Woods J. e Walton D., *Composition and division,* «Studia Logica», 36/4, 1977, pp. 381-406.

Woods J., Irvine A. e Walton D., *Argument. Critical Thinking, Logic and the Fallacies*, Toronto, Pearson-Prentice Hall., 2ª ed. 2000, pp. 250-267.

Ti è piaciuto questo libro?

Comunica la tua opinione al nostro sito:

www.armandoeditore.it

sezione "Recensioni", nella pagina relativa al libro

Ricevi gli aggiornamenti sulle novità,
iscrivendoti alla nostra newsletter

ARMANDO EDITORE
Via Leon Pancaldo, 26 • 00147 Roma
tel. 06 5894525 • 06 5817245 • 06 5806420
info@armando.it

Seguici sui social

facebook twitter Linkedin Instagram YouTube