Rivista Internazionale di Scienze Economiche e Commerciali
Vol. 35 (1988), N. 4-5, 313-344

LA VALIDITÀ EMPIRICA DELLA TEORIA NEOCLASSICA DELLA DOMANDA: UNA VERIFICA CON I DATI ITALIANI 1960-1983

di Sergio Calliari * e Domenico Sartore **

> «... no completely satisfactory utility function (or system of demand functions) has yet been found. Perhaps there is none, but the search has hardly started and should be pursued».
>
> Houthakker (1965).

1. *Introduzione*

La teoria della domanda è fondamentalmente una teoria del comportamento del consumatore individuale, è cioè una teoria microeconomica. Poiché i dati statistici disponibili si riferiscono a tutti i consumatori o a gruppi di consumatori, ed a categorie di spesa aggregate e non a singoli beni omogenei, le applicazioni empiriche nella maggior parte dei casi si riferiscono alla domanda aggregata di beni di consumo dell'intero sistema economico, mentre la teoria classica della domanda e le restrizioni da essa derivate si riferiscono al singolo consumatore. L'applicazione della teoria del comportamento del consumatore ai dati dei consumi aggregati richiede perciò assunzioni addizionali in forza delle quali: (i) le equazioni di domanda aggregate godono delle proprietà delle microfunzioni di domanda; (ii) le funzioni di domanda del singolo consumatore possono essere aggregate in funzioni di domanda della collettività che possiedono le proprietà delle microfunzioni; (iii) le funzioni di utilità individuali possono essere aggregate in una funzione di domanda della collettività coerente con le funzioni individuali. Condizione necessaria e sufficiente per una perfetta aggregazione dei beni è che la

* Banca Commerciale Italiana - Ufficio Studi - Milano.
** Università degli Studi di Venezia.

funzione di utilità sia separabile in senso debole e che ogni indice di quantità sia omogeneo di primo grado rispetto ai beni elementari [1]. Per quanto riguarda l'aggregazione delle funzioni di utilità individuali in una funzione di utilità della collettività, l'approccio più comune è quello di ignorare i problemi connessi con tale aggregazione [2].

In questo studio si segue questo approccio metodologico, si assume cioè che tutti i consumatori, o alternativamente che il « consumatore rappresentativo », si comportino come il consumatore individuale della teoria, sotto l'ipotesi che la non corretta specificazione, implicata dall'aggregazione, non induca un errore di specificazione rilevante [3]. Ipotizzando l'esistenza di un « consumatore rappresentativo » (Frisch, 1959) si evita apparentemente il problema dell'aggregazione [4]. Muellbauer (1975) esamina altri due approcci per conciliare la teoria microeconomica con le applicazioni macroeconomiche, cioè: (i) una formulazione di funzioni distributive delle caratteristiche microeconomiche tale da permettere alle relazioni macroeconomiche di evidenziare le caratteristiche desiderate; (ii) l'introduzione in modo esplicito nelle equazioni di domanda delle caratteristiche distribuzionali [5].

La teoria della domanda non è sufficiente per determinare un'unica forma funzionale per le equazioni di domanda, tuttavia la scelta della forma funzionale deve obbedire alle restrizioni della teoria così da ottenere un sistema di equazioni di domanda per essa plausibile. La plausibilità teorica (globale o locale) è assicurata da vari modi di procedere. Uno di questi è quello di specificare una funzione di utilità « well-behaved » e di derivare le equazioni da stimare dalla sua massimizzazione vincolata. In questo modo tutte le restrizioni generali sono soddisfatte globalmente e le restrizioni addizionali sono fornite dalla particolare classe di funzioni di utilità prescelta. In molti casi le relazioni di domanda così derivate sono altamente non lineari rispetto ai loro parametri provocando quindi considerevoli problemi di stima econometrica, problemi che solo con la tecnologia dei nuovi elaboratori elettronici risultano affrontabili. Quindi con questo approccio il sistema

---

[1] Vedi GORMAN (1959, pp. 469-481).

[2] Le condizioni sotto cui è possibile la perfetta aggregazione delle funzioni di utilità individuali sono estremamente restrittive e sono state studiate da GORMAN (1953, pp. 63-80), e GREEN (1964, p. 49).

[3] Vedi PEARCE (1964, pp. 124-126).

[4] Per le condizioni necessarie e sufficienti per una aggregazione coerente vedi THEIL (1975) e BARTEN (1974).

[5] In realtà è trattato uno degli aspetti del problema dell'aggregazione, cioè la composizione variabile dell'insieme di consumatori, in quanto si considerano i consumi pro-capite, assumendo cioè omogeneità di grado uno nella tecnologia di consumo. Vedi pure MCFADDEN e altri (1974, pp. 361-376).

di equazioni di domanda è derivato algebricamente imponendo le restrizioni teoriche su una particolare forma funzionale. Un secondo approccio è quello di lavorare con un sistema di equazioni di domanda arbitrario, ma ragionevole a priori, ed imporre ad esso (localmente, ad es. sulle medie campionarie) le restrizioni derivate dalla teoria classica della domanda [6]. L'esempio più rimarchevole di questo approccio (originato da Hicks nella classica appendice di « Value and Capital ») è il cosiddetto approccio differenziale, cioè l'approccio che formula le equazioni di domanda in termini di derivate. Il principale vantaggio di questa linea di attacco è che la decisione relativa alla parametrizzazione è rinviata a quando le derivate sono rimpiazzate da differenze finite. Altro vantaggio è che si distinguono nettamente gli effetti di primo ordine e di secondo ordine (ad esempio, effetti di sostituzione di una variazione di prezzo). In questo approccio le restrizioni sono usate statisticamente: stima di una forma funzionale generale con e senza restrizioni, sottoponendo quindi a test la validità delle restrizioni stesse. Altre possibilità di generare sistemi di equazioni di domanda si hanno con l'utilizzo della funzione di utilità indiretta e teorema di Roy o via funzioni di costo e lemma di Shepard.

In questo studio si utilizzerà un sistema di equazioni di domanda ottenuto con il secondo approccio. Il sistema di domanda utilizzato si presenta come un modello di allocazione della spesa totale e può essere utilizzato per stimare le risposte dei consumi a variazioni del reddito e dei prezzi e sottoporre a test le implicazioni della teoria della domanda sotto l'assunzione che i consumi totali siano determinati esogeneamente. Il trattamento dei sistemi completi di equazioni di domanda nell'analisi applicata esclude usualmente la funzione del consumo aggregata adottando l'ipotesi di un modello di massimizzazione del consumo separato in due stadi (« two-stage budgeting »). Tale procedura può essere giustificata in base ad assunzioni comportamentali plausibili (additività intertemporale delle preferenze e aspettative stazionarie sui prezzi) che permettono di risolvere inizialmente l'aspetto intertemporale del problema, cioè la decisione risparmio/consumo, cosicché la scelta dei vari « items » di spesa è vista come una sequenza di massimizzazioni atemporali dell'utilità.

È stata proposta una grande varietà di sistemi completi di equazioni di domanda per la stima econometrica. Tutti questi sistemi fanno riferimento alla teoria classica del comportamento del consumatore e alcuni di questi introducono restrizioni per semplificare il modello e ridurre il numero dei parametri. Come si è detto, dal punto di vista teorico è piuttosto difficile

[6] Eccetto che per sistemi di domanda con solo due beni o con qualche componente della domanda costante. Vedi BARTEN (1964), GOLDBERGER (1969), MCFADDEN (1964).

dire se un modello domina i suoi competitori. La scelta di una specificazione per il lavoro econometrico applicato deve quindi essere fatta su basi empiriche, cioè rispondendo alla domanda: Quale modello si comporta meglio?

Accanto al problema dell'aggregazione e della scelta della forma funzionale per le equazioni di domanda esiste il problema della verifica empirica della teoria del comportamento del consumatore. Questo si è rivelato come uno degli obiettivi principali dell'analisi statistica della domanda originato dagli studi pionieristici di H. Schultz (1938).

Per poter formulare test sulla teoria del comportamento del consumatore deve essere scelta una rappresentazione parametrica del sistema di funzioni di domanda o della funzione di utilità. La maggior parte degli approcci inizia con una formulazione del sistema di domanda sulla base di forme funzionali « appropriate ». Assumendo l'ipotesi di integrabilità, cioè sotto le restrizioni di additività, omogeneità, simmetria, non-negatività e monotonicità, parecchi sistemi di domanda ben conosciuti implicano che la sottostante funzione di utilità, per essere coerente con la teoria, debba essere additiva.

Nonostante la gran mole di test empirici, la scelta della rappresentazione parametrica più appropriata è ancora una questione non risolta. I test di Schultz usano il sistema di funzioni di domanda « double-log » con elasticità di prezzo e di reddito costanti. Anche Stone (1954) e Wold e Jureen (1953) usano questo sistema di domanda, utile negli studi descrittivi dei consumi. Il sistema è lineare rispetto alle elasticità di prezzo e di reddito ed è facilmente stimabile con il metodo dei minimi quadrati ordinari (OLS). Questa forma funzionale risulta però meno adatta per verificare la teoria della domanda in quanto è integrabile se, e solo se, può essere generata da una funzione loglineare neutrale (Wold e Jureen, 1953, p. 196; Basmann, Battalio e Kagel, 1973; Goldberger, 1967). Per questa funzione di utilità la proporzione del bilancio del consumatore allocato in ogni bene è indipendente dal reddito, dai prezzi e dal trend temporale. Le elasticità della domanda rispetto al reddito sono uguali ad uno, le elasticità di prezzo sono uguali a meno uno, e le elasticità di prezzo incrociate sono uguali a zero.

