

ISABELLA PROCIDANO - DOMENICO SARTORE

METODOLOGIA STATISTICA
PER L'IDENTIFICAZIONE
DI UN MODELLO DINAMICO:
IL CASO DELLA CURVA DI PHILLIPS ITALIANA

Estratto da « RICERCHE ECONOMICHE » n. 1 - 1979

LABORATORIO DI ECONOMIA POLITICA, CA' FOSCARI - VENEZIA

METODOLOGIA STATISTICA PER L'IDENTIFICAZIONE DI UN MODELLO DINAMICO: IL CASO DELLA CURVA DI PHILLIPS ITALIANA (*)

1. *Introduzione*

La letteratura statistica si è occupata recentemente di modelli stocastici dinamici e dei problemi di stima della funzione di risposta impulsiva.

L'interesse verso questi problemi nasce dalla necessità di utilizzare modelli che non si limitino a descrivere unicamente il comportamento di un sistema in condizioni di equilibrio, come avviene nel caso della regressione, ma che siano in grado di esprimere una relazione dinamica tra le variabili. Un modello dinamico è caratterizzato dalla conoscenza della funzione di risposta impulsiva. E' perciò giustificato l'interesse che suscitano i vari metodi di stima.

Nel dominio temporale, questa procedura risulta particolarmente complessa, soprattutto se come ingresso del modello si ha un vettore di variabili. Nell'approccio frequenziale, la funzione di risposta impulsiva può essere stimata più agevolmente: come trasformata di Fourier della funzione di risposta frequenziale, che ovviamente descrive il comportamento del sistema nel dominio delle frequenze, oppure attraverso i diagrammi di Bode. In quest'ultimo caso si utilizzano strumenti propri della teoria dei sistemi lineari per identificare il modello e per stimare i valori iniziali della funzione di risposta impulsiva.

(*) La prima versione di questa ricerca è stata presentata da D. Sartore in un seminario svoltosi presso l'Istituto Statistico-Matematico dell'Università di Modena, maggio 1978.

Il primo paragrafo è opera di I. Procidano. I paragrafi 2, 3, 5, 6 sono opera di D. Sartore. Il paragrafo 4 è comune ad entrambi gli autori.

Questo modo di procedere, anche se merita ulteriori approfondimenti da un punto di vista statistico, può consentire di raggiungere risultati interessanti: i valori iniziali della funzione di risposta impulsiva possono essere utilizzati in procedure successive di minimizzazione della somma del quadrato dei residui, o, nell'ambito della stima parametrica, per la stima di massima verosimiglianza dei parametri.

La validità dei diagrammi di Bode nella stima della funzione di risposta impulsiva è stata verificata analizzando empiricamente un problema economico di particolare attualità: la curva di Phillips nel caso italiano.

La curva di Phillips esprime un legame funzionale tra livello del salario, tasso di disoccupazione e prezzi.

Il modello in generale utilizzato nelle verifiche empiriche e negli studi teorici di questo legame è di tipo lineare:

$$\dot{w}_t = \underset{\sim}{a}' \underset{\sim}{x}_t + \eta_t$$

dove \dot{w}_t è il saggio di variazioni dei salari

$\underset{\sim}{x}_t$ è il vettore di variabili esplicative

$\underset{\sim}{a}'$ è un vettore di parametri

η_t è la componente erratica.

Ad esso si è sostituito un modello dinamico, sempre lineare, in grado di esprimere la dipendenza tra le variabili ad istanti non simultanei:

$$\dot{w}_t = \int_0^{\infty} \underset{\sim}{w}'(u) \underset{\sim}{x}(t-u) du + \eta_t$$

dove $\underset{\sim}{w}'(u)$ è il vettore di funzioni di risposta impulsiva.

Tra i due approcci, va sottolineata la differente natura del termine η_t . Nel primo caso η_t è per assunzione un processo puramente casuale, nel secondo un qualsiasi processo stocastico purché stazionario ed incorrelato con le variabili di ingresso.

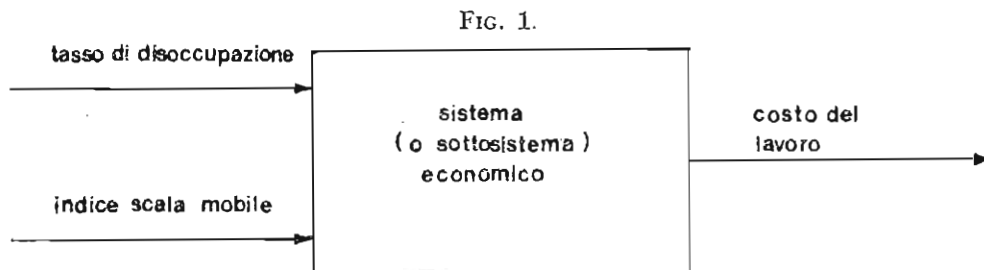
Solo la metodologia statistica ed i risultati conseguiti saranno discussi in questa nota. Tutte le implicazioni di natura economica connesse alla presente analisi, sia per quanto riguarda le scelte dei processi economici da inserire nel modello, sia per i risultati derivanti dalla sua identificazione verranno tralasciate in quanto già ampiamente discusse in un altro lavoro (1).

(1) Procidano-Sartore (1979b).

2. Costruzione del modello dinamico

Se si utilizzano i concetti propri della teoria dei sistemi e dei controlli automatici, il tasso di disoccupazione e l'indice della scala mobile possono essere immaginati come « flussi »⁽²⁾ continui costituenti gli « ingressi » di un sistema, o sottosistema, economico il cui flusso di « uscita » è rappresentato dal costo del lavoro.

Graficamente, utilizzando i diagrammi a blocchi, si ha:



Si ipotizza che il sistema della fig. 1 possa essere rappresentato da un « sistema dinamico »⁽³⁾, ossia da un'ampia classe di modelli matematici configurabili come equazioni integro-differenziali. Due ulteriori assunzioni riguardano la « linearità »⁽⁴⁾ e l'« invarianza »⁽⁵⁾ nel tempo del sistema dinamico.

Si dimostra⁽⁶⁾ che la soluzione di una equazione integro-differenziale lineare con coefficienti costanti, che rappresenti un sistema dinamico lineare invariante (SDLI), può essere generalmente scritta, per sistemi realizzabili sul piano fisico e riferiti, per semplicità, ad un solo ingresso ed una sola uscita, sotto forma del seguente integrale di convoluzione:

⁽²⁾ In questa sede il concetto di « flusso » non assume lo stesso significato economico che lo contrappone al concetto di « stock ».

⁽³⁾ Per brevità si omette la definizione di sistema dinamico [cfr. Marro (1976, p. 29)].

⁽⁴⁾ Un sistema dinamico è lineare se, dati due qualsiasi ingressi $x_1(t)$ e $x_2(t)$ che producono due uscite $y_1(t)$ e $y_2(t)$, l'ingresso $K_1x_1(t) + K_2x_2(t)$ produce l'uscita $K_1y_1(t) + K_2y_2(t) \quad \forall K_1, K_2$.

In base a questa definizione, qualora $y(t)$ sia l'uscita di un sistema dinamico lineare a più ingressi $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ allora $y(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t)$ dove $y_i(t)$ è l'uscita del sistema dinamico lineare riferita alla sola azione dell'ingresso $x_i(t)$ (proprietà di sovrapposizione degli effetti).

⁽⁵⁾ Un sistema dinamico lineare è invariante nel tempo qualora nessun termine dell'equazione integro-differenziale dipende in modo esplicito dalla variabile temporale t , che è la variabile indipendente dell'equazione. Questa assunzione ha il significato di limitare la descrizione del sistema lineare alla classe delle equazioni integro-differenziali lineari con coefficienti costanti ed implica che il processo definito da tale equazione non sia di tipo evolutivo.

⁽⁶⁾ Jenkins-Watts (1968).

$$(2.1) \quad y(t) = \int_0^{\infty} w(u) x(t-u) du$$

dove $y(t)$ è l'uscita del sistema, $x(t)$ è l'ingresso del sistema e $w(u)$ è una funzione ponderatrice in u , variabile dei ritardi temporali, denominata « funzione di risposta impulsiva ». Tale funzione svolge un ruolo centrale nel problema di identificazione di un SDLI, poiché ne caratterizza completamente il comportamento.

In certi casi può essere interessante osservare il comportamento dell'uscita $y(t)$, quando, data una certa funzione $w(u)$ che caratterizza il sistema, l'ingresso è costituito dalla « funzione a gradino unitaria » $u(t)$ così definita:

$$(2.2) \quad u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1/2 & \text{per } t = 0 \\ 1 & \text{per } t = 1 \end{cases}$$

L'uscita del sistema si otterrà, in base alla (2.1), dalla seguente funzione integrale:

$$(2.3) \quad y(t) = \int_0^t w(u) du$$

In questo caso $y(t)$ viene denominata « funzione di risposta a gradino » e rappresenta, ovviamente, la risposta del sistema quando esso riceve una sollecitazione unitaria dal processo in ingresso. Per $t \rightarrow \infty$ la funzione di risposta a gradino si approssima al suo valore limite, cioè:

$$(2.4) \quad w = \int_0^{\infty} w(u) du$$

chiamato « fattore di amplificazione dello stato di equilibrio ». Questo fattore ha un significato di rilievo. Esso rappresenta la definitiva dimensione di $y(t)$ quando il sistema riceve una sollecitazione unitaria, vi è cioè una sola variazione unitaria nel flusso in ingresso.

La necessità di dare soluzione a sistemi lineari complessi e le difficoltà proprie del calcolo degli integrali di convoluzione, suggeriscono di trasferire l'analisi dei processi del sistema ed il modello interpretativo nel dominio delle frequenze.

Nel caso di processi deterministici, il modello (2.1) risulta formalmente appropriato e la semplificazione nella rappresentazione del modello si può ottenere ricorrendo semplicemente all'analisi di Fourier. Si determina in tal modo una funzione $W(f)$, denominata « funzione di risposta frequenziale » del sistema, che, se ci si riferisce ad un sistema semplice con un solo ingresso ed una sola uscita, è data dal rapporto $Y(f)/X(f)$, cioè dal rapporto tra le trasformate di Fourier di $y(t)$ e $x(t)$. Successivamente, la funzione $w(u)$, qualora si

voglia determinarla, si ottiene facilmente mediante la trasformata inversa di Fourier di $W(f)$.

Anche la funzione $W(f)$ caratterizza completamente il sistema e poiché, in generale, è una funzione a valori complessi, si può operare una scomposizione distinguendo la parte reale da quella immaginaria mediante la sua rappresentazione in coordinate polari:

$$(2.5) \quad w(f) = A(f) e^{iF(f)}$$

dove:

$A(f)$ è conosciuta come « funzione di amplificazione » del sistema ed $F(f)$ come « funzione di fase ».

Nel caso invece di processi stocastici, il punto di partenza non può più essere il modello (2.1). Si ipotizza allora un modello stocastico, che per un sistema con due ingressi ed una singola uscita può essere così rappresentato:

$$(2.6) \quad y(t) - \mu_y = \int_0^{\infty} w_1(u) [x_1(t-u) - \mu_1] du + \\ + \int_0^{\infty} w_2(u) [x_2(t-u) - \mu_2] du + N(t)$$

oppure, nel caso in cui il tempo assuma valori discreti:

$$(2.6 \text{ bis}) \quad y_t - \mu_y = \sum_{k=0}^{\infty} w_k (x_{1t-k} - \mu_1) + \\ + \sum_{s=0}^{\infty} w_s (x_{2t-s} - \mu_2) + N_t$$

dove μ_y , μ_1 , μ_2 , sono rispettivamente i valori medi di $y(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $N(t)$ è una serie stazionaria non correlata con $x_1(t)$ e con $x_2(t)$.