Alternativamente, il cosiddetto sistema di domanda di Rotterdam dovuto a Barten (1964) e Theil (1965) ha fornito uno stimolo importante per lo sviluppo di test statistici della teoria della domanda del consumatore. Il modello di Rotterdam è lineare nei parametri incogniti ed è molto utile per studi descrittivi. Come il sistema « double-log » il sistema di Rotterdam è integrabile se, e solo se, può essere caratterizzato da quote di spesa costanti cosicché la funzione di utilità sottostante è log-lineare neutrale. Quindi le implicazioni della teoria dell'integrabilità possono essere sottoposte a test solamente in congiunzione con l'ipotesi di utilità log-lineare neutrale [7].

All'inizio si stima un sistema di funzioni di domanda senza richiedere l'integrabilità. Quindi si impongono sui parametri di queste funzioni le restrizioni implicate dall'integrabilità. Infine si sottopongono a test le restrizioni corrispondenti alle ipotesi di sommabilità, omogeneità, simmetria, nonnegatività e monotonicità dei sistemi di equazioni di domanda.

In questo studio si prende in considerazione un sistema completo di equazioni di domanda: il modello di Rotterdam (Theil-Barten).

Scopo principale di questo articolo è quello di sottoporre a verifica empirica la validità generale delle restrizioni della teoria neoclassica della domanda. Si vuole cioè valutare quanto la teoria microeconomica e in particolare i vincoli che essa implica (omogeneità, simmetria, negatività) siano validi a livello aggregato.

Una possibile obiezione a questo tipo di verifica fondata su dati aggregati è che le condizioni delle funzioni di domanda individuali, le quali implicano l'integrabilità dei sistemi di funzioni di domanda, non sono realistiche. Mentre il rigetto dell'ipotesi di integrabilità a livello aggregato non implica in modo definitivo che la teoria microeonomica sia empiricamente irrilevante, l'accettazione di queste ipotesi in numerosi studi fornisce giustificazioni empiriche per applicare la teoria microeconomica e quindi per imporre restrizioni sul sistema di funzioni di domanda aggregate.

Nel paragrafo 2 si espongono le proprietà teoriche che ogni sistema completo di equazioni di domanda deve avere, cioè le restrizioni sulle equazioni di domanda. Quindi nel paragrafo 3 si espone sinteticamente il sistema completo di equazioni di domanda utilizzato per i test. Nel paragrafo 4 si presentano i dati utilizzati. Nei paragrafi 5 e 6 si discutono le tecniche di stima utilizzate e vengono presentate le stime dei parametri dei modelli. Nel paragrafo 7 vengono effettuati i test sulle restrizioni del modello esposte nel paragrafo 2. Seguono le conclusioni.

2. *Proprietà teoriche dei sistemi di equazioni di domanda*

Assumiamo che q sia un vettore n-dimensionale di quantità positive domandate dal consumatore e che $u(q)$ sia la funzione di utilità, continua, monotona, strettamente quasi-concava e differenziabile e con matrice Hessiana simmetrica. Si assume inoltre che l'ordinamento delle preferenze sia rappresentabile da almeno una funzione di utilità con matrice Hessiana

[7] Questo è l'approccio seguito dalla cosidetta « Rotterdam School » (Theil-Barten) e da CHRISTENSEN-JORGENSON-LAU (1975) con la funzione « translog ».

non-singolare nella porzione rilevante dello spazio dei beni. Si assume che il consumatore scelga il vettore q che massimizza $u(q)$ e allo stesso tempo soddisfi il vincolo di bilancio $p'q = m$, dove p è un vettore n-dimensionale di prezzi positivi esogeneamente dati ed m è la spesa totale esogena, o in breve, il reddito.

In base alle assunzioni date, il paniere da massimizzare q è una funzione vettoriale derivabile di m e q, ed è rappresentato dal sistema di equazioni di domanda:

$$q = q(m, p). \tag{2.1}$$

Le restrizioni su questa funzione possono essere formulate nei termini delle sue derivate. Poniamo che q_m sia il vettore n-dimensionale delle derivate parziali rispetto a m con generici elementi $\partial q_i / \partial m$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. La matrice delle derivate parziali $\partial q / \partial p' = Q_p$ è scritta come:

$$Q_p = K - q_m q', \tag{2.2}$$

dove K è la matrice degli effetti di sostituzione di ordine $n \times n$.

Siccome la (2.1) deve soddisfare l'equazione di bilancio, si ottiene la *condizione di « adding-up »*:

$$p' q_m = 1, \tag{2.3}$$

$$p' Q_p = - q', \text{ oppure } p'K = 0. \tag{2.4}$$

Nella terminologia di Frisch (1959) la (2.3) è la condizione di aggregazione di Engel mentre la (2.4) è la condizione di aggregazione di Cournot.

L'omogeneità dell'identità di bilancio rispetto ai prezzi ed al reddito implica che le equazioni di domanda siano omogenee di grado zero in m e p, fornendo la *condizione di omogeneità*:

$$q_m m + Q_p p = 0 \text{ oppure } Kp = 0. \tag{2.5}$$

La simmetria della matrice Hessiana della funzione di utilità ha come conseguenza la *condizione di simmetria* sulla matrice di sostituzione:

$$K = Q_p + q_m q' = K'. \tag{2.6}$$

La quasi-concavità stretta della funzione di utilità porta alla *condizione di negatività*:

$$x'Kx < 0, \ \forall \ x \neq \alpha p, \tag{2.7}$$

dove α è uno scalare reale. Questa condizione implica che la matrice di sostituzione K sia negativa semidefinita con rango $n-1$ e che gli elementi diagonali di K siano tutti negativi.

La condizione di additività permette di eliminare un elemento da q_m e una riga dalla matrice di sostituzione K in quanto questi possono essere sempre ricostruiti per mezzo della condizione (2.3) e (2.4). La condizione di omogeneità (2.5) permette di ridurre ulteriormente la matrice K a una matrice di dimensioni $(n-1) \times (n-1)$, in quanto una colonna può essere eliminata con l'uso della (2.5). La condizione di simmetria (2.6) fornisce altri $1/2\,(n - 1)\,(n - 2)$ vincoli sugli elementi di K. La condizione di negatività implica che tutti gli autovalori di K siano negativi tranne uno che è zero. È opportuno notare che dal punto di vista empirico tali vincoli sono estremamente utili se non sono rifiutati sulla base delle osservazioni campionarie.

3. *La specificazione della forma funzionale*

Pur essendo ben definite, almeno in linea di principio, le restrizioni generali sulle derivate parziali delle equazioni di domanda sono troppo generali per permettere l'applicazione empirica diretta. Per poter procedere è necessario specificare questi risultati generali della teoria della domanda con forme funzionali esplicite delle funzioni di domanda.

In generale vi sono tre approcci principali per generare sistemi completi di equazioni di domanda o, equivalentemente, funzioni di spesa in quote pur mantenendo lo spirito dell'ipotesi classica di massimizzazione dell'utilità. Il primo approccio consiste nello specificare una funzione di utilità diretta, massimizzarla sotto il vincolo di bilancio e risolverla per il sistema di funzioni di domanda. Ovviamente tale sistema è integrabile. Tuttavia, per una funzione di utilità diretta arbitraria questo approccio è incapace di fornire funzioni di domanda in « explicit closed form ». In aggiunta, spesso sono richieste assunzioni addizionali come la quasi concavità, sulla funzione di utilità diretta. Il secondo approccio consiste nello specificare il sistema completo di funzioni di domanda o funzioni di quote di spesa direttamente. Il principale vantaggio di questo approccio è che non è necessario risolvere un problema di massimizzazione. Mentre lo svantaggio consiste nella necessità di verificare che il sistema di funzioni di domanda o di quote di spesa specificato sia coerente con l'assunzione di massimizzazione dell'utilità da parte del consumatore rappresentativo. Questo è il già citato problema dell'integrabilità. Il terzo approccio consiste nello specificare una funzione di utilità indiretta e quindi generare il sistema di funzioni di domanda usando un risultato della teoria della dualità noto come l'« identità di Roy » (1942); in questo caso si richiede solo la derivabilità ed altre operazioni aritmetiche elementari, per dedurre le corrispondenti equazioni di domanda esplicite. Il principale vantaggio di questo approccio è la facilità con cui si può ottenere un sistema di funzioni di domanda completamente integrabile [8].

Il modello di Rotterdam è ben noto in letteratura e di conseguenza qui verrà data una descrizione molto sintetica. Si indichi con p_i, q_i e m prezzo, quantità e spesa totale e con w_i la quota di spesa del bene i-esimo. Prendendo le derivate di queste quote di spesa e della funzione di domanda, $q_i = f(m, p)$, si ottiene un sistema completo di equazioni di domanda della forma:

$$(3.1) \quad w_i d \ln q_i = (p_i \partial q_i / \partial m)\, d \ln m + \sum_j (p_i p_j / m) [s_{ij} - q_j \partial q_i / \partial m]\, d \ln p_j,$$

in cui si è utilizzato la « fundamental matrix equation » di Barten (1964) e dove con s_{ij} vengono indicati i coefficienti della matrice di sostituzione (coefficienti di Slutsky):

$$(3.2) \quad s_{ij} = \partial q_i / \partial p_j + q_j \partial q_i / \partial m = u^{ij} - (\lambda / \lambda_m) (\partial q_i / \partial m) (\partial q_j / \partial m).$$

Introducendo gli indici t la (3.1) può essere scritta come:

$$(3.3) \quad w_{it} d \ln q_{it} = \beta_{it} \left(d \ln m_t - \sum_j w_{jt} d \ln p_{jt} \right) + \sum_j \pi_{ijt} d \ln p_{jt},$$

dove $\beta_{it} = p_{it} (\partial q_{it} / \partial m_t)$ e $\pi_{ijt} = (p_{it} p_{jt} / m)\, s_{ijt}$ possono essere «time varying» L'equazione (3.3) è in forma continua; per l'applicazione ai dati reali si richiede l'introduzione di un termine di disturbo e la scelta di una approssimazione discreta per le derivate e gli integrali. Con l'assunzione di parametri fissi si ottiene la versione standard in prezzi assoluti del modello di Rotterdam:

$$(3.4) \quad w_{it}^* D q_{it} = \beta_i \left(D m_t - \sum_j w_{jt}^* D p_{jt} \right) + \sum_j \pi_{ij} D p_{jt}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

dove $w_{it}^* = (w_{it} + w_{it-1})/2$ e $D x_{it} = \ln x_{it} - \ln x_{it-1}$, con x che rappresenta le variabili p, q o m. Il modello è lineare nei parametri e può essere stimato facilmente. È opportuno notare che l'approssimazione discreta utilizzata è la

[8] Per dettagli sulla teoria della dualità vedi DIEWERT (1974, p. 106-171) e BLACKORBY, PRIMONT e RUSSEL (1978, cap. 2).

piú semplice tra quelle disponibili e che vi sono approssimazioni che suggeriscono specificazioni migliori del modello di Rotterdam (vedi Barnett, 1981, per una discussione di questo argomento). È opportuno rilevare che l'effetto della discretizzazione sui residui è quello di introdurre un termine di errore « moving average » (vedi Phlips, 1974, e Sargan, 1974). Questa questione non è stata discussa nella letteratura sul modello di Rotterdam.

Nella versione stocastica della (3.4) si preferisce in generale sostituire il termine $Dm_t - \Sigma\, w_{jt}^* Dp_{jt}$ con $Dq_t = \Sigma\, w_{jt}^* Dq_{jt}$ per garantire che la somma dei disturbi, rispetto all'indice i, sia uguale a zero. Quindi si ha:

$$(3.5) \qquad w_{it}^* Dq_{it} = \beta_i Dq_t + \sum_j \pi_{ij} Dp_{jt} + \varepsilon_{it}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

4. *I dati utilizzati*

Le serie utilizzate si riferiscono ai consumi finali interni di Contabilità Nazionale per il periodo 1960-1983. L'informazione di base utilizzata si riferisce a 40 beni. In questo studio questi beni sono stati aggregati nei seguenti 9 gruppi di spesa: 1. Generi alimentari e bevande; 2. Tabacco; 3. Vestiario e calzature; 4. Abitazione, combustibili ed energia elettrica; 5. Mobili, articoli di arredamento, beni e servizi per la casa; 6. Servizi sanitari e spese per la salute; 7. Trasporti e comunicazioni; 8. Ricreazione, spettacoli, istruzione e cultura; 9. Altri beni e servizi.

Il livello di aggregazione utilizzato comporta la stima, anche nel caso piú sfortunato, di al più 88 parametri. Con questa aggregazione si perdono necessariamente dettagli interessanti, però è possibile verificare, ad esempio, anche qualche ipotesi, come quella di additività, spesso ritenuta appropriata per una classificazione ampia come quella da noi utilizzata. La scelta di questi gruppi di beni e servizi è stata dettata dall'intenzione di ottenere risultati comparabili a studi analoghi condotti in Italia (Viviani, 1979) e all'estero (Deaton, 1974). I dati non sono riportati per esigenze tipografiche, ma sono disponibili su richiesta agli autori.

Per ricavare le variabili del modello si sono impiegati:

a) q_i = spesa pro-capite, a prezzi 1970, per ciascuno dei 9 gruppi di beni e servizi;

b) p_j = indici impliciti dei prezzi di ciascun gruppo di spesa, ottenuto dividendo i valori a prezzi correnti per i corrispondenti valori a prezzi costanti (1970).

Per ottenere i valori pro-capite si è utilizzata la popolazione presente.

5. *Le tecniche di stima*

È possibile scrivere il modello di Rotterdam nella seguente forma:

$$y_t = f(x_t, \beta) + \varepsilon_t \tag{5.1}$$

dove y_t è un vettore di n variabili dipendenti $\hat{w}_t d \ln q_t$, con $\hat{w}_t$ si indica una matrice diagonale, cioè $\hat{w}_t = \mathrm{diag}\{w^*_{1t}, w^*_{2t}, \ldots w^*_{nt}\}$, x_t è il vettore di variabili indipendenti $x'_t = [d \ln m_t - w^{*\prime}_t d \ln p_t, d \ln p_t \ldots d \ln p_{nt}]$, β è una matrice di parametri, e ε_t è un vettore di disturbi. La specificazione stocastica è:

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_{ti}) &= 0, \ \forall \ t, i, \\ E(\varepsilon_{ti}\ \varepsilon_{t'j}) &= \delta_{tt'}\ \omega_{ij}, \ \forall\, t, t', i, j. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Sono quindi permesse solo covarianze contemporanee tra i residui delle varie equazioni. Con Ω si indicherà la matrice di varianza-covarianza il cui elemento i, j-esimo è ω_{ij}.

Il sistema di Rotterdam è soggetto ad un vincolo esatto non stocastico (sommabilità) che è soddisfatto automaticamente. Questo assicura che:

$$(y_t - f)'1 = \varepsilon_t'1 = 0 \ \forall t, \tag{5.3}$$

dove 1 rappresenta un vettore di elementi unitari. Quindi la somma dei valori previsti per ogni bene è identica alla somma dei valori storici. In forza della (5.2) e (5.3), si ha:

$$\Sigma_i\, \omega_{ij} = \Sigma_i\, E(\varepsilon_{it}\, \varepsilon_{jt}) = E(\Sigma_i\, \varepsilon_{it}\varepsilon_{jt}) = E(0\, \varepsilon_{jt}) = 0. \tag{5.4}$$

Assumendo che ε segua una distribuzione multivariata normale, la matrice Ω è singolare e quindi non risulta definita la funzione di verosimiglianza del campione. Una soluzione a questo problema è quella di eliminare una equazione del sistema. Barten (1969) ha mostrato che è possibile scrivere la funzione di verosimiglianza nel seguente modo:

$$L_1 = n^{1/2}\, (2\pi)^{-(n-1)/2}\, |\Omega + ii'|^{-1/2} \cdot \exp[-1/2\ \varepsilon'_t\, (\Omega + ii')^{-1}\, \varepsilon_t] \tag{5.5}$$

dove i è un vettore normalizzato di valori unitari $\left(i = 1/\sqrt{n}\right)$. Quindi per N osservazioni il logaritmo della funzione di verosimiglianza è

$$\begin{aligned} \ln L = {} & 1/2\, N (\ln n - (n-1) \ln 2\pi) - 1/2\, N \ln |\Omega + ii'| \\ & - 1/2\, \Sigma_t\, \varepsilon'_t\, (\Omega + ii')^{-1}\, \varepsilon_t. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Siccome Ω non è nota, è possibile ottenere la funzione di verosimiglianza concentrata massimizzando la (5.6) rispetto agli elementi di Ω sotto il vincolo $\Omega 1 = 0$. Questo può essere ricavato nel modo usuale per ottenere uno stimatore di Ω, $\tilde{\Omega}$:

$$\tilde{\Omega} = 1/N\, \Sigma_t\, \varepsilon_t \varepsilon_t' = 1/N\, G'G, \tag{5.7}$$

dove G è la matrice le cui N righe sono composte dai vettori ε_t. Sostituendo la (5.7) nella (5.6), si trova che l'ultimo termine si riduce a $-1/2\,N(n-1)$. Quindi il logaritmo della funzione di verosimiglianza concentrata si riduce a:

$$\begin{aligned} \ln L^* = {} & 1/2\, N \ln n - 1/2\, N(n-1)(1 + \ln 2\pi) \\ & - 1/2\, N \ln |1/N\, \Sigma_t\, \varepsilon_t \varepsilon_t' + ii'|. \end{aligned} \tag{5.8}$$

La stima del modello (5.1) diventa quindi equivalente alla minimizzazione del determinante:

$$|1/N\, \Sigma_t\, \varepsilon_t \varepsilon_t' + ii'| \tag{5.9}$$

soggetta al vincolo: $\varepsilon_t' 1 = 0, \ \forall t$.

6. *Le stime dei parametri*

Nelle tabelle 1-11 sono riportate le stime dei parametri del modello di Rotterdam nelle varie specificazioni con e senza intercetta. Le stime sono nelle righe numerate (ad es. (1) (2) ... (9) mentre sotto di esse sono riportati i relativi errori standard.

7. *I test sulle restrizioni del modello*

Recentemente la letteratura relativa ai test sulle restrizioni dei sistemi completi di equazioni di domanda ha ricevuto un notevole impulso soprattutto per quanto attiene alla differenza tra modelli di grandi e di piccole dimensioni. La differenza è rilevante poiché risultati empirici ed esercizi di simulazione (Laitinen, 1978; Meisner, 1979; e Bera, Byron e Jarque, 1981) dimostrano che piccoli modelli non presentano problemi per quanto riguarda l'accettazione delle usuali restrizioni desumibili dalla teoria della domanda, come avviene invece frequentemente per i modelli di grandi dimensioni [9].

---

[9] Le dimensioni generalmente considerate nei citati lavori sono $n = 5, 8, 11, 14$, dove n rappresenta il numero di beni per i quali vengono specificate le equazioni di domanda.