Le difficoltà nel determinare $w_1(u)$ e $w_2(u)$, trattandosi di processi non deterministici, si moltiplicano. Si dovrà, infatti, cercare degli stimatori $w_1(u)$ e $w_2(u)$ che godano delle ben note proprietà statistiche, dopo aver opportunamente « identificato » il tipo di funzione che governa il loro andamento.

In Jenkins-Watts (1968) vengono descritte alcune alternative per ottenere i valori stimati di $w(u)$ e se ne parlerà più ampiamente nel successivo paragrafo. In questo, si accennerà al metodo di stima diretto poiché serve a fornire alcune valide ragioni per l'uso dell'analisi spettrale. Esso fa riferimento al criterio della minimizzazione dell'errore quadratico.

Nel caso più semplice, in cui si abbia un solo ingresso ed una sola uscita, l'equazione (2.6) viene riscritta come segue:

$$(2.7) \quad y(t) - \mu_y = \int_0^{\infty} w(u) [x(t-u) - \mu_x] du + N(t)$$

dove $x(t)$ e $y(t)$ sono i processi stocastici in ingresso ed in uscita

$$\mu_x = E[x(t)] \quad \mu_y = E[y(t)]$$

$N(t)$ è un processo stocastico rappresentante una componente erratica od un segnale di disturbo che può contenere anche una parte sistematica ed è incorrelato con $x(t-u)$.

Si dimostra che la funzione $w(u)$ tale che risulti minima la quantità:

$$(2.8) \quad E[N(t)]^2$$

in condizioni di stazionarietà per $x(t)$ ed $y(t)$, deve soddisfare l'equazione integrale di Wiener-Hopf:

$$(2.9) \quad \gamma_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w(u) \gamma_{xx}(\tau-u) du \quad \tau \geq 0$$

dove $\gamma_{xy}(\tau)$ è denominata « funzione di covarianza incrociata tra x e y » e quindi $\gamma_{xx}(\tau)$ è la « funzione di autocovarianza del processo x ».

Affinche il sistema sia fisicamente realizzabile è necessario che $w(u) = 0$ per $u < 0$. Per le realizzazioni $x(t)$ e $y(t)$ di lunghezza finita T , provenienti da processi stocastici $x(t)$ e $y(t)$, la funzione $w(u)$ viene scelta in modo tale che minimizzi:

$$(2.10) \quad \int_0^T n^2(t) dt$$

dove $n(t)$ è la realizzazione del processo $N(t)$, supposto « puramente casuale » ⁽⁷⁾. Si dimostra allora, che lo stimatore dei minimi quadrati $\widehat{w}(u)$ si ottiene mediante il calcolo delle variazioni e deve soddisfare l'equazione:

$$(2.11) \quad \widehat{\gamma}_{xy}(\tau) = \int_0^T w(u) \widehat{\gamma}_{xx}(\tau-u) du \quad u \geq 0$$

analoga alla (2.9), dove però $\widehat{\gamma}_{xy}(\tau)$ è la stima di $\gamma_{xy}(\tau)$ ottenuta in base a ⁽⁸⁾:

$$(2.12) \quad \widehat{\gamma}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^{T-|\tau|} x(t) y(t+\tau) dt \quad |\tau| \leq T$$

L'espressione (2.11) potrebbe indurre a stimare direttamente $w(u)$ utilizzando questa stessa equazione opportunamente adattata al caso discreto, ma ciò incontra due serie considerazioni critiche fortemente limitative per questo tipo di approccio. Anzitutto la funzione $\widehat{w}(u)$ tende a zero dopo molti valori di u , quindi il modello dinamico risulterebbe scarsamente significativo sul piano dell'interpretazione dei parametri (anche dell'interpretazione economica). La seconda è una ragione prettamente statistica e riguarda il fatto che gli stima-

⁽⁷⁾ Un processo stocastico stazionario continuo è « puramente casuale » (« white noise ») qualora abbia densità spettrale costante.

⁽⁸⁾ Per semplicità si suppone che i processi $x(t)$ e $y(t)$ abbiano media nulla.

tori $\widehat{w}(u)$, definiti per ogni valore di u , risultano altamente correlati tra loro per valori contigui di u .

Questi inconvenienti vengono rimossi con l'utilizzazione dell'analisi spettrale e la stima della funzione di risposta frequenziale che risulta incorrelata per frequenze contigue.

Parallelamente a quanto detto per i processi deterministici, $\widehat{W}(f)$ sarà determinato (per semplicità si considera ancora il caso un solo ingresso ed una sola uscita dal sistema) dal rapporto $\overline{C}_{xy}(f)/\overline{C}_{xx}(f)$, cioè dal rapporto tra lo « stimatore perequato dello spettro incrociato tra l'ingresso $x(t)$ e l'uscita $y(t)$ » e lo « stimatore perequato dello spettro singolare dell'ingresso $x(t)$ ».

Si parla di stimatori perequati essendo noto che lo spettro campionario, dato dalla trasformata di Fourier della funzione di autocovarianza campionaria, mentre è asintoticamente non distorto, risulta inconsistente.

Si ricorre quindi a procedure di perequazione calcolando delle medie ponderate dello spettro campionario su bande di frequenze più ristrette. Tale operazione avviene utilizzando funzioni ponderatrici dette « finestre dei ritardi » qualora vengano definite nel dominio temporale, e « finestre spettrali » se definite nel dominio frequenziale. Queste procedure permettono riduzioni di varianza dello spettro campionario, anche in misura notevole, determinando l'eliminazione dei picchi spuri, non dovuti cioè alle componenti cicliche realmente presenti nei processi. Contemporaneamente però, esse hanno un limite nella loro applicazione, infatti tanto più viene ridotta la varianza e maggiormente lo stimatore risulta distorto. Poiché la diminuzione della varianza dipende dall'ampiezza della banda di frequenza della finestra spettrale, esiste la possibilità di trovare un compromesso tra l'esigenza della correttezza dello stimatore e quella della consistenza. Generalmente, non esistendo alcun criterio oggettivo, l'ampiezza della banda frequenziale viene scelta soggettivamente utilizzando tre diversi punti di troncamento nella finestra spettrale.

Per concludere, è opportuno mettere in evidenza, l'analogia che tale metodologia ha con il metodo della regressione multipla ma anche le significative differenze che con esso sussistono. Quest'ultimo, infatti, mette i processi in relazione di dipendenza lineare tra loro per istanti temporali simultanei. Si tratta, quindi, di un modello statico perché descrive solo il comportamento allo stato di equilibrio del sistema. La (2.6) invece è una generalizzazione del modello di regressione e potrebbe essere definita, per analogia, una « regressione lineare dinamica ».

In secondo luogo, mentre nell'usuale modello di regressione si suppone che il disturbo sia un processo stocastico « puramente casuale », nel modello dinamico, $N(t)$ descrive una qualsiasi serie temporale stazionaria e può, quindi, contenere componenti dovute a errori di specificazione del modello purché rimanga valida l'ipotesi di incorrelazione tra $N(t)$ e $x(t-u)$, per ogni ritardo.

Così le funzioni di coerenza quadratica, parziale e multipla, possono essere interpretate come una traduzione, nel dominio delle frequenze, di ciò che, nel dominio temporale, si esprime nei concetti di correlazione quadratica, parziale e multipla.

3. Stima della funzione di risposta impulsiva

Per stimare la funzione di risposta impulsiva si può ricorrere a diversi metodi. Un primo metodo di stima è già stato accennato nel § 2 ed è il metodo di stima diretto che non conduce però a risultati soddisfacenti poiché gli stimatori hanno varianza elevata e sono correlati tra loro per valori vicini di u . Inoltre l'applicazione dei minimi quadrati trova ulteriori limitazioni qualora i valori residui del modello non seguano un processo stocastico « puramente casuale ».

Un secondo metodo di stima è quello « parametrico » fondato sull'esplicitazione nel dominio temporale di un modello del tipo:

$$(3.1) \quad y_t = v(B) x_t + \eta_t$$

dove B è un operatore dei ritardi vale cioè $Bx_t = x_{t-1}$, $v(B)$ è un polinomio in B con coefficienti costanti, η_t è un processo stocastico stazionario che si suppone interpretabile con un modello autoregressivo e/o a media mobile del tipo:

$$(3.2) \quad \emptyset(B) \eta_t = \theta(B) \varepsilon_t$$

dove ε_t è un processo stocastico « puramente casuale »⁽⁹⁾, $\emptyset(B)$, $\theta(B)$ sono ancora polinomi in B con coefficienti costanti.

$v(B)$ è denominata « funzione di trasferimento »⁽¹⁰⁾ del SDLI.

⁽⁹⁾ Un processo stocastico « puramente casuale » o « white noise » è definito, per valori discreti di t , da una successione di v.c. mutuamente indipendenti e identicamente distribuite.

⁽¹⁰⁾ Il termine « funzione di trasferimento » viene talvolta utilizzato per indicare la funzione di risposta frequenziale [Jenkins (1963)]. E' opportuno precisare però che il termine di funzione di trasferimento, proprio della teoria dei sistemi, va utilizzato per indicare la funzione $L(s)$, quando il SDLI viene descritto, mediante la trasformazione di Laplace:

$$Y(s) = L(s) X(s)$$

dove $s = a + i2\pi f$ con a ed f variabili reali e $i = \sqrt{-1}$.

La scambiabilità delle denominazioni è ammissibile solo per i sistemi fisicamente realizzabili poiché, per essi, la trasformata di Fourier di $w(u)$ coincide con la trasformata di Laplace per $s = i2\pi f$.

Le procedure per l'identificazione e la stima della funzione di trasferimento sono ben descritte dagli autori Box e Jenkins (1976).

In Jenkins-Watts (1968) si dimostra, attraverso la simulazione di processi lineari, che la stima della funzione di risposta impulsiva ottenuta quando si siano stimati i coefficienti del modello parametrico, conduce a valori molto più vicini a quelli teorici, rispetto a qualsiasi altro procedimento di stima.

La funzione di risposta impulsiva può essere stimata anche come trasformata inversa della funzione di risposta frequenziale che, nel caso discreto, assume la forma:

$$(3.3) \quad w_u = \int_{-1/2}^{1/2} W(f) \exp \{ i2\pi fu \} df$$

oppure in termini di funzione di amplificazione e di fase, qualora si supponga che i processi x_t e y_t siano reali:

$$(3.4) \quad w_u = 2 \int_0^{1/2} A(f) \cos [F(f) + 2\pi fu] df$$

La (3.4) può servire a determinare i valori iniziali di $v(B)$ nella (3.1) qualora si utilizzino le procedure di ottimizzazione delle stime « parametriche » indicate da Box e Jenkins (1976) ed offre il vantaggio, rispetto all'identificazione della funzione di trasferimento nel dominio temporale, di non richiedere la procedura di « sbiancamento » ⁽¹⁾ dei processi in ingresso.

Infine la funzione di risposta impulsiva può essere stimata attraverso i « grafici di Bode » della funzione di risposta frequenziale complessa. Essi vengono costruiti ponendo a confronto graficamente il logaritmo della funzione di amplificazione e di fase rispetto al logaritmo delle frequenze. Utilizzando questi grafici è possibile inferire circa il tipo di funzione di risposta impulsiva del SDLI e quindi anche sull'ordine dell'equazione differenziale lineare che caratterizza il sistema. In questa sede si illustrerà solamente il comportamento di un sistema descritto da un'equazione differenziale di secondo ordine, (assunto in seguito nella presente ricerca), anche per l'importanza che esso riveste nell'approssimare sistemi di ordine più elevato.