Tab. 1: Stima senza vincoli sulla matrice S (con intercetta), P = 88, L = 1035.15

			s_{ij}									
i	a_i	b_i	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	R^2
(1)	.007971	.191472	−.133978	.048158	.044748	−.165559	.008163	−.041973	.043096	.076867	.060137	.9515
	.001958	.021082	.035924	.015688	.029594	.032443	.008432	.012309	.021256	.025282	.033221	
(2)	.000931	.033536	−.014028	−.004410	−.007137	.000422	.003237	−.013868	−.002094	.020939	.011490	.7684
	.000876	.009427	.016064	.007015	.013233	.014507	.003770	.005504	.009505	.011305	.014855	
(3)	−.006214	.196736	.015850	−.015964	−.019856	.058676	.001890	.010451	−.002492	−.032988	.000597	.9560
	.001195	.012862	.021918	.009571	.018056	.019794	.005144	.007510	.012968	.015425	.020269	
(4)	−.002425	.157241	.012244	−.009932	−.023085	.029129	−.001391	−.000178	−.026985	−.034468	.060298	.8757
	.001882	.020260	.034524	.015076	.028440	.031178	.008103	.011829	.020427	.024296	.031926	
(5)	.001242	.033311	−.029502	.002863	.012164	−.035119	−.006638	.003282	.011939	.013012	.019916	.7287
	.000860	.009261	.015781	.006892	.013000	.014252	.003704	.005407	.009337	.011106	.014594	
(6)	.002399	.011020	−.004485	−.007113	−.005882	−.029969	−.003820	−.009968	.005481	.001540	.042474	.5750
	.001119	.012044	.020524	.008963	.016907	.018535	.004817	.007032	.012144	.014444	.018980	
(7)	−.004922	.210527	.063576	−.014045	−.031098	.093580	−.015100	.036363	.000584	.037687	−.121872	.8529
	.002378	.025601	.043625	.019051	.035937	.039397	.010239	.014948	.025812	.030701	.040342	
(8)	.000406	.058089	.020604	.003961	.057044	.009251	.000938	.006531	−.008579	−.059630	−.023853	.8301
	.000986	.010613	.018084	.007897	.014898	.016332	.004245	.006196	.010700	.012727	.016724	
(9)	.000613	.108069	.069719	−.003518	−.026898	.039588	.012721	.009361	−.020951	−.022958	−.048037	.8616
	.001492	.016061	.027368	.011952	.022546	.024716	.006424	.009377	.016193	.019261	.025309	
			.321182	.065191	.093681	.156508	.034171	.036407	.100262	.075466	.117132	

Tab. 2: Stima senza vincoli sulla matrice S (senza intercetta), P = 80, L = 1017.16

i	b_i	s_{ij} (1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	R^2
(1)	.262413	-.154298	.024901	.005897	-.078638	-.007886	-.015345	.013409	.102900	.091698	.9176
	.015562	.046664	.019165	.036744	.032039	.009776	.013677	.026188	.032083	.042372	
(2)	.041818	-.016401	-.007125	-.011672	.010569	.001364	-.010759	-.005560	.023979	.015174	.7573
	.005434	.016294	.006692	.012830	.011187	.003414	.004776	.009145	.011203	.014796	
(3)	.141432	.031692	.002167	.010431	-.009086	.014402	-.010308	.020651	-.053283	-.025201	.9058
	.010679	.032021	.013151	.025213	.021985	.006708	.009385	.017970	.022015	.029075	
(4)	.135657	.018427	-.002856	-.011264	.002683	.003492	-.008280	-.017953	-.042389	.050696	.8669
	.011806	.035402	.014359	.027876	.024306	.007417	.010376	.019868	.024340	.032145	
(5)	.044361	-.032667	-.000760	.006112	-.002158	-.009138	.007430	.007315	.017066	.024832	.7049
	.005443	.016321	.006703	.012851	.011205	.003419	.004784	.009159	.011221	.014819	
(6)	.032373	-.010601	-.014114	-.017576	-.003807	-.008651	-.001953	-.003455	.009375	.051973	.4925
	.012044	.020524	.008963	.016907	.018535	.004817	.007032	.012144	.014444	.018980	
(7)	.166720	.076124	.000317	-.007108	.039906	-.005189	.019920	.018916	.021612	-.141317	.8263
	.025601	.043625	.019051	.035937	.039397	.010239	.014948	.025812	.030701	.040342	
(8)	.061699	.019569	.002778	.055067	.013675	.000122	.007886	-.010090	-.058306	-.022247	.8289
	.005994	.017975	.007382	.014154	.012341	.003766	.005268	.010088	.012358	.016322	
(9)	.113528	.068156	-.005308	-.029888	.046276	.011486	.011410	-.023235	-.020955	-.045609	.8606
	.009072	.027202	.011172	.021419	.018677	.005699	.007973	.015266	.018703	.024700	

Tab. 3: Stima con il vincolo di omogeneita' imposto sulla matrice S (con intercetta), P = 80, L = 1017.27

i	a_i	b_i	s_{ij} (1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	R^2
(1)	−.000157	.254858	−.106412	.036725	.005123	−.066087	−.006156	−.019407	.002401	.105635	.048179	.9015
	.001460	.022364	.050564	.022108	.040555	.035930	.011264	.016254	.027857	.035037	.047221	
(2)	.000197	.039259	−.011539	−.005442	−.010715	.009404	.001944	−.011830	−.005769	.023537	.010410	.7586
	.000468	.007571	.016194	.007081	.012988	.011507	.003607	.005206	.008922	.011221	.015123	
(3)	−.004198	.181010	.009011	−.013128	−.010025	.033998	.005442	.048531	.007604	−.040125	.002370	.9485
	.000676	.010948	.023417	.010239	.018782	.016640	.005216	.007528	.012901	.016227	.021869	
(4)	−.001667	.151325	.009672	−.008865	−.019387	.019846	−.000055	−.002284	−.023187	−.037153	.061414	.8745
	.000989	.016017	.034258	.014979	.027477	.024343	.007631	.011012	.018874	.023738	.031993	
(5)	.000153	.041803	−.025809	.001331	.006855	−.021792	−.008557	.006305	.006487	.016866	.018314	.7027
	.000471	.007628	.016315	.007133	.013085	.011593	.003634	.005244	.008988	.011305	.015236	
(6)	.000817	.023356	.000880	−.009339	−.013594	−.010610	−.006607	−.005576	−.002439	.007139	.040146	.5241
	.000619	.010027	.021447	.009377	.017201	.015240	.004777	.006894	.011816	.014861	.020029	
(7)	.001775	.158297	.040862	−.004623	.001553	.011616	−.003301	.017769	.034117	.013983	−.111974	.7830
	.001511	.024461	.052319	.022876	.041963	.037177	.011655	.016818	.028825	.036254	.048860	
(8)	.001250	.051505	.017741	.005149	.061159	−.001080	.002426	.004187	−.004352	−.062618	−.022611	.8226
	.000527	.008531	.018247	.007978	.014635	.012966	.004065	.005865	.010053	.012644	.017040	
(9)	.001829	.098586	.065595	−.001807	−.020970	.024706	.014863	.005985	−.014862	−.027262	−.046248	.8561
	.000796	.012885	.027559	.012050	.022104	.019583	.006139	.008859	.015183	.019097	.025737	

Tab. 4: Stima con il vincolo di omogeneita' imposto sulla matrice S (senza intercetta), P = 72, L = 1002.22

i	b_i	s_{ij} (1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	R^2
(1)	.253003	−.103539	.037811	.005887	−.067242	−.005735	−.020166	.002451	.105236	.045297	.9014
	.016156	.042927	.019664	.039937	.034291	.010564	.014642	.027860	.034849	.038874	
(2)	.041584	−.015140	−.006804	−.011672	.010853	.001417	−.010879	−.005832	.024037	.014022	.7570
	.005193	.013797	.006320	.012836	.011021	.003395	.004706	.008955	.011201	.012494	
(3)	.131386	.085878	.015949	.010420	.003079	.016698	−.015455	.008954	−.050789	−.074735	.8716
	.012235	.032509	.014892	.030244	.025969	.008000	.011089	.021099	.026392	.029439	
(4)	.131622	.040192	.002680	−.011269	.007569	.004414	−.010348	−.022651	−.041387	.030799	.8606
	.011599	.030818	.014117	.028672	.024618	.007584	.010512	.020002	.025019	.027908	
(5)	.043608	−.028605	.000273	.006112	−.020668	−.008966	.007044	.006438	.017253	.021118	.7015
	.005223	.013879	.006358	.012912	.011087	.003415	.004734	.009008	.011267	.012568	
(6)	.033019	−.014088	−.015000	−.017575	−.004590	−.008798	−.001622	−.002702	.009215	.055161	.4920
	.007106	.018879	.008648	.017564	.015081	.004646	.006440	.012253	.015327	.017097	
(7)	.179284	.008354	−.016921	−.007094	.024692	−.008061	.026357	.033546	.018492	−.079365	.7714
	.017207	.045719	.020943	.042535	.036522	.011251	.015595	.029673	.037116	.041403	
(8)	.066281	−.005147	−.003509	.055072	.008126	−.000926	.010234	−.004754	−.059443	.000347	.7839
	.006503	.017277	.007915	.016074	.013802	.004252	.005893	.011213	.014026	.015646	
(9)	.120213	.032095	−.014480	−.029880	.038181	.009958	.014835	−.015450	−.022615	−.012644	.8266
	.009762	.025939	.011882	.024132	.020721	.006383	.008848	.016835	.021058	.023490	

Tab. 5: Stima con i vincoli di omogeneita' e di simmetria imposti sulla matrice S (con intercetta), P = , L = 994.25

i	a_i	b_i	s_{ij} (1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	R^2
(1)	-.001112	.264784	-.066180	.010024	-.032564	-.024548	-.010049	.015758	.008415	.058083	.041059	.8676
	.002062	.029116	.043076	.008753	.021335	.025009	.009376	.009641	.023798	.016122	.020564	
(2)	-.000578	.039456	.010024	-.004196	-.015314	.003631	.005598	-.007916	.002877	.015362	-.010065	.6795
	.000496	.008163	.008753	.003861	.006005	.006255	.002307	.003143	.006131	.004866	.006328	
(3)	-.004100	.183551	-.032564	-.015314	-.010495	.009099	-.000478	-.005329	.010269	.022769	.001053	.9109
	.001047	.015092	.021335	.006005	.019532	.015487	.005287	.006206	.013091	.011087	.0015808	
(4)	-.000992	.151674	-.024548	.003631	.009099	-.000668	-.009559	-.013965	.005565	.002639	.027806	.8360
	.001253	.018513	.025009	.006255	.015487	.023897	.006592	.007153	.015693	.012199	.015274	
(5)	.000500	.033131	-.010049	.005598	-.000478	-.009559	-.006714	-.000688	-.000409	.005522	.015961	.6177
	.000506	.008189	.009376	.002307	.005287	.006592	.003433	.002725	.006854	.004148	.005265	
(6)	.001272	.024491	.015758	-.007916	-.005329	-.013965	-.000688	-.003838	.004679	.001089	.010210	.4198
	.000579	.010063	.009641	.003143	.006206	.007153	.002725	.004433	.007327	.005200	.006250	
(7)	.000824	.156778	.008415	.002877	.010269	.005565	.000409	.004679	-.001968	.002708	-.032953	.7108
	.001465	.025842	.023798	.006131	.013091	.015693	.006854	.007327	.0023254	.010200	.013281	
(8)	.001810	.040952	.058083	.025362	.022769	.002639	.005522	.001089	.002708	-.085379	-.022793	.7149
	.000807	.011415	.016122	.004866	.011087	.012199	.004148	.005200	.010200	.012201	.012043	
(9)	.001221	.105182	.041059	-.010065	.001053	.027806	.015961	.010210	-.032953	-.022793	-.030279	.8256
	.000736	.014050	.020564	.006328	.015808	.015274	.005265	.006250	.013281	.012043	.020944	