L'equazione che rappresenta un sistema di secondo ordine si può scrivere:

$$(3.5) \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\xi\pi f_n \frac{dy(t)}{dt} + 4(\pi f_n)^2 y(t) = 4(\pi f_n)^2 x(t)$$

dove ξ è denominato « rapporto di smorzamento e

f_n è una costante conosciuta come « frequenza naturale non smorzata ».

⁽¹⁾ Cfr. Box-Jenkins (1976, p. 379).

L'equazione (3.5) trova soluzione in un integrale di convoluzione, la cui funzione di risposta impulsiva è:

$$(3.6) \quad w(t) = \frac{K e^{-\xi 2\pi f_n t} \operatorname{sen}(2\pi f_n \sqrt{1-\xi^2} t)}{2\pi f_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

La funzione di risposta frequenziale riferita alla (3.6), risulta:

$$(3.7) \quad W(f) = \frac{K}{1 - (f/f_n)^2 + i2\xi(f/f_n)}$$

e la funzione di amplificazione:

$$(3.8) \quad A(f) = K \{ [1 - (f/f_n)^2]^2 + [2\xi f/f_n]^2 \}^{-1/2}$$

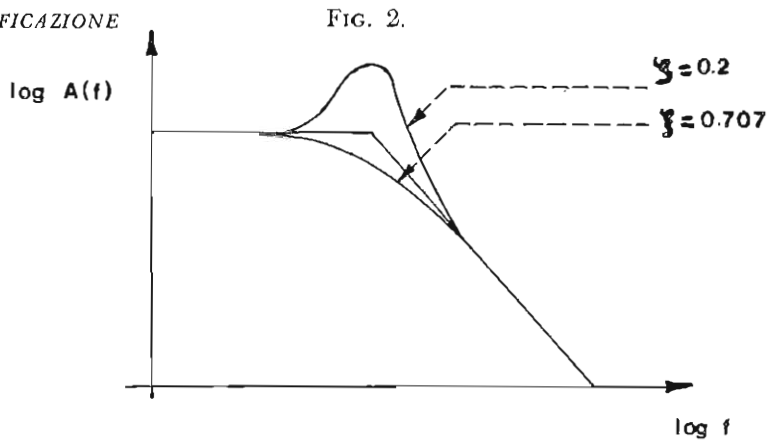
quindi K è il valore dell'amplificazione nel punto di frequenza zero ed è denominato « fattore di amplificazione ».

La funzione di fase è:

$$(3.9) \quad F(f) = -\arctan \frac{2\xi(f/f_n)}{[1 - (f/f_n)^2]}$$

I grafici di Bode relativi alla (3.8) e (3.9) sono riportati nelle figg. 2 e 3.

AMPLIFICAZIONE



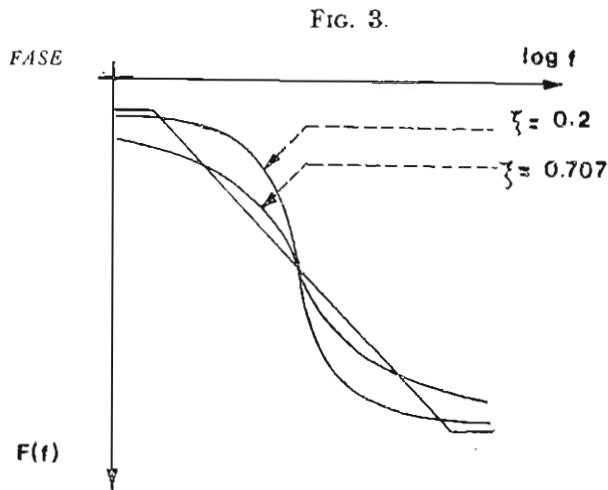
Si indichi con $P_r = \operatorname{Max}_f \{A(f)\}$, tale valore viene denominato « picco di risonanza ». Derivando la funzione (7.8) ed uguagliando la derivata a zero, il massimante f_p risulta:

$$(3.10) \quad f_p = f_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

mentre il massimo è:

$$(3.11) \quad P_r = \frac{K}{2\xi \sqrt{1-\xi^2}}$$

Poiché f_p deve essere un valore reale, per definizione, allora il picco di risonanza corrisponde ad un valore di $f_p > 0$ se e solo se $1 - 2\xi^2 > 0$,



cioè per valori di $\xi < 1/\sqrt{2} = 0,707$. Per valori di $\xi > 0,707$, $A(f)$ diviene una funzione monotona decrescente, come si può osservare nella fig. 2.

Nelle figg. 2 e 3 vengono riportate con curva spezzata l'*approssimazione asintotica* della funzione $A(f)$ ed $F(f)$. Riguardo alla funzione di amplificazione si osservi che, per valori di f molto più piccoli di f_n , si ha:

$$-\frac{1}{2} \log_{10} \{ [1 - (f/f_n)^2]^2 + [2\xi f/f_n]^2 \} \approx -\frac{1}{2} \log_{10} 1 = 0$$

quindi:

$$(3.12) \quad \log_{10} A(f) \approx \log_{10} K$$

Invece per valori di f molto più grandi di f_n , si ha:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \log_{10} \{ [1 - (f/f_n)^2]^2 + [2\xi f/f_n]^2 \} &\approx -\frac{1}{2} \log_{10} (f/f_n)^4 = \\ &= -2 \log_{10} f/f_n \end{aligned}$$

quindi:

$$(3.13) \quad \log_{10} A(f) \approx \log_{10} K + 2 \log_{10} f_n - 2 \log_{10} f$$

Analogamente per la funzione di fase, si ottiene una curva approssimata che è nulla nell'intervallo $(0, 1/5 f_n)$ e vale $-\pi$ nell'intervallo $(5 f_n, \infty)$, mentre nell'intervallo $(1/5 f_n, 5 f_n)$ è una retta che passa per il punto di coordinate $(f_n, -\pi/2)$.

Nella presente ricerca, tra i metodi di stima della funzione impulsiva qui elencati, si è tralasciato di utilizzare il metodo di stima parametrico che è proprio del dominio temporale, coerentemente con l'approccio frequenziale scelto per l'analisi.

Tale metodo avrebbe comportato indubbe difficoltà in ordine all'identificazione del modello ed alla stima dei parametri per la complessità che presenta una funzione di trasferimento con più «ingressi».

Si è pure tralasciato di stimare i pesi w_n attraverso la trasformata (3.4) data l'ampia oscillazione che può caratterizzare le curve sperimentali della funzione di amplificazione e di fase alle alte frequenze, oscillazioni legate alla rilevanza della componente stocastica erratica propria delle serie temporali economiche. Questa ragione induce gli autori della presente nota ad essere scettici sul suggerimento dato da Box e Jenkins di seguire questa procedura per ottenere i valori iniziali delle stime parametriche del modello.

La preferenza, invece, è stata data ai « diagrammi di Bode », inducendo da essi il tipo di funzione di risposta frequenziale e calcolandone i parametri. Con tale procedura, sebbene i risultati possono essere il più delle volte soddisfacenti, non si specifica nessuna proprietà degli stimatori dei parametri se non quella che derivano da stime perequate delle funzioni di risposta frequenziale. Inoltre, poiché si procede ad un'ulteriore approssimazione dei grafici di Bode in modo da ricondurli al caso tipico illustrato nelle figg. 2 e 3 (sempre che si tratti di un SDLI di 2° ordine), i parametri stimati della funzione impulsiva non sono necessariamente quelli che minimizzano la somma dei quadrati dei residui o, comunque, non sono stime di massima verosimiglianza. Tuttavia, esse possono servire come valori iniziali in un procedimento iterativo di minimizzazione della somma dei quadrati dei residui, o per il computo di stime di massima verosimiglianza dei parametri della funzione $v(B)$ nel modello (3.1).

4. Identificazione empirica del modello

Gli autocorrelogrammi

Il punto di partenza delle diverse fasi che hanno determinato la costruzione empirica del modello è costituito dall'analisi dei correlogrammi calcolati sulle tre diverse serie ⁽¹²⁾.

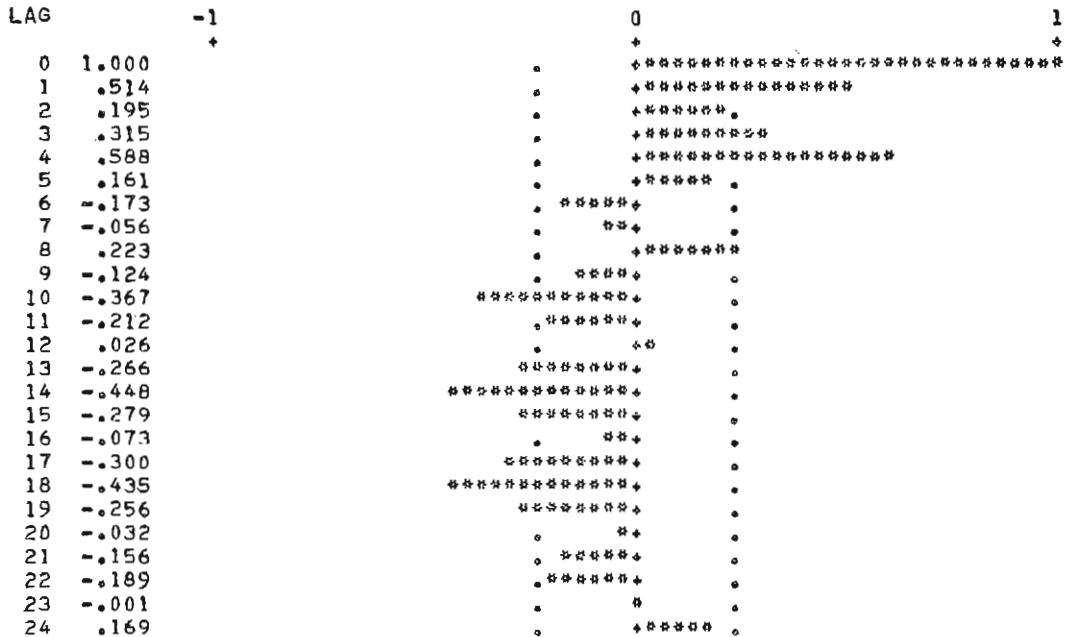
La rapida convergenza a zero degli autocorrelogrammi, riferiti alle serie temporali campionarie del tasso di variazione dei prezzi \dot{p}_t e del costo del lavoro \dot{w}_t , confermano la possibilità di interpretarli come realizzazioni di processi stocastici stazionari.

Il correlogramma del reciproco del tasso di disoccupazione u_t^{-1} rende invece evidente la presenza di una consistente componente stagionale di periodo annuale.

(12) I grafici di queste serie sono riportati in *Appendice*.

Nella fig. 4 si nota, infatti, come i valori dell'autocorrelazione superino i limiti degli intervalli di confidenza⁽¹³⁾ proprio in corrispondenza del ritardo temporale 4 e per i successivi ritardi come effetto indotto.

FIG. 4. - *Funzione di autocorrelazione del Tasso di Disoccupazione (serie non destagionalizzata)*



Si osservi che i correlogrammi vengono graficati solo per i 24 ritardi temporali, cioè per un intervallo senz'altro superiore al punto di troncamento che si opererebbe con il test di Bartlett (1955) sulla significatività dei valori dell'autocorrelazione.

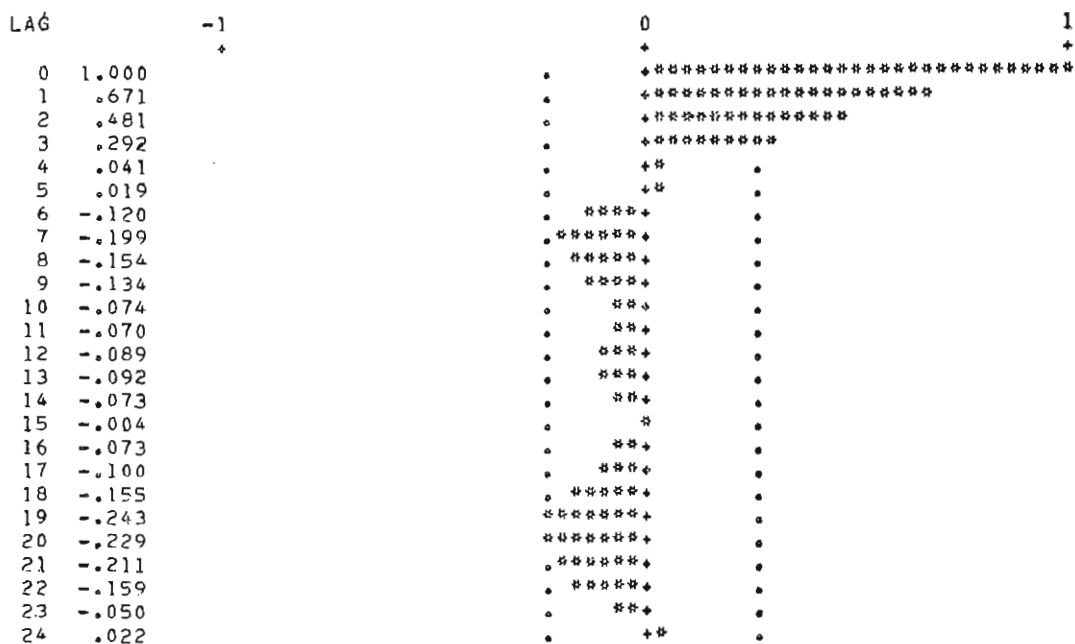
Ritenendo opportuno costruire un modello che contempli la stagionalità, si è provveduto a destagionalizzare la serie u_t^{-1} mediante le seguenti differenze:

$$(4.1) \quad (u_t^{-1})^o = u_t^{-1} - u_{t-4}^{-1}$$

Viene usato, quindi, un filtro lineare non-simmetrico con coefficiente costante unitario. Questo metodo introduce uno sfasamento

⁽¹³⁾ Gli intervalli di confidenza sono calcolati per un coefficiente di confidenza del 95% secondo l'espressione $\pm 2/\sqrt{T}$, dove T è la lunghezza della serie.

Per una corretta interpretazione si deve ricordare che essi sono costruiti in base all'assunzione che la serie sperimentale sia una realizzazione di un processo stazionario normale puramente casuale, per cui tutti i valori di autocorrelazione teorici ρ_i $i = 1, + 2, \dots$ sono assunti nulli [Bartlett(1946)].

FIG. 5. - *Funzione di autocorrelazione del Tasso di Disoccupazione (serie destagionalizzata)*

approssimativamente di 6 mesi nelle componenti cicliche, ma è uno sfasamento costante e non introduce, parallelamente, nessun elemento di non-stazionarietà nella serie destagionalizzata ⁽¹⁴⁾.

Ovviamente la destagionalizzazione comporta una perdita informativa di quattro trimestri poiché si è preferito non ricostruire la parte iniziale della serie e si sono invece adeguate le lunghezze delle altre due serie temporali.

Si osservi come la fig. 4 dimostri, nei confronti della fig. 5 l'effetto della destagionalizzazione. Nel seguito della ricerca si farà riferimento alla serie destagionalizzata del reciproco del tasso di disoccupazione indicandola semplicemente con u_t^{-1} per non appesantire le notazioni simboliche.

I correlogrammi incrociati e le curve spettrali

I correlogrammi incrociati, che per brevità non sono stati qui riportati, mettono in evidenza ⁽¹⁵⁾ l'esistenza di una dipendenza li-

⁽¹⁴⁾ Granger (settembre 1976).

⁽¹⁵⁾ Il calcolo degli intervalli di confidenza nei grafici dei correlogrammi è stato effettuato come descritto nella nota (13).

In questo caso però, pur rimanendo ferma l'ipotesi di normalità non è più soste-

neare tra \dot{p}_t e \dot{w}_t che risulta massima tra \dot{p}_{t-1} e \dot{w}_t . Molto meno evidente la dipendenza lineare tra u_t^{-1} e \dot{w}_t ; il massimo in questo caso raggiunge appena lo 0,3 e risulta con ritardo di un anno, cioè tra u_{t-1}^{-1} e \dot{w}_t . E' stata infine constatata la mancata correlazione tra u_t^{-1} e \dot{p}_t , cioè tra gli ingressi del sistema, ciò permette di utilizzare il modello (2.6 bis) in base alle considerazioni svolte nel paragrafo 2.

Dall'esame dei correlogrammi incrociati risulta anche immediatamente evidente la necessità di allineare la serie degli ingressi con la serie in uscita al fine di diminuire la distorsione nella stima degli spettri incrociati. Dato che la variabile maggiormente ritardata è u_{t-4}^{-1} , si assume che t_0-4 sia riferito all'ultimo trimestre del 1958 e quindi t_0 si riferisca all'ultimo trimestre del 1959. Qualora si consideri la perdita di ulteriori quattro informazioni dovute alla destagionalizzazione di u_t^{-1} , l'intervallo di rilevazione si riduce a $T = 60$ e, prendendo come riferimento \dot{w}_t , inizia con l'ultimo trimestre 1960 fino al terzo trimestre 1975.

Per l'applicazione dell'analisi spettrale si sono utilizzati come punti di troncamento $L_1 = 32$, $L_2 = 16$ ed $L_3 = 8$, dall'analisi dei grafici si è visto che il livello L_2 è sufficiente a non introdurre picchi spuri negli spettri singoli e incrociati, ciò permette alla finestra spettrale di Parzen⁽¹⁶⁾ di avere una ampiezza di banda pari a 0,11625, più larga rispetto a quella che si sarebbe ottenuta con L_1 , e di elevare il numero dei gradi di libertà delle stime spettrali da 7 per L_1 a 14 per L_2 . Ciò è dovuto al fatto che ad una stima maggiormente perequata corrisponde una minore varianza rispetto alla stima campionaria non perequata. In questo caso per L_2 la varianza della stima perequata risulta pari appena al 14,37% della stima campionaria non perequata degli spettri. Non si è ritenuto opportuno di ridurre ulteriormente

nibile l'ipotesi che la correlazione incrociata si abbia tra processi puramente casuali.

Si può ipotizzare, invece, che i due processi non siano tra loro correlati. Si dimostra [Bartlett (1955)] che, sotto tali ipotesi, si ha

$$\text{var} [r_{xy}(k)] \simeq (h-k)^{-1} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \rho_{xx}(v) \rho_{yy}(v)$$

dove $\rho_{xx}(v)$ $\rho_{yy}(v)$ rappresentano le autocorrelazioni teoriche dei due processi x_t e y_t . Il computo di $\text{var} [r_{xy}(k)]$ presuppone quindi la conoscenza, almeno in via di ipotesi, dei modelli stocastici lineari che descrivono i due processi. Ai fini di una corretta interpretazione dei correlogrammi, gli intervalli di confidenza sono stati quindi interpretati come una rozza traccia e si è tenuto conto del possibile errore a cui si è indotti qualora la sommatoria delle autocorrelazioni teoriche porti ad un valore sensibilmente diverso da 1.

(16) Si ricorda la sua espressione analitica:

$$K(f) = \frac{3}{4} L \left(\frac{\text{scn } \pi f L / 2}{\pi f L / 2} \right)^4 \quad - \infty \leq f \leq \infty$$

dove L è il punto di troncamento.

la varianza della stima spettrale, per esempio al 7,19% corrispondente ad L_3 , per non introdurre inutili distorsioni nelle stime spettrali.

L'esame degli spettri singoli non fanno che confermare le informazioni desumibili dagli autocorrelogrammi, in particolare la serie \dot{p}_t è interpretabile come un processo autoregressivo di primo ordine, u_t^{-1} invece può essere interpretato da un processo autoregressivo di secondo ordine, e il comportamento pseudo-periodico della funzione di autocorrelazione, confermato dalla figura spettrale che tende presentare un picco alle basse frequenze, indica nel modello $u_t^{-1} = a_1 u^{-1}_{t-1} + a_2 u^{-1}_{t-2} + \varepsilon_t$ che $a_1 > 0$ e $a_2 < 0$.

Dato il tipo di modello che si vuol identificare con l'analisi, diviene preferibile osservare il legame tra gli ingressi e l'uscita attraverso le funzioni di coerenza parziale piuttosto che attraverso le funzioni di coerenza quadratica. Si evidenzia così, in modo concettualmente analogo alla correlazione parziale, il contributo di un determinato ingresso alla variabilità dell'uscita quando si tenga conto dell'influenza che su di essa ha l'altro ingresso, per ogni frequenza f .

Per brevità, si tralascia di riportare i grafici delle coerenze quadratiche e parziali. Questi ultimi, tuttavia, forniscono alcune informazioni che è opportuno illustrare. Osservando la coerenza parziale tra \dot{p}_t e \dot{w}_t , essa risulta molto elevata per le basse frequenze con un valore massimo in $f = 0$, dove si ha 0,887; un ulteriore contributo alla variabilità di \dot{w}_t viene dato da \dot{p}_t nella banda di frequenza (0,93; 0,21) — che tradotta in termini di ciclo temporale significa una ampiezza di circa 6 trimestri — con una punta massima in $f = 0,135$, cioè poco più di un anno e 3 trimestri, dove si ha 0,636. E' interessante rilevare che rispetto alla curva della coerenza quadratica tra \dot{w}_t e \dot{p}_t , la coerenza parziale vede accentuati i valori per le basse frequenze e ridotti i valori alle alte frequenze, ciò significa che la parte di variabilità che sembrava potesse essere interpretata da \dot{p}_t per i cicli di breve periodo, al di sotto dell'anno, qualora venga spiegata dai cicli di breve periodo del tasso di disoccupazione, viene parzialmente ridotta.

La scarsa incidenza del tasso di disoccupazione per spiegare la variabilità di \dot{w}_t , già evidenziata dalla funzione di correlazione incrociata viene confermata dalla coerenza parziale.

L'effetto di accentuazione delle coerenze alle basse frequenze e di compressione delle coerenze alle alte frequenze sussiste anche in questo caso. La drastica riduzione alle alte frequenze lascia supporre che sia la variabile \dot{p}_t ad essere dominante anche per i cicli di breve periodo,

perchè riesce ad assorbire quasi completamente la variabilità di \dot{w}_i alle alte frequenze. Ciò risulta ancora più evidente dalla lettura della funzione di coerenza multipla (fig. 6). Il raffronto tra questa e le coerenze parziali descritte in precedenza dimostra che, sia nelle basse frequenze, sia nelle altre bande di frequenza interessate, le elevate coerenze multiple sono dovute alla elevata coerenza parziale tra \dot{p}_i e \dot{w}_i . Ciò costituisce un sicuro indizio che la funzione di amplificazione e di fase riferita al tasso di disoccupazione ha scarsa rilevanza.