Tab. 6: Stima con i vincoli di omogeneita' e di simmetria imposti sulla matrice S (senza intercetta), P = , L = 977.09

		s_{ij}									R^2
i	b_i	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	
(1)	.245117	−.052218	.009100	.009100	−.010141	−.023428	−.014069	.009263	.054591	.028279	.8660
	.018820	.035174	.008022	.022922	.022068	.008296	.009135	.020798	.015406	.017957	
(2)	.049579	.009100	−.006016	−.007425	.004987	.005243	−.010136	.004990	.011201	−.011944	.6671
	.005442	.008022	.003627	.006994	.005977	.002237	.003139	.005820	.004925	.005931	
(3)	.116106	−.010141	−.007425	.022093	.006296	−.003481	−.005571	−.010799	.035458	−.026429	.7588
	.015674	.022922	.006994	.028033	.018697	.006802	.008582	.017403	.014239	.018054	
(4)	.132493	−.023428	.004987	.006296	−.002963	−.009400	−.014066	−.003421	.008001	.033994	.8221
	.013020	.022068	.005977	.018697	.023095	.006427	.007116	.014980	.012312	.014936	
(5)	.042205	−.014069	.005243	−.003481	−.009400	−.006739	.000092	.004645	.006610	.017098	.6160
	.005374	.008296	.002237	.006802	.006427	.003403	.002791	.006427	.004458	.005183	
(6)	.046246	.009263	−.010136	−.005571	−.014066	.000092	−.006293	.010558	.000956	.015197	.2576
	.007250	.009135	.003139	.008582	.007116	.002791	.004837	.007250	.005523	.006173	
(7)	.175097	−.001377	.004990	−.010799	−.003421	.004645	.010558	.012522	.011957	−.029074	.7234
	.015567	.020798	.005820	.017403	.014980	.006427	.007250	.021235	.010931	.013314	
(8)	.072651	.054591	.011201	.035458	.008001	.006610	.000956	.011957	−.105235	−.023539	.5417
	.009475	.015406	.004925	.014239	.012312	.004458	.005523	.010931	.012943	.011286	
(9)	.120508	.028279	−.011944	−.026429	.033994	.017098	.015197	−.029074	−.023539	−.003583	.8073
	.002545	.017957	.005931	.018054	.014936	.005183	.006173	.013314	.011286	.019637	

Tab. 7: Stima con i vincoli di omogeneita', simmetria e negativita' imposti sulla matrice S (con intercetta), P = , L = 990.12

			s_{ij}									
i	a_i	b_i	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	R^2
(1)	-.001571	.268727	-.094133	.008987	-.012766	-.004920	-.013548	.010520	.014187	.052098	.039573	.8684
	.002128	.029612	.044981	.009191	.022968	.025769	.009677	.010029	.024260	.016069	.020911	
(2)	.000314	.043186	.008987	-.010180	-.009511	.004330	.005490	-.004154	.000452	.012723	-.008137	.6767
	.000513	.008324	.009191	.004189	.006507	.006629	.002432	.003314	.006448	.005029	.006626	
(3)	-.003670	.177154	-.012766	-.009511	-.016162	-.001620	.001768	-.005310	.008494	.027860	.007245	.8975
	.001124	.016242	.022968	.006507	.020808	.016274	.005597	.006615	.014035	.011313	.016169	
(4)	-.000763	.152620	-.004920	.004330	-.001620	-.018938	-.007882	-.008230	.010781	.002015	.024462	.8214
	.001293	.019270	.025769	.006629	.016274	.024225	.006708	.007407	.016323	.011983	.015282	
(5)	.000464	.033911	-.013548	.005490	.001768	-.007882	-.007327	-.000748	.002355	.005837	.014054	.6187
	.000515	.008259	.009677	.002432	.005597	.006708	.003468	.002801	.007006	.004016	.005268	
(6)	.001384	.021953	.010520	-.004154	-.005310	-.008230	-.000748	-.009335	.006840	.002793	.007623	.3991
	.000595	.010302	.010029	.003314	.006615	.007407	.002801	.004660	.007677	.005107	.006340	
(7)	.000756	.154256	.014187	.000452	.008494	.010781	.002355	.006840	-.017985	-.003188	-.021937	.6870
	.001502	.026802	.024260	.006448	.014035	.016323	.007006	.007667	.024488	.009908	.013275	
(8)	.001614	.042942	.052098	.012723	.027860	.002015	.005837	.002793	-.003188	-.084168	-.015970	.7515
	.000789	.010941	.016069	.005029	.011313	.011983	.004016	.005107	.009908	.012015	.012038	
(9)	.001472	.105252	.039573	-.008137	.007245	.024462	.014054	.007623	-.021937	-.015970	-.046914	.8362
	.000712	.013648	.020911	.006626	.016169	.015282	.005268	.006340	.013275	.012038	.021017	

Tab. 8: Stima con i vincoli di omogeneita', simmetria e negativita' imposti sulla matrice S (senza intercetta), P = , L = 971.65

i	b_i	s_{ij} (1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	R^2
(1)	.244040	−.061123	.012559	−.012277	−.019171	−.013840	.006135	.003561	.053774	.030383	.8697
	.018701	.034768	.008235	.023287	.022541	.008296	.009456	.020748	.015283	.018364	
(2)	.048957	.012559	−.010574	−.004936	.004324	.005282	−.006089	.000309	.009192	−.010067	.6702
	.005466	.008235	.003847	.007325	.006319	.002334	.003253	.006148	.005041	.006282	
(3)	.112006	−.012277	−.004936	−.015534	−.001148	−.001077	−.000728	−.002970	.037852	.000817	.7469
	.016293	.023287	.007325	.029499	.019613	.007042	.009311	.018211	.014366	.019047	
(4)	.138508	−.019171	.004324	−.001148	−.020932	−.009219	−.008262	.012972	.014479	.026957	.7976
	.013709	.022541	.006319	.019613	.024201	.006647	.007642	.016020	.012493	.015345	
(5)	.042613	−.013840	.005282	−.001077	−.009219	−.006721	−.000813	.004589	.006873	.014926	.6022
	.005461	.008296	.002334	.007042	.006647	.003430	.002950	.006611	.004403	.005324	
(6)	.046856	.006135	−.006089	−.000728	−.008262	.000813	−.012266	.010578	.003646	.007799	.1856
	.007671	.009456	.003253	.009311	.007642	.002950	.005365	.007866	.005583	.006611	
(7)	.167631	.003561	.000309	−.002970	.012972	.004589	.010578	−.014141	.001336	−.016234	.6962
	.016135	.020748	.006148	.018211	.016020	.006611	.007866	.022407	.010968	.013866	
(8)	.069165	.053774	.009192	.037852	.014479	.006873	.003646	.001336	−.112323	−.014830	.5741
	.009252	.015283	.005041	.014366	.012493	.004403	.005583	.010968	.012879	.011500	
(9)	.130224	.030383	−.010067	.000817	.026957	.014926	.007799	−.016234	−.014830	−.039750	.8058
	.002379	.018364	.006282	.019047	.015345	.005324	.006611	.013866	.011500	.020566	

Tab. 9: Stime con matrice di covarianza proporzionale alla matrice S (con intercetta), P = 24, L = 965.53

i	a_i	b_i	s_{ij} (1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	R^2
(1)	-.001509	.268738	-.051268	-.001439	.013183	.011845	-.005268	.000332	.018403	.006348	.007864	.8125
	.001647	.028193	.029562	.003146	.008798	.009255	.004486	.003892	.012477	.006315	.006806	
(2)	.000124	.046114	-.001439	-.004987	.000142	-.000476	.002579	-.002459	.004656	.002234	-.000251	.6146
	.000377	.008115	.003146	.002535	.001494	.001886	.001500	.001470	.002982	.002000	.001631	
(3)	-.003136	.171082	.013183	.000142	-.011622	-.003927	.001841	.001464	.001204	-.002588	.000304	.8991
	.000627	.012480	.008798	.001494	.006854	.003631	.001810	.002007	.004202	.002836	.002579	
(4)	-.000601	.156258	.011845	-.000476	-.003927	-.019046	.002320	-.002661	.010348	-.002890	.004485	.8089
	.000760	.015831	.009255	.001886	.003631	.010735	.002249	.002565	.006808	.003392	.003887	
(5)	.000557	.032946	-.005268	.002579	.001841	.002320	-.005110	.000093	.000814	-.000033	.002765	.5285
	.000388	.008174	.004486	.001500	.001810	.002249	.002731	.001197	.002884	.001590	.002222	
(6)	.001347	.023821	.000332	-.002459	.001464	-.002661	.000093	-.007784	.007525	.001151	.002338	.3083
	.000457	.009948	.003892	.001470	.002007	.002565	.001197	.003870	.004271	.002044	.002201	
(7)	.001108	.144854	.018403	.004656	.001204	.010348	.000814	.007525	-.040296	.004708	-.007363	.6486
	.001165	.023864	.012477	.002982	.004202	.006808	.002884	.004271	.019437	.004825	.005482	
(8)	.001070	.048317	.006348	.002234	-.002588	-.002890	-.000033	.001151	.004708	-.012496	.003566	.4604
	.000597	.012704	.006315	.002000	.002836	.003392	.001590	.002044	.004825	.007331	.003214	
(9)	.001040	.107869	.007864	-.000251	.000304	.004485	.002765	.002338	-.007363	.003566	-.013709	.7907
	.000917	.014560	.006806	.001631	.002579	.003887	.002222	.002201	.005482	.003214	.007866	

i	b_i	s_{ij} (1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	R^2
(1)	.242440	-.034902	-.000746	.006559	.007569	-.003115	.001226	.012599	.005096	.005713	.8109
	.018731	.030871	.002270	.008068	.008292	.003813	.003548	.011567	.006015	.006064	
(2)	.048460	-.000746	-.003661	.001454	-.000225	.001635	-.002455	.003441	.001016	-.000458	.6042
	.005004	.002270	.002996	.002042	.001400	.001506	.002006	.002831	.001587	.001336	
(3)	.113894	.006559	.001454	-.020689	-.004824	.003311	.006730	.001649	.002765	.003046	.7736
	.012125	.008068	.002042	.017899	.005348	.003202	.005735	.005062	.003644	.004062	
(4)	.144658	.007569	-.000225	-.004824	-.013433	.001968	-.001032	.007664	-.001308	.003622	.8011
	.009958	.008292	.001400	.005348	.011980	.002174	.002178	.007010	.002599	.003838	
(5)	.043549	-.003115	.001635	.003311	.001968	-.003894	-.000794	.000202	-.000751	.001438	.4551
	.005351	.003813	.001506	.003202	.002174	.003330	.001274	.002146	.001395	.001806	
(6)	.048747	.001226	-.002455	.006730	-.001032	-.000794	-.008116	.005281	-.001273	.000434	.1082
	.007562	.003548	.002006	.005735	.002178	.001274	.006400	.004552	.001962	.001784	
(7)	.164690	.012599	.003441	.001649	.007664	.000202	.005281	-.028580	.003072	-.005329	.6558
	.014366	.011567	.002831	.005062	.007010	.002146	.004552	.022495	.004077	.005150	
(8)	.067821	.005096	.001016	.002765	-.001308	-.000751	-.001273	.003072	-.010074	.001458	.4057
	.008448	.006015	.001587	.003644	.002599	.001395	.001962	.004077	.009113	.002357	
(9)	.125742	.005713	-.000458	.003046	.003622	.001438	.000434	-.005329	.001458	-.009923	.7589
	.014459	.006064	.001336	.004062	.003838	.001806	.001784	.005150	.002357	.008926	

Tab. 11: Stima con matrice S zero (con intercetta), P = 16, L = 959.17
(senza intercetta), P = 8, L = 941.30

i	a_i	b_i	R^2	b_i	R^2
(1)	-.000583	.255975	.8155	.245151	.8141
	.001142	.026567		.015729	
(2)	.000366	.042237	.5304	.049036	.5166
	.000373	.008673		.005219	
(3)	-.003246	.172218	.8996	.111955	.7894
	.000540	.012555		.012187	
(4)	-.000516	.152756	.8062	.143186	.8031
	.000703	.016341		.009738	
(5)	.000531	.034907	.4396	.044772	.4045
	.000370	.008600		.005303	
(6)	.001514	.022507	.1693	.050617	-.0948
	.000468	.010880		.007838	
(7)	.000122	.160933	.6631	.163194	.6630
	.001076	.025029		.014732	
(8)	.001141	.047309	.3851	.068489	.3079
	.000561	.013044		.008397	
(9)	.000670	.111158	.7561	.123602	.7467
	.000592	.013776		.008349	

Le restrizioni che vengono sottoposte a test sono: (i) omogeneità della domanda di consumo, (ii) simmetria della matrice di Slutsky o matrice di sostituzione, (iii) semidefinitività della matrice di Slutsky. Seguendo l'impostazione data da Barten e Geyskens (1975) verranno verificate congiuntamente anche le condizioni: (iv) omogeneità e simmetria e (v) omogeneità, simmetria e negatività.

Il vincolo dell'equazione di bilancio permette di sopprimere una riga della matrice di sostituzione e quello di omogeneità di ridurre tale matrice ad essere una matrice quadrata di ordine $(n-1)$, dove n è il numero di beni che entrano nelle equazioni di domanda.

Riprendendo la forma compatta suggerita da Laitinen (1978) nel modello di Rotterdam:

$$y = (I \otimes X)\beta + \varepsilon, \qquad E(\varepsilon\varepsilon') = \Omega \otimes I \tag{7.1}$$

dove y, β ed ε sono costituiti dai sottovettori $y_j = [w_{it}^* Dq_{it}]$, $\beta_i = [\beta_i \; \pi_{i1} \ldots \pi_{in}]'$, $\varepsilon_i = [\varepsilon_{it}]$, inoltre Ω è non singolare e la t-esima riga della matrice X risulta uguale a $(Dq_t, Dp_{1t}, \ldots, Dp_{nt})$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ e $t = 1, \ldots, N$.

La condizione di omogeneità si esprime mediante il vincolo:

$$R\beta = 0, \qquad R = I \otimes a' \tag{7.2}$$

dove $a = [0 \; 1 \; \ldots \; 1]'$ è un vettore di ordine $(n+1)$ ed I è la matrice identità di ordine $(n-1)$.

L'usuale test F sotto la restrizione (7.2) risulta essere:

$$\frac{b'R'\Omega^{-1}Rb/a'(X'X)^{-1}a}{\operatorname{tr}\Omega^{-1}S} \tag{7.3}$$

con $(n-1)$ e $(n-1)(N-n-1)$ gradi di libertà, ed S è lo stimatore di Ω. La statistica (7.3) non può essere utilizzata se Ω è ignota.

Qualora in (7.3) venga sostituito a Ω ignota, la matrice stimata S, si ottiene la statistica:

$$\frac{b'R'S^{-1}Rb}{(n-1)\,a'(X'X)^{-1}a} \xrightarrow{\theta} \chi^2_{n-1}/(n-1) \tag{7.4}$$

Laitinen, attraverso esperimenti di simulazione, costruisce un modello della forma (7.1) che soddisfa al vincolo di omogeneità, con Ω preassegnata ed $N = 31$. Egli riesce così a mostrare come l'utilizzazione del test F basato su Ω (a lui ovviamente nota) porta la probabilità di commettere errori del primo tipo a valori accettabili, mentre l'utilizzazione del test asintotico χ^2_{n-1} basata sulla matrice stimata S mostra una forte distorsione verso il rifiuto dell'ipotesi di omogeneità. La distorsione risulta quasi irrilevante per valori di $n < 5$ ma cresce rapidamente al crescere di n. Ad esempio per $n = 14$ le simulazioni mostrano che si rifiuta l'ipotesi di nullità, vera per costruzione, nell'87% e nell'81% dei casi, quando si utilizzino i livelli di significatività del 5% e dell'1%.

Laitinen è anche in grado di determinare la distribuzione esatta della statistica:

$$\frac{b'R\,S^{-1}Rb}{a'\,(X'X)^{-1}\,a} \tag{7.5}$$

che risulta essere una T^2 di Hotelling, equivalente al multiplo $(n-1)(N-n-1)/(N-2n+1)$ della statistica F con $(n-1)$ e $(N-2n+1)$ gradi di libertà.

Bera (1982) mostra come la statistica (7.5) è interpretabile asintoticamente come test di Wald:

$$W = N \operatorname{tr} \hat{\Omega}^{-1} (\tilde{\Omega} - \hat{\Omega}) \tag{7.6}$$

dove i segni di tilde e cappello indicano rispettivamente le stime di massima verosimiglianza vincolate e non vincolate rispetto a (7.2). Cosicché risulta possibile determinare, alla luce dei risultati di Laitinen, l'equivalenza non asintotica con i test statistici rapporto tra massime verosimiglianze (LR) e moltiplicatore di Lagrange (LM):

$$LR = N \ln (|\tilde{\Omega}|/|\hat{\Omega}|) \tag{7.7}$$

$$LM = N \operatorname{tr} \tilde{\Omega}^{-1} (\tilde{\Omega} - \hat{\Omega}) \tag{7.8}$$

Le equivalenze tra le espressioni (7.6), (7.7) e (7.8) risultano:

$$LR = N \ln (1 + W/N) \tag{7.9}$$

$$LM = W/(1 + W/N) \tag{7.10}$$

quindi è possibile usare alternativamente i test LR e LM in termini non asintotici con i seguenti valori critici (Evans e Savin, 1980 pag. 13):

$$z_{LR} = N \ln [1 + z_W/N] \quad \text{e} \quad z_{LM} = z_W/[1 + z_W/N] \tag{7.11}$$

dove $z_W = N\,(n-1)\,F_\alpha\,(n-1),\ N-2n+1)/(N-2n+1)$.

Un risultato parallelo contenuto nello studio di Bera è la dimostrazione che il test LM possiede un grado di libertà in più rispetto ai test W ed LR, cosicché è applicabile anche quando $n = (N + 1)/2$ e non si possono utilizzare questi ultimi.

Meisner (1979) dimostra in modo analogo a Laitinen, utilizzando esperimenti di simulazione, che il test basato sul vincolo di simmetria della matrice di sostituzione è distorto verso il rifiuto dell'ipotesi di nullità. Anche per il vincolo di simmetria i risultati ottenuti quando $n = 5$ dimostrano che è accettabile il test χ^2_{n-1} asintotico basato sulla matrice stimata S. Per valori più elevati di n la distorsione cresce rapidamente, fino a dimostrarsi molto elevata per $n = 14$ dove l'ipotesi di simmetria, vera per costruzione, viene rifiutata nel 96% e nel 91% dei casi di simulazione, qualora si scelgano i livelli di significatività del 5% e dell'1%.