Funzioni di Amplificazione e Fase

Il computo della funzione di amplificazione fornisce sia il valore della costante di amplificazione K , sia il valore del picco di risonanza P_r . E' necessario però sottolineare che nel caso di una curva sperimentale questo massimo non coincide con il massimo assoluto dei valori della funzione, ma potrà essere un massimo relativo e dovrà essere scelto in base alla configurazione che assume il grafico di Bode. Nel caso ad esempio della fig. 7 il massimo in questione si ha alla frequenza $\widehat{f}_p = 0,125$ mentre il picco di risonanza vale $P_r = 1,547$. Questa informazione e il valore di $K = 1,0708$ sono sufficienti per determinare i valori ignoti di ξ e f_n in base alle relazioni (3.10) e (3.11). In particolare dalla (3.11) si ottiene:

$$(4.2) \quad \xi^2 = \frac{1}{2} [1 \mp \sqrt{1 - (K/P_r)^2}]$$

Utilizzando tale espressione e sostituendo i valori di K e P_r , si ottengono quattro radici per ξ , il valore cercato $\widehat{\xi}$ sarà compreso nell'intervallo $0 \leq \widehat{\xi} \leq 0,707$.

I valori forniti dalla funzione di amplificazione della fig. 7 sono risultati $f_n = 0,14713$ e $\xi = 0,37301$.

La funzione di fase (fig. 8) ha un comportamento atipico rispetto al diagramma di Bode della fig. 3. Ciò è estremamente interessante perché rivela che il modello di funzione di risposta frequenziale è in realtà più complesso di quello descritto in (3.7).

L'assunzione di modelli più sofisticati comporta però difficili problemi di sintesi che qui non si è ritenuto opportuno affrontare affidando all'analisi dei residui dal modello la verifica se l'approssimazione con un SDLI del secondo ordine risulti troppo semplificatoria.

La funzione di amplificazione della fig. 9, può anch'essa essere approssimata con un SDLI di secondo ordine, con il parametro $\xi > 0,707$.

FIG. 6. - Coerenza multipla

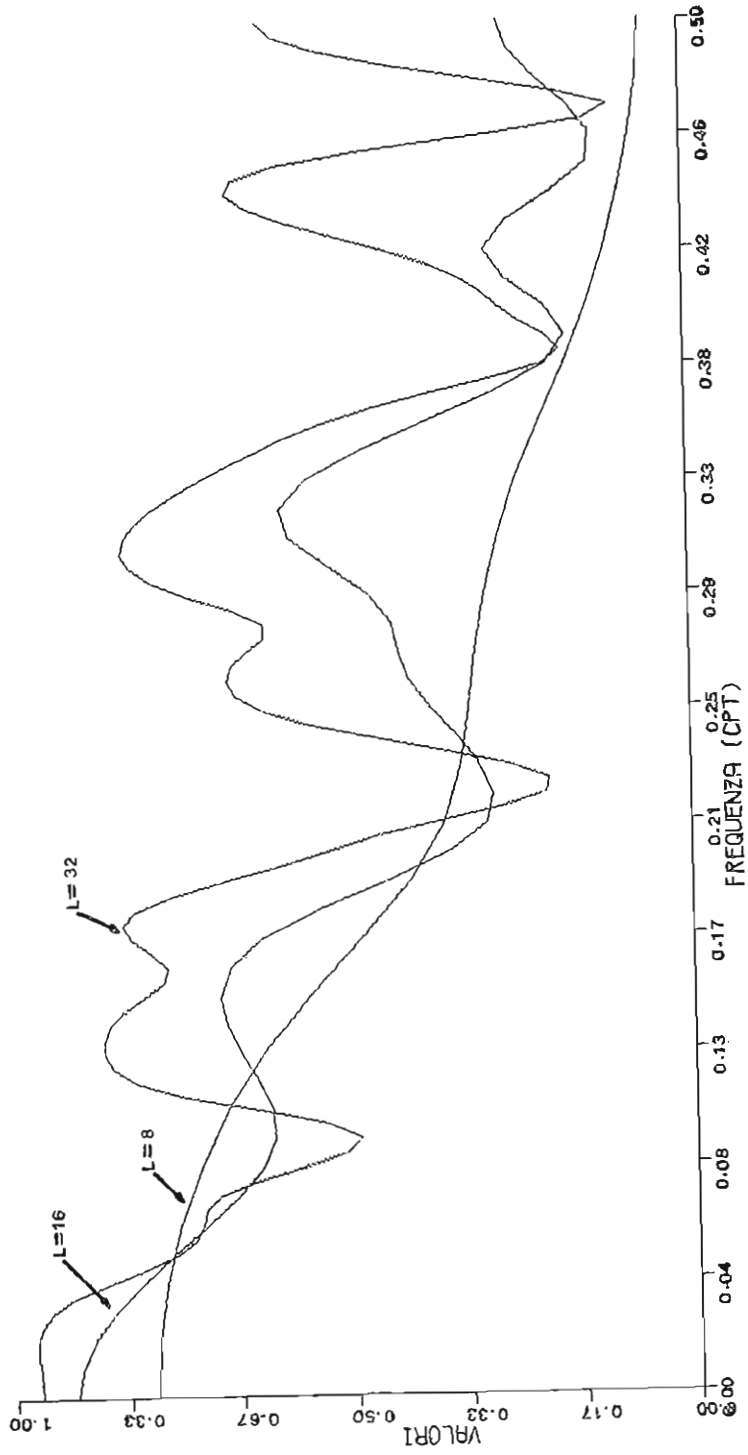


FIG. 7. - *Amplificazione* (scala logaritmica)
Tasso di variaz. del costo del lavoro e tasso di variaz. dei prezzi

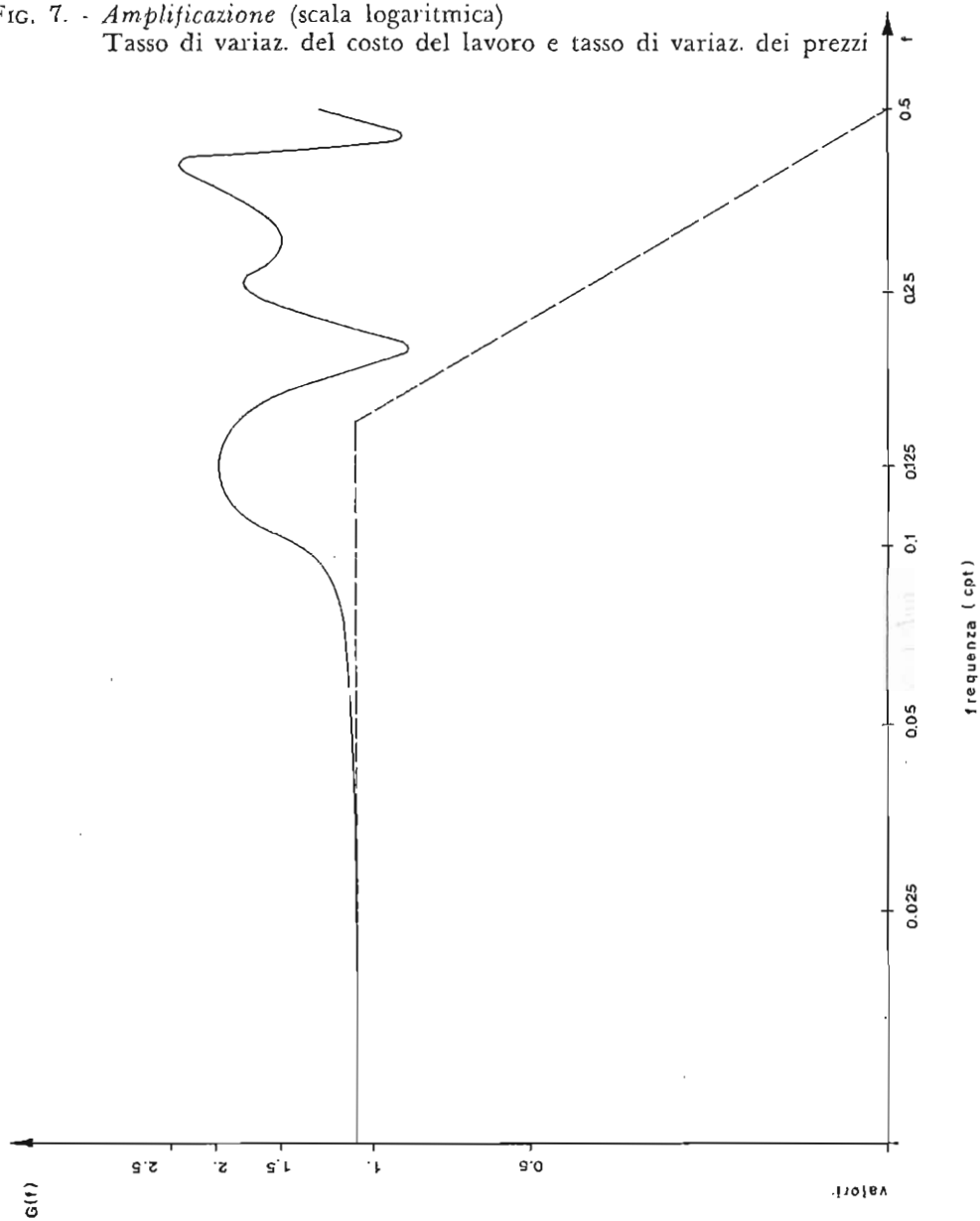
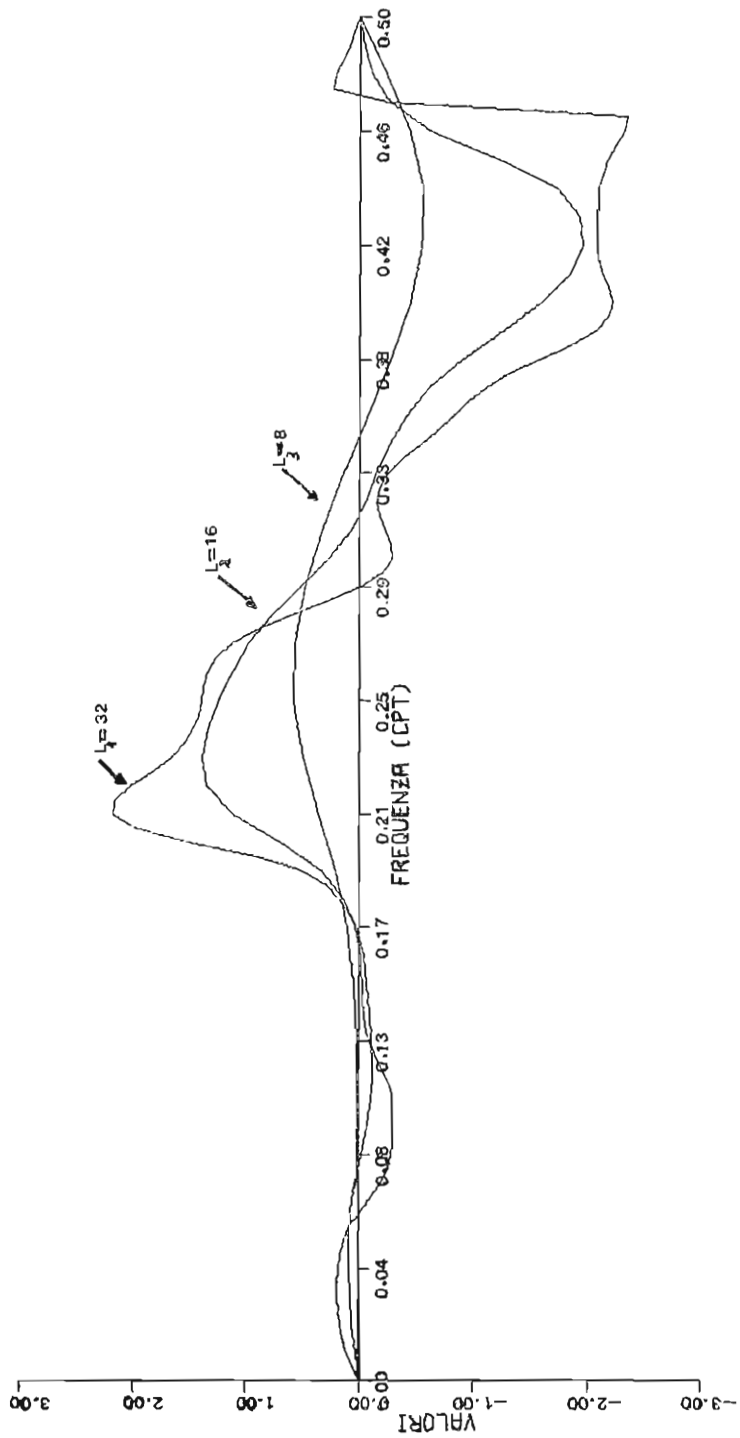


FIG. 8. - Fase

Tasso di variaz. del costo del lavoro e tasso di variaz. dei prezzi



In questo caso non è più possibile utilizzare l'espressione (4.2) e nemmeno la (3.10). Si è individuato, allora, quel valore di f_n , nella banda (0; 0,115), che discrimina chiaramente i valori di pendenza della tangente nei punti che lo precedono dai valori di pendenza della tangente nei punti che lo seguono. Si osservi a tal proposito la seguente tabella:

f_i	00	0,010	0,021	0,031	0,041	0,052	0,063
T_i	-1,805	-1,372	-1,256	-1,278	-1,395	-1,588	-1,502
f_i	0,073	0,083	0,094	0,104			
T_i	-1,235	-0,927	-0,678	-0,547			

dove $T_i = \log \{ \Delta A (f_i) \} - \log \{ A (f_i) \}$, $\Delta A (f_i) = A (f_{i+1}) - A (f_i)$

I valori di T_i precedenti $f_i = 0,083$ risultano per lo meno doppi rispetto ai valori successivi e quindi si ritiene di poter assumere $f_n = 0,083$. In base alla (3.8) e per un opportuno valore di $A(f)$ scelto in base ai valori della curva sperimentale, si ottiene il valore di ξ . Ad esempio per $A(0,052) = 6,209$ ed essendo $K = 7,661213$, allora $\xi = 0,85831$. Il confronto grafico tra curva teorica e curva sperimentale, assunti tali valori di ξ e di f_n , è risultato soddisfacente e quindi sono stati mantenuti nel prosieguo dell'analisi.

Anche la funzione di fase tra w_i e u_i^{-1} , riportata nella fig. 10 dimostra che il modello della funzione di risposta frequenziale può essere espresso in termini più complessi rispetto a quello assunto.

Lo spettro residuo ottenuto dalla formula:

$$(4.3) \quad Z_{wv} \dots (f) = \bar{C} \dots_{wv} (1 - \bar{k}^2 \dots_{wv} u^{-1})$$

dove $k^2 \dots_{wv} u^{-1}$, rappresenta la funzione di coerenza multipla perequata, è stato riportato nella fig. 11. La configurazione che assume in questo caso la funzione spettrale, pressoché costante, indica che la parte residuale può essere interpretata come realizzazione di un processo stocastico puramente casuale o « white noise ».

Funzioni di Risposta Impulsiva

Il computo delle funzioni $w(t)$ dalla (3.6), rispetto ai parametri in precedenza determinati, ha permesso di rendere evidente il loro comportamento nelle figg. 12 e 13. Si osservi come in entrambi i casi $w(t)$ tenda rapidamente a zero. Mediante la formulazione (2.3) è anche possibile descrivere la funzione di risposta a gradino e conseguentemente, per (2,4), il fattore di amplificazione allo stato di equilibrio del sistema. Tale fattore è pari a 1,24 per quanto attiene ad una