Sfortunatamente nel caso del vincolo di simmetria è estremamente difficile determinare l'esatta distribuzione del test quando S viene sostituito a Ω, poiché il vincolo di simmetria, a differenza del vincolo di omogeneità, non viene imposto equazione per equazione nel modello, ma simultaneamente su tutte le equazioni. Rimane quindi l'esigenza di apportare delle correzioni di ampiezza al test sul vincolo di simmetria e sui vincoli congiunti di omogeneità e simmetria.

La necessità di apportare tali correzioni viene mostrata da Bera, Byron e Jarque (1981), sempre attraverso esercizi di simulazione, anche se viene parimenti evidenziato che: « ... the appropriate size corrections are not yet obvious in the context of systems of equations with across equation restrictions ». La correzione di ampiezza del test attraverso il fattore $N/(N-k)$,- dove k rappresenta il numero di parametri stimati per ogni equazione (Meisner, 1979; Böhm, Rieder e Tintner, 1980; ed altri), risulta ad esempio appropriata quando $n = 5$, mentre è ampiamente inadeguata quando $n = 14$, nel senso che la correzione dovrebbe risultare ancora più ampia.

L'importanza della condizione di negatività nella domanda di consumo viene ribadita nel già citato lavoro di Barten e Geyskens, poiché intimamente legata all'ipotesi di convessità (locale) delle preferenze. L'imposizione del vincolo di negatività sulla matrice di sostituzione Ω avviene attraverso la scomposizione di Cholesky di tale matrice, proposta da Lau (1974), cioè:

$$\Omega = - BHB'$$

dove B è una matrice triangolare inferiore con elementi unitari sulla diagonale principale detta matrice dei fattori di Cholesky ed H è una matrice diagonale di ordine $(n-1) \times (n-1)$ con i valori di Cholesky $h_1, ..., h_{n-1}$ come elementi della diagonale. La condizione di negatività risulta così facilmente verificabile poiché implica che $h_i \geq 0, \forall i$.

Procedendo alla stima della matrice Ω cioè degli $1 + n(n-3)/2$ elementi della matrice B e degli $(n-1)$ elementi della matrice H, la condizione di negatività può essere imposta stimando $H^{1/2}$ invece di H.

La procedura per ottenere le stime di massima verosimiglianza di Ω imponendo la condizione di negatività è descritta compiutamente da Barten e Geyskens. Data la non linearità nei parametri indotta dall'espressione $\Omega = -BHB'$, viene utilizzato l'algoritmo di Fletcher e Powell (1963). Il vincolo induce almeno un valore h_i uguale a zero o approssimativamente uguale a zero a seconda delle capacità computazionali dello strumento di calcolo. Valori h_i uguali o prossimi a zero inducono seri problemi nel calcolo della matrice di covarianza degli stimatori di $\sqrt{h_i}$: « In practice, an exact zero h_i will not be easily produced by a computer, and one will find a very small value for $\sqrt{h_i}$ with a not necessarily small estimate for its variance » (vedi Barten e Geyskens, 1975).

La scelta del numero dei gradi di libertà nell'utilizzare il test rapporto tra massima verosimiglianza risulta piuttosto problematica. Infatti in questo caso i vincoli imposti non sono vincoli di uguaglianza ma di disuguaglianza. In generale bisogna tener conto del fatto che le stime sotto il vincolo di simmetria ed omogeneità e senza vincolo di negatività non portano solitamente a stime di valori h_i tutti negativi. D'altra parte l'imposizione del vincolo può far risultare un numero di valori h_i prossimi a zero più piccolo o più grande del numero di valori h_i negativi sotto i soli vincoli di omogeneità e simmetria. Non è quindi agevole in generale stabilire il numero esatto dei gradi di libertà per il vincolo di negatività. Questo problema verrà ripreso più avanti in sede di commento ai risultati empirici ottenuti, per i quali vengono riportati i risultati dei test LR nelle tabelle che seguono.

I risultati sono suddivisi in due gruppi distinguendo i casi in cui sono stati ottenuti stimando il sistema di domanda con o senza le intercette. Per entrambi i gruppi sono riportate le statistiche LR con gli usuali valori critici del test χ^2 ed i valori critici corretti sulla base dei risultati analitici già descritti in precedenza, ottenuti più recentemente in letteratura [10].

La Tab. 12 non fornisce i valori relativi al vincolo congiunto di omogeneità, simmetria e negatività. Ciò è dovuto a problemi di mancata convergenza nella stima dei parametri quando vengano posti contemporaneamente i tre vincoli sul sistema stimato con le intercette.

Nessuno dei vincoli imposti al sistema viene accettato qualora si faccia

[10] Alternativamente si potevano fornire i valori corretti dei test. Si è preferita questa forma per omogeneità con l'indicazione dell'esatto valore critico del test T^2 di Hotelling riferito al solo vincolo di omogeneità.

TAB. 12
TEST LR SULLE RESTRIZIONI IMPOSTE AL SISTEMA DI DOMANDA STIMATO CON LE INTERCETTE

Ipotesi alternative	Nessun vincolo	Omogeneità
Ipotesi di nullità		
omogeneità	35.77 (15.5) [43.2]	
omogeneità e simmetria	81.80 (51.0) [97.8]	46.04 (41.3) [79.2]

Tra parentesi tonda sono riportati i valori critici del test χ^2 al livello di significatività del 5%. Tra parentesi quadra gli stessi valori critici corretti.

TAB. 13
TEST LR SULLE RESTRIZIONI IMPOSTE AL SISTEMA DI DOMANDA STIMATO SENZA LE INTERCETTE

Ipotesi alternative	Nessun vincolo	Omogeneità	Omogeneità e simmetria
Ipotesi di nullità			
omogeneità	29.88 (15.5) [43.2]		
omogeneità e simmetria	80.14 (51.0) [90.2]	50.25 (41.3) [73.1]	
omogeneità simmetria e negatività	91.01 (54.6) [96.6]	61.13 (45.0) [79.6]	10.87 (7.8) [13.8]

Tra parentesi tonda sono riportati i valori critici del test χ^2 al livello di significatività del 5%. Tra parentesi quadra gli stessi valori critici corretti.

riferimento agli usuali valori critici del test asintotico χ^2. I gradi di libertà utilizzati per i test sono: $(n-1)$ per i vincoli di omogeneità, $(n-1)(n-2)/2$ per i vincoli di simmetria, ed il numero dei valori di Cholesky $h_i < 0$, ottenuti nella stima sotto il vincolo congiunto di omogeneità e simmetria, per i vincoli di negatività.

I risultati empirici dimostrano che, nel caso in cui non venga imposto il vincolo di negatività, tre valori h_i di Cholesky risultano negativi tra cui due con errori standard molto piccoli. Nel caso invece in cui venga imposto il vincolo di negatività risultano sei valori di Cholesky non significativamente diversi da zero. Sussiste dunque l'incertezza circa il numero di gradi di libertà da utilizzare. Potrebbero essere due se si considerano i valori significativamente negativi nella stima non vincolata rispetto all'ipotesi di negatività; tre, se si considera il numero di valori h_i con segno negativo risultanti dalle stesse stime; sei, se si considerano i valori h_i non significativamente diversi da zero nella stima vincolata dall'ipotesi di negatività. Solo nell'ultimo caso il test porterebbe ad accettare l'ipotesi di negatività pur con un valore critico di 12.6 non corretto in base al fattore $N/(N-k)$. L'ipotesi, tuttavia che siano sei i vincoli imposti per la negatività sembra troppo forte; più credibile risulta la scelta tra due o tre gradi di libertà. Dalle tabelle risulta chiaramente che il valore critico 13.8 corretto in base al fattore $N/(N-k)$ corrispondente al χ^2 con tre gradi di libertà porta ad accettare l'ipotesi di negatività, mentre la scelta di due gradi di libertà conduce ad un valore critico corretto pari a 10.6 appena al di sotto del valore del test. Le conclusioni sulla verifica della condizione di negatività risultano, comunque, meno problematiche di quanto possa apparire. Infatti anche nell'ipotesi più sfavorevole in cui la scelta più appropriata risulti quella di due gradi di libertà, resta a favore dell'ipotesi di negatività il fatto che si è utilizzato un fattore di correzione che sulla base del lavoro di Bera, Byron e Jarque risulta approssimato per difetto quando $n > 5$.

La correzione del valore critico del test di omogeneità è stata ottenuta utilizzando le relazioni tra valori critici nei test W, LR, LM riportate in (7.11). Mentre tutti gli altri valori critici sono corretti in base al fattore $N/(N-k)$.

Operate le correzioni sui valori critici, tutti i test portano ad accettare, sulla base della verifica empirica, le restrizioni imposte dalla teoria.

8. *Conclusioni*

L'obiettivo di questo studio era quello di stimare un sistema di equazioni di domanda sotto vari vincoli suggeriti dalla teoria economica sui coefficienti del sistema: omogeneità, simmetria, negatività della matrice di sostituzione. Quest'ultima condizione è stata verificata utilizzando la scomposizione di Cholesky. Essa implica combinazioni non lineari dei parametri che sono stati stimati con una procedura fondata sul principio di massima verosimiglianza. In particolare, inizialmente si stima il modello di Rotterdam senza vincoli, e successivamente con i vincoli necessari per assicurare la proprietà di omogeneità, simmetria, e negatività.