FIG. 10. - Fase
Tasso di variaz. del costo del lavoro e tasso di disoccupazione

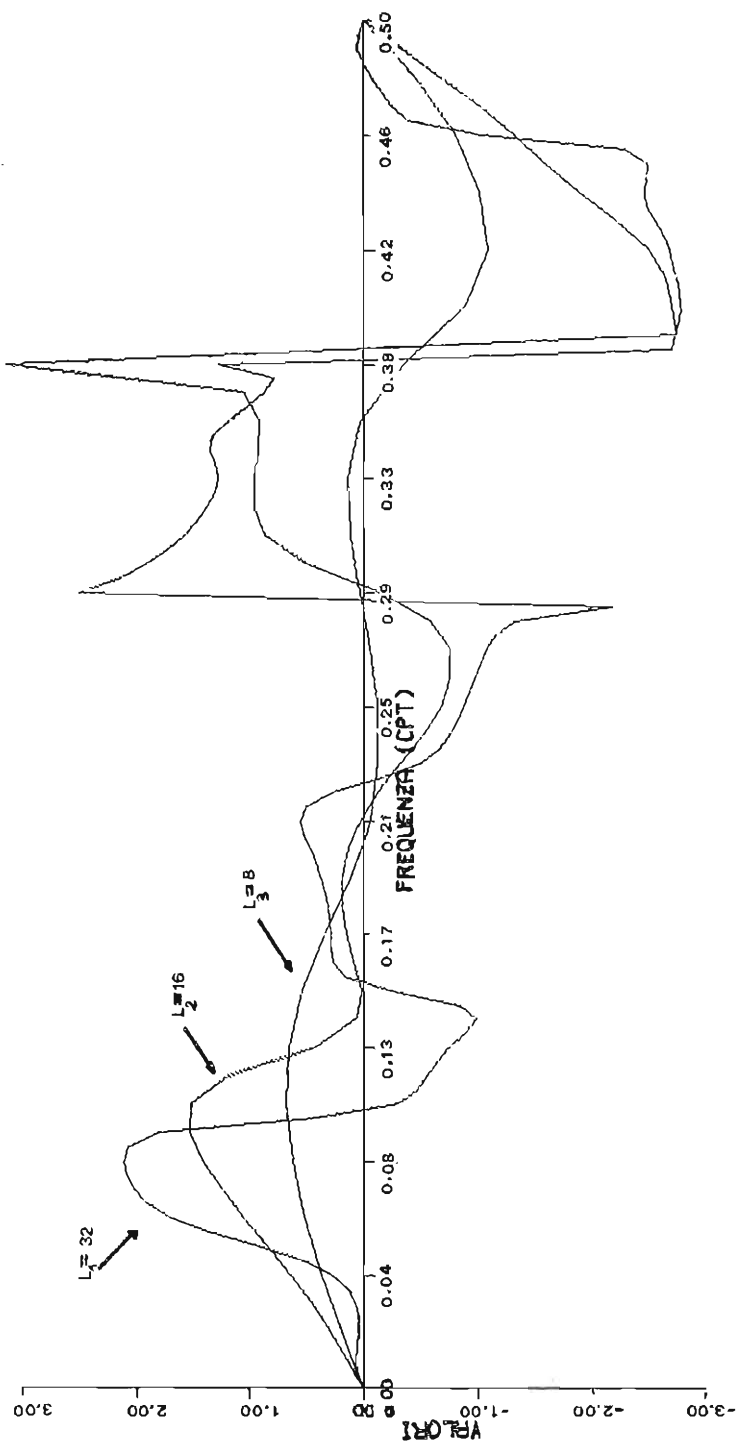


FIG. 11. - Spettro residuo

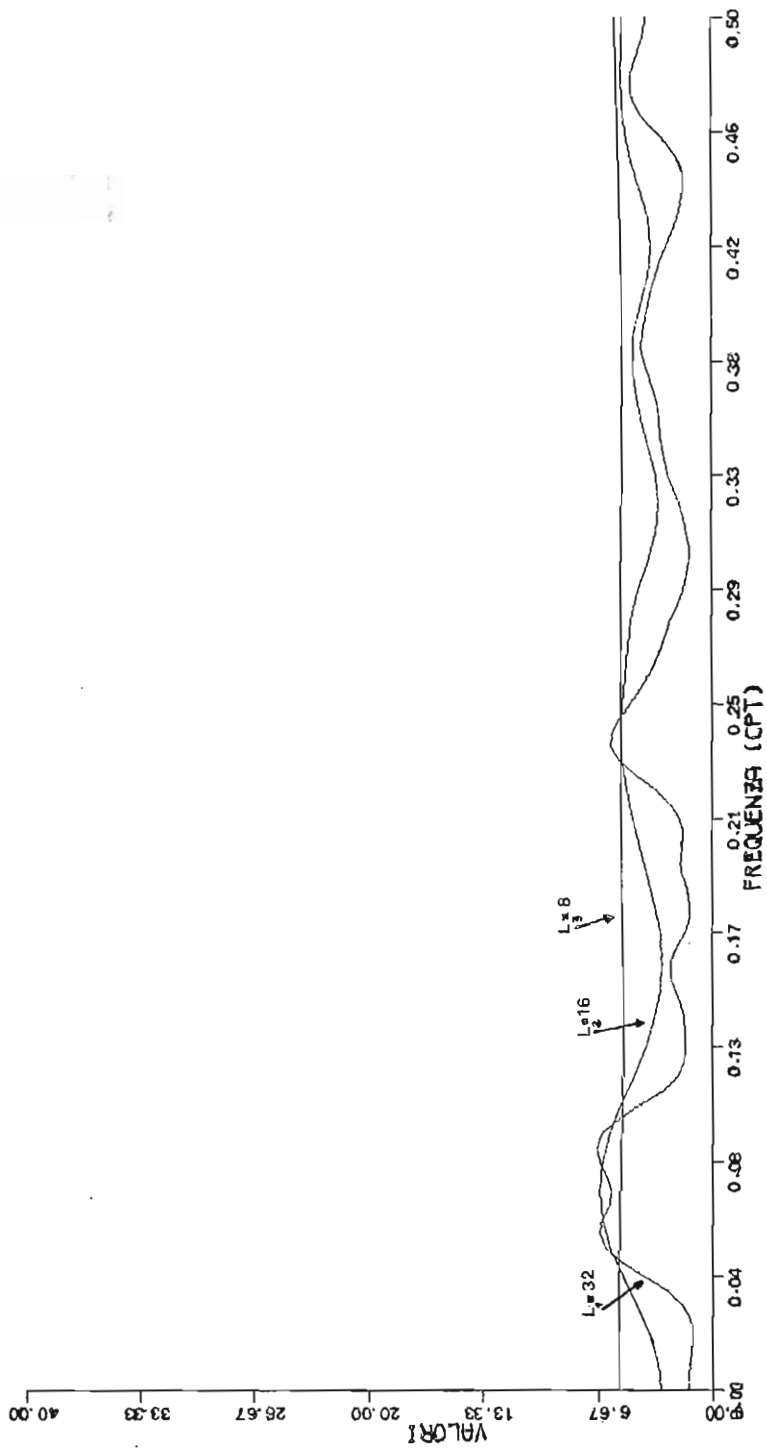
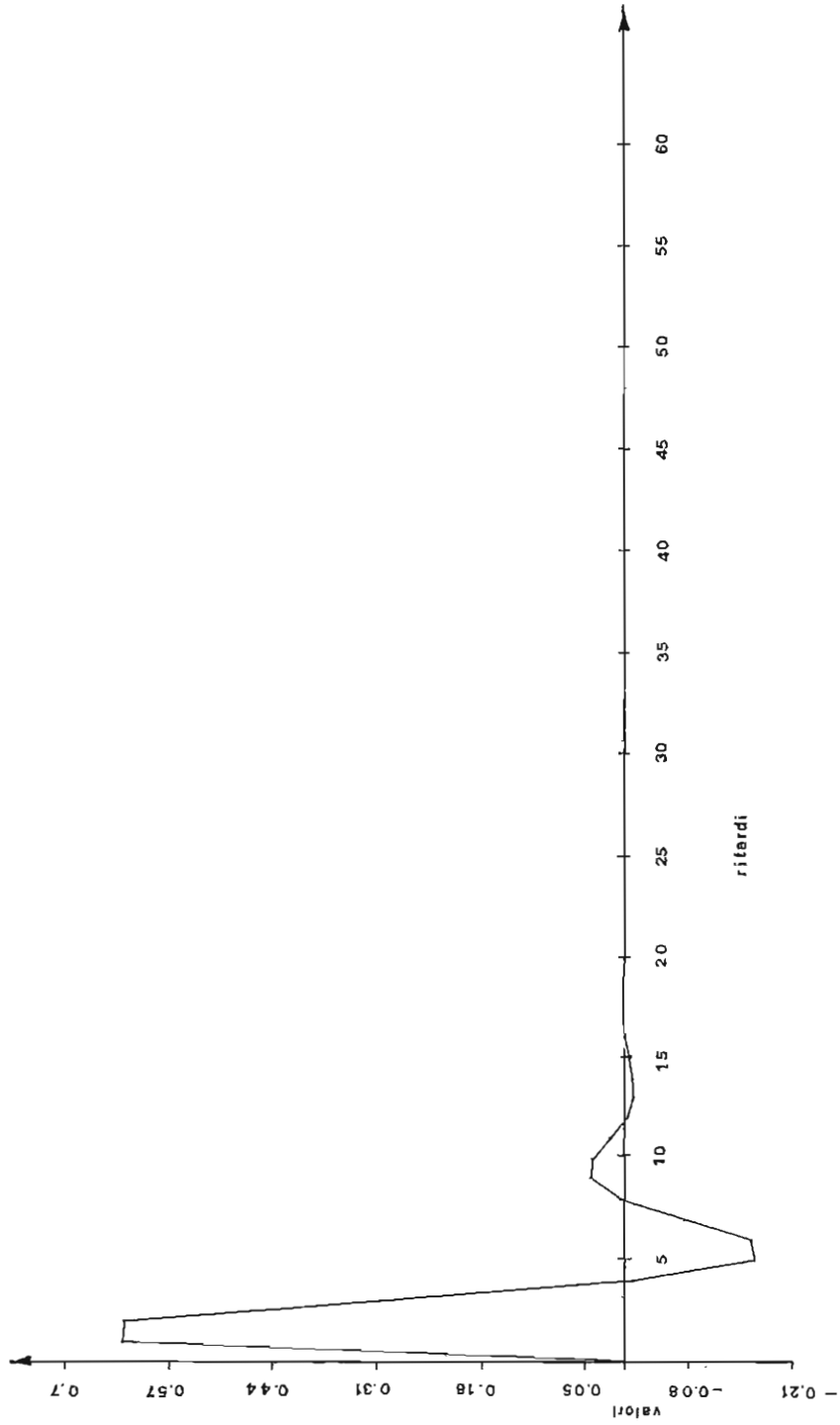
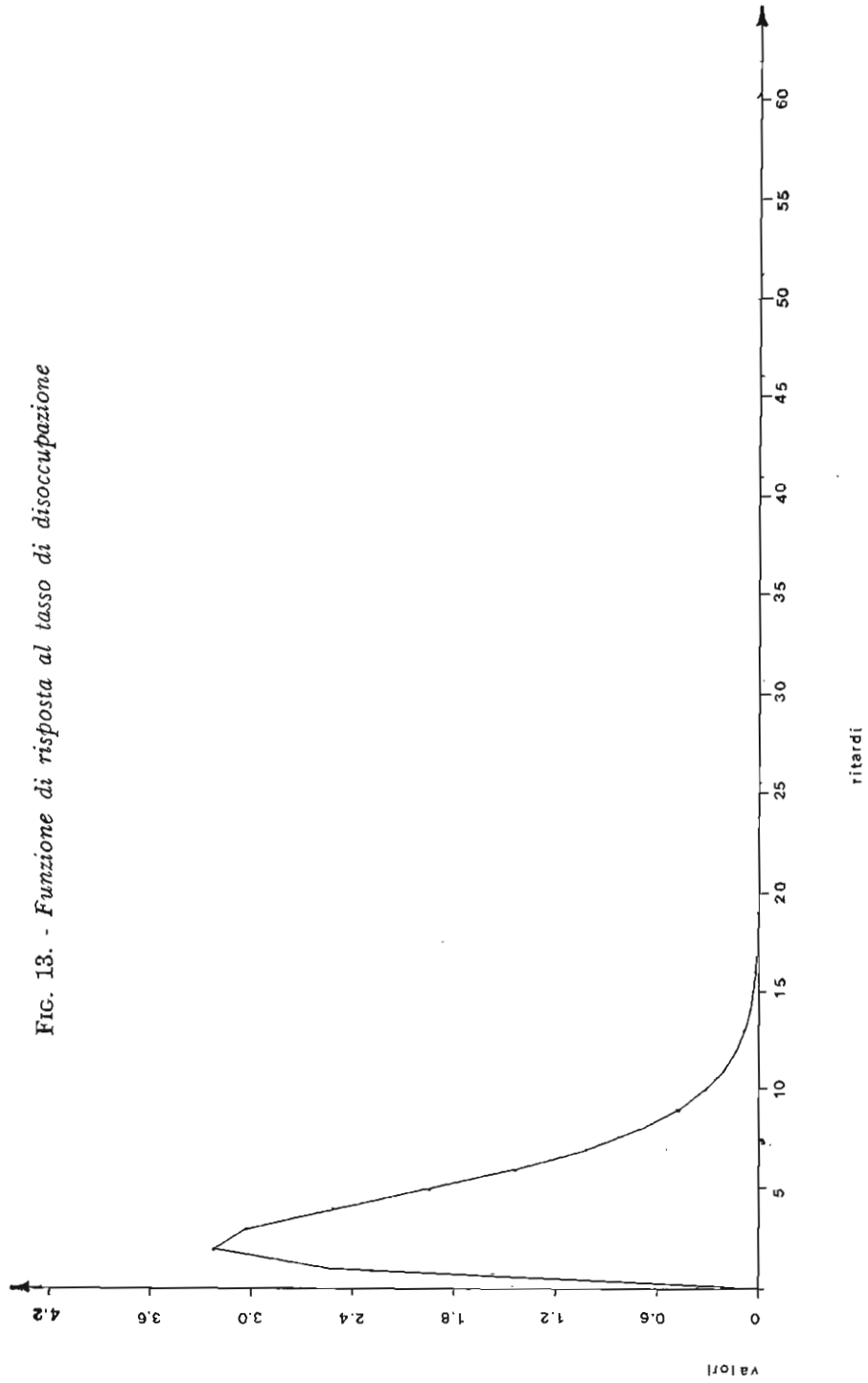


FIG. 12. - Funzione di risposta al tasso di variazione dei prezzi





sollecitazione unitaria del tasso di variazione dei prezzi, mentre vale 17,76 se riferito al tasso di disoccupazione destagionalizzato.

Il valore di 1,24 dà adito all'interpretazione che una variazione percentuale unitaria trimestrale del tasso di variazione dei prezzi comporti una variazione più che unitaria percentualmente nel costo del lavoro. E' necessario però sottolineare che ciò è in parte dovuto al troncamento che si è operato assumendo una funzione di amplificazione approssimata. Infatti, il fattore di amplificazione allo stato di equilibrio del sistema coincide con il valore di $A(f)$ per $f = 0$ cioè con il valore di $K = 1,0707$, molto più prossimo ad 1, pur non scendendone al di sotto. Un'altra ragione è da ricercarsi nel fatto che, come si vedrà in seguito, il modello non risulta completamente specificato, quindi parte della variabilità del costo del lavoro attribuibile ad altri possibili ingressi viene senza dubbio assorbita da \dot{p}_t e du_t^{-1} . Infine un valore $K > 1$ può essere giustificato dal fatto che si mette a confronto il costo del lavoro piuttosto che il salario e un indice dei prezzi misurato dalla scala mobile.

La differenza tra 17,76 e il valore di $K = 7,6612$ relativo al valore della funzione di amplificazione nel punto di frequenza $f = 0$ per le variazioni del tasso di disoccupazione destagionalizzato, dimostra che l'operazione di troncamento risulta in questo caso molto più drastica.

I valori forniti dalle funzioni di risposta impulsiva permettono ora di rendere esplicito il modello (2.6). La scelta del numero dei pesi da utilizzare può essere predeterminato in base ai criteri suggeriti dalla teoria dei sistemi, ad esempio calcolando la « costante temporale predominante » per la quale sussiste la relazione $\tau = (\xi_1 f_0)^{-1}$, oppure una « costante temporale di stabilizzazione » definita da quel ritardo temporale oltre il quale la funzione di risposta a gradino rimane all'interno di una prefissata percentuale del valore raggiunto allo stato di equilibrio del sistema.

Qui si è invece preferito ridurre al massimo il numero dei pesi utilizzabile, verificando empiricamente il punto di troncamento in base ai valori della varianza e dell'autocorrelazione dei residui. Si è così potuto osservare che l'impiego di un elevato numero di pesi non porta a miglioramenti sensibili nella varianza dei residui. Il confronto tra varianze non è agevole per la diversa lunghezza della serie dei residui dipendente dal numero dei pesi assunti dal modello; tuttavia si è potuto constatare che, rispetto ai diversi modelli assumibili, quello che possiede una varianza nei residui minore è il modello che utilizza i primi tre pesi delle funzioni di risposta impulsiva.

In tal modo il modello (2.6) risulta:

$$(4.4) \quad \dot{w}_t = 0,630 \dot{p}_{t-1} + 0,626 \dot{p}_{t-2} + 2,551 u_{t-1}^{-1} + 3,233 u_{t-2}^{-1}$$

ove tutte le variabili \dot{w}_t , \dot{p}_t e u_t^{-1} devono intendersi depurate del loro valor medio. I valori teorici ottenuti in base alla (4.4) sono riportati nella fig. 14 e sembrano ben perequare la curva effettiva.

Nella fig. 15 sono riportati i valori residui n_t , la cui media risulta 0,048 e varianza corretta 3,3106. In tal modo, il modello scompota il 39,67% della variabilità complessiva di \dot{w}_t che è data da 5,4876. Il correlogramma dei residui è riportato nelle figg. 16 e 17. Si noti come tutti i valori siano contenuti all'interno degli intervalli di confidenza (¹⁷), tranne per il ritardo 12 dove si raggiunge il valore di correlazione 0,301. Ciò indicherebbe l'esistenza di una componente ciclica triennale, con un'incidenza sull'andamento della serie di misura appena percettibile. Il computo della funzione spettrale è risultato di rilevante interesse perché da una parte non conferma la presenza della componente ciclica di periodicità triennale, dall'altra perché il confronto con lo spettro residuo della fig. 11 indica che la curva spettrale calcolata direttamente sui residui mantiene pressoché la medesima struttura per la costante di troncamento $L = 16$, anzi fornisce dei valori di densità spettrale costantemente al di sotto di esso.

Si deve concludere che i residui possono essere considerati determinazioni di un processo stocastico puramente casuale (« white noise ») e che le approssimazioni successive attraverso le quali si è pervenuti all'identificazione del modello (4.4) non hanno comportato riduzioni nella varianza complessiva interpretata dal modello stesso. Il 39,67% verrebbe elevato di ben poco in un procedimento di ottimizzazione dei parametri stimati. Per di più, trattandosi di una serie stazionaria, una percentuale di questa misura non può ritenersi insoddisfacente. Tuttavia, l'indizio della presenza di una componente ciclica triennale ha portato ad una analisi più dettagliata della curva dei residui. Si è così potuto notare che i picchi in essa presenti, i quali contribuiscono non poco all'entità della varianza complessiva, sono intervallati tra loro di 3 anni. Si osservino, nella fig. 15, i picchi che cadono al 2° trimestre del 1964, 1967, 1970, 1973, negli anni cioè in cui rinnovano il contratto grandi categorie di lavoratori quali i metalmeccanici, i chimici e gli edili. Viene così, rafforzata l'idea che si possa prendere in

(¹⁷) A quanto detto nella precedente nota (13) vanno aggiunte le osservazioni riportate in Durbin (1970). In questo articolo il Durbin dimostra, nel caso di modelli di regressione stimati con i minimi quadrati in cui le variabili esplicative sono ritardate, che, per ritardi molto prossimi allo zero, non è corretto assumere, relativamente ai valori residui, l'errore standard $T^{-1/2}$, in quanto esso diventa molto più piccolo. Benché in questo lavoro si sia seguita una procedura diversa da quella dei minimi quadrati per la determinazione del modello, a fini prudenziali, è opportuno pretendere che, per ritardi molto prossimi allo zero, i valori di autocorrelazione dei residui non siano semplicemente contenuti all'interno degli intervalli, ma siano sensibilmente al di sotto di essi.

FIG. 14. - *Tasso di variazione del costo del lavoro*
Valori effettivi (—) e valori teorici (-.-.-)

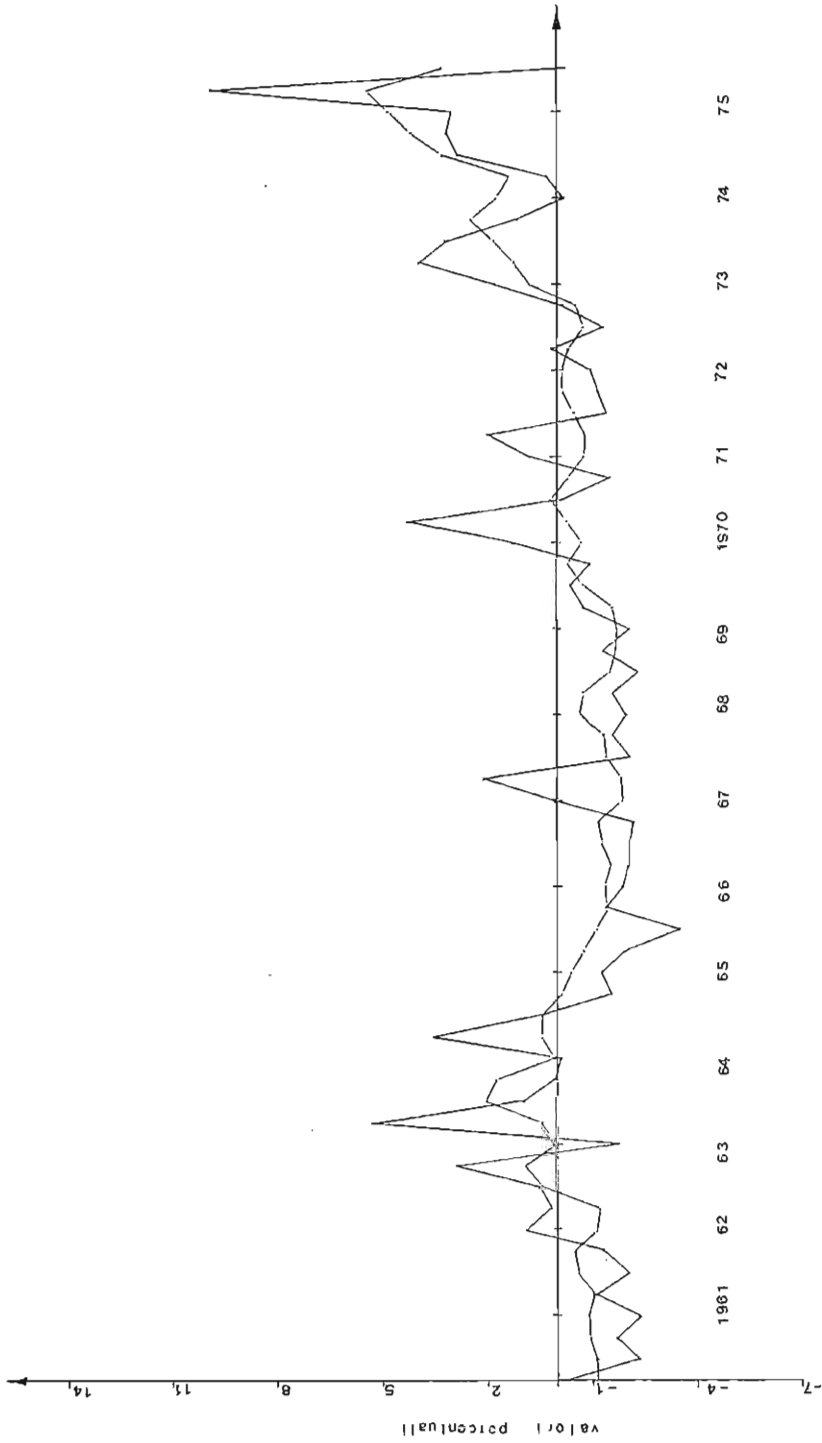


FIG. 15. - *Tasso di variazione del costo del lavoro*
Valori residui

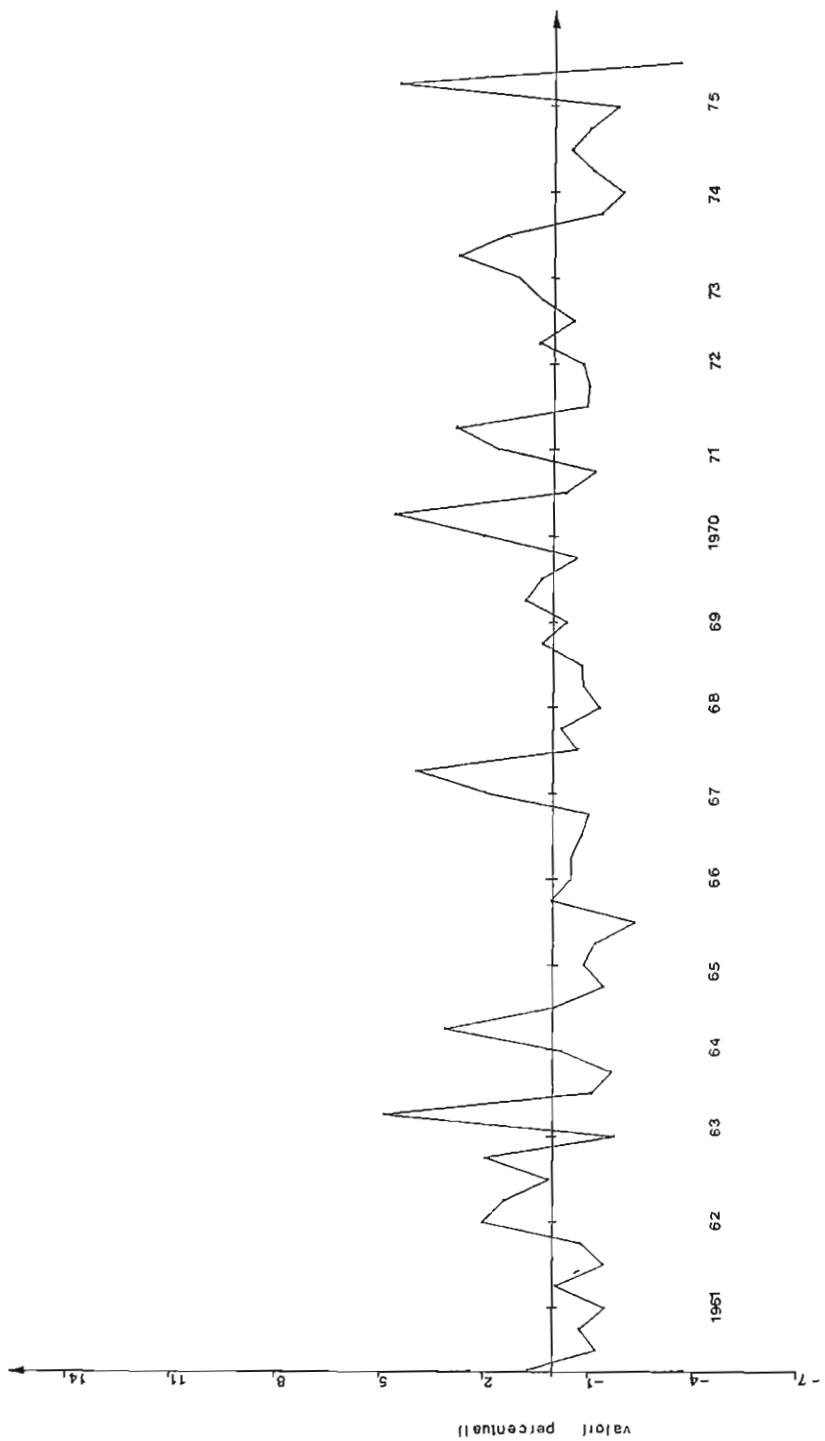


FIG 16. - Funzione di autocorrelazione dei Valori Residui

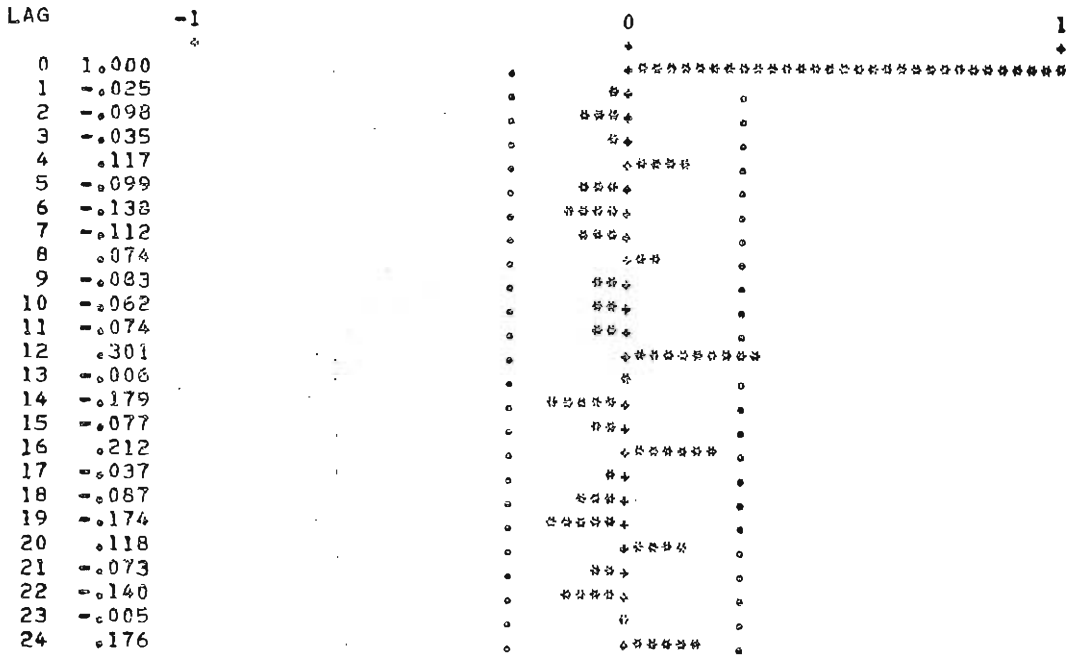