I risultati ottenuti indicano che le restrizioni assunte dalla teoria della domanda non sono necessariamente irrealistiche e che il rigetto di queste restrizioni, dimostrato in molti studi (Barten, Byron, ecc.), è dovuto alle difficoltà implicite nell'uso di test statistici che risultano appropriati solo asintoticamente. Anche nel caso italiano, precedenti ricerche hanno portato a risultati analoghi per i vincoli di omogeneità e simmetria (si veda, ad es., Viviani, 1979). In effetti, test equivalenti a quelli usati negli studi sopra citati conducono ad un apparente rigetto dell'ipotesi di omogeneità, simmetria e negatività, mentre utilizzando criteri più appropriati ed effettuando opportune correzioni suggerite da recenti contributi della letteratura (Laitinen, Meisner, Bera, Byron e Jarque) si ottengono risultati alquanto differenti.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

BARNETT A.W., « Theoretical Foundations for the Rotterdam Model », *Review of Economic Studies*, 1979, *46*, 109-30.

——, *Consumer Demand and Labor Supply*, Amsterdam: North Holland, 1981.

BARTEN A.P., « Consumer Demand Functions under Conditions of Almost Additive Preferences », *Econometrica*, 1964, *32*, 1-38.

——, «Evidence on the Slutsky Conditions for Demand Equations», *The Review of Economics and Statistics*, 1967, *49*, 77-84.

——, « Estimating Demand Equations », *Econometrica*, 1968, *36*, 213-51.

——, « Maximum Likelihood Estimation of a Complete System of Demand Equations », *European Economic Review*, 1969, *1*, 7-73.

——, « Complete Systems of Demand Equations: Some Thoughts about Aggregation and Functional Forms », *Recherches Economiques de Louvain*, 1974, *40*, 1-18.

——, « The Systems of Consumer Demand Functions Approach: A Review », *Econometrica*, 1977, *45*, 23-51.

——, GEYSKENS E., « The Negativity Condition in Consumer Demand », *European Economic Review*, 1975, *6*, 227-60.

BASMANN R.L., BATTALIO R.C., and KAGEL J.H., « Comments on R.P. Byron's 'The Restricted Aitken Estimation of Sets of Demand Relations' », *Econometrica*, 1973, *41*, 365-70.

BERA A.K., « A Note on Testing Demand Homogeneity », *Journal of Econometrics*, 1982, *18*, 291-94.

——, Byron R., Jarque C., « Further Evidence on Asymptotic Tests for Homogeneity and Simmetry in Large Demand Systems », *Economics Letters,* 1981 *8,* 101-105.

Bewley R.A., « Tests of Restrictions in Large Demand Systems », *European Economic Review,* 1983, *20,* 257-69.

Blackorby C., Primont D., and Russel R.R., *Duality, Separability, and Functional Structure,* New York: Elsevier North-Holland, 1978.

Bohm B., Rieder B., Tintner G., « A System of Demand Equations for Austria », *Empirical Economics,* 1980, *5,* 129-42.

Brown J.A.C., Deaton A.S., « Models of Consumer Behavior: A Survey », *Economic Journal,* 1972, *82,* 1145-1236.

Byron R.P., « The Restricted Aitken Estimation of Sets of Demand Relations », *Econometrica,* 1970, *38,* 816-30.

——, « A Simple Method for Estimating Demand Systems under Separable Utility Assumptions », *Review of Economic Studies,* 1970, *37,* 261-74.

Court R.H., « Utility Maximization and the Demand for New Zealand Meats », *Econometrica,* 1967, *35,* 424-46.

Christensen L.R., Jorgenson D.W., Lau L.J., « Transcendental Logarithmic Utility Function », *American Economic Review,* 1975, *65,* 367-82.

Deaton A.S., « The Estimation and Testing of Systems of Demand Equations: A Note », *European Economic Review,* 1972, *3,* 399-411.

——, « The Analysis of Consumer Demand in the United Kingdom, 1900-1970 », *Econometrica,* 1974, *42,* 341-67.

——, Muellbauer J., *Economics and Consumer Behavior,* Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

Diewert W.E., « A Note on Aggregation and Elasticities of Substitution », *Canadian Journal of Economics,* 1974, *7,* 12-20.

Evans G.B.A., Savin N.E., « Conflict Among the Criteria Revisted: The W, LR and LM Tests », Paper presented at the fourth World Congress of the Econometric Society, 1980.

Fletcher R., Powell, M.J.D., « A Rapid Descent Method for Minimisation », *Computer Journal,* 1963, *6,* 163-68.

Frisch R.A., « A Complete Scheme for Computing all Direct and Cross Demand Elasticities in a Model with Many Sectors », *Econometrica,* 1959, *27,* 177-96.

Goldberger A.S., « Functional Form and Utility: A Review of Consumer Demand Theory », Systems Formulation, Methodology and Policy Workshop Paper 6703, SSRI, University of Wisconsin, 1967.

——, « Direct Additive Utility and Constant Marginal Budget Shares », *Review of Economic Studies,* 1969, *36,* 251-54.

Gorman W.M., « Community Preference Fields », *Econometrica,* 1953, *21,* 63-80.

——, « Separable Utility and Aggregation », *Econometrica*, 1959, *36*, 53-56.

GREEN H.A.J., *Aggregation in Economic Analysis*, Princeton: Princeton University Press, 1964.

HOUTHAKKER H.S., « New Evidence on Demand Elasticities », *Econometrica*, 1965, *33*, 277-88.

KIEFER N.M., MACKINNON J.G., « Small Sample Properties of Demand System Estimates », in S. Goldfeldt, R.E. Quandt, ed., *Studies in Nonlinear Estimation*, Cambridge, MA: Ballinger, 1976.

LAITINEN K., « Why is Demand Omogeneity So Often Rejected », *Economics Letters*, 1978, *1*, 187-91.

LAU L.J., « Application of Duality Theory: Comments », in M.D. Intriligator and D.A. Kendrick, eds., *Frontiers of Quantitative Economics*, Vol. II, Amsterdam: North-Holland, 1974.

LEONI R., « A proposito dell'impiego del modello di Theil-Barten nell'analisi della domanda di beni di consumo in Italia, *Statistica*, 1969, *29*, 227-286.

MCFADDEN D.A., « Existence Conditions for Theil-type Preferences », D.P., Department of Economics, UCLA, Berkeley, CA., 1964.

——, MAS-COLELL A., MANTEL R., RICHTER M., « A Characterization of Community Excess Demand Functions », *Journal of Economic Theory*, 1974, *9*, 361-74.

MEISNER J., « The Sad Fate of the Asymptotic Slutsky Simmetry Test for Large Systems », *Economics Letters*, 1979, *3*, 77-80.

MUELLBAUER J., « Aggregation, Income Distribution and Consumer Demand », *Review of Economic Studies*, 1975, *42*, 525-43.

——, « Community Preferences and the Representative Consumer », *Econometrica*, 1976, *44*, 979-99.

PARKS R.W., « Systems of Demand Equation; An Empirical Comparisons of Alternative Functional Forms », *Econometrica*, 1969, *37*, 629-50.

PEARCE I.F., *A Contribution to Demand Analysis*, Oxford: Oxford University Press, 1964.

PHLIPS L., *Applied Demand Analysis*, Amsterdam: North Holland, 1974.

ROY R., *De l'utilité*, Paris: Hermann et Cie, 1942.

SARGAN J., « Some Discrete Approximations to Continuous Time Stochastic Models », *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, 1974, *36*, 74-90.

SCHULTZ H., *The Theory and Measurement of Demand*, Chicago: University of Chicago Press, 1938.

SLUTSKY E., « Sulla Teoria del Bilancio del Consumatore », *Giornale degli Economisti*, 1915, I-26.

SONNENSCHEIN H., « Do Walras Identity and Continuity Characterize the Class of Community Excess Demand Functions? », *Journal of Economic Theory*, 1973, *6*, 345-54.

——, « Market Excess Demand Functions », *Econometrica*, 1972, *40*.

STONE R., « Linear Expenditure System and Demand Analysis: An Application to the Pattern of British Demand », *Economic Journal*, 1954, *64*, 511-27.

THEIL H., « The Information Approach to Demand Analysis », *Econometrica*, 1965, *33*, 67-87.

——, *Economics and Information Theory*, Amsterdam: North Holland, 1967.

——, « An Economic Theory of the Second Moments of Disturbances of Behavioral Equations », *The American Economic Review*, 1972, *62*, 190-94.

——, *Theory and Measurement of Consumer Demand*, 1-2, Amsterdam: North Holland, 1975/1976.

VIVIANI A., « Sull'impiego del modello di Theil-Barten per l'analisi della domanda di beni di consumo in Italia », *Note Economiche*, 1979, *6*, 107-32.

WOLD H., JUREEN L., *Demand Analysis: A Study in Econometrics*, New York: Wiley, 1953.

WORKING E., « What Do Statistical Demand Curves Show », *Quarterly Journal of Economics*, 1927, *41*, 212-35.

YOSHIHARA K., « Demand Functions: An Application to the Japanese Expenditure Pattern », *Econometrica*, 1969, *37*, 257-74.

AN EMPIRICAL ASSESSMENT OF THE NEOCLASSICAL THEORY OF DEMAND: THE ITALIAN CASE 1960-1983

This paper aims at estimating a system of demand equations under the restrictions suggested by the traditional theory of consumer demand: the homogeneity condition, the symmetry condition and negativity condition, i.e., the negative semidefiniteness of the substitution matrix. The three conditions are tested by estimating the Rotterdam model on Italian data, both in the restricted and the unrestricted forms. The maximum likelihood principle is used to estimate the model. In particular, the negativity condition is imposed by using the Cholesky decomposition, hence introducing non-linear combinations of the parameters.

Following some recent theoretical works, we can calculate the exact distribution of the tests and propose some correction factors for tests which fail to attain the asymptotic conditions. Our results show that the restrictions suggested by economic theory are not unrealistic in the Italian case.

This is in contrast with the results of previous research aimed at testing the homogeneity and symmetry properties. Furthermore, these results, obtained for Italy and other countries may be misleading, since they are based on tests with approximated asymptotic distribution. Montecarlo simulations have indeed shown that these tests are severely biased towards rejection of the null hypothesis (the restricted model) when the number of commodity groups in the demand system is large.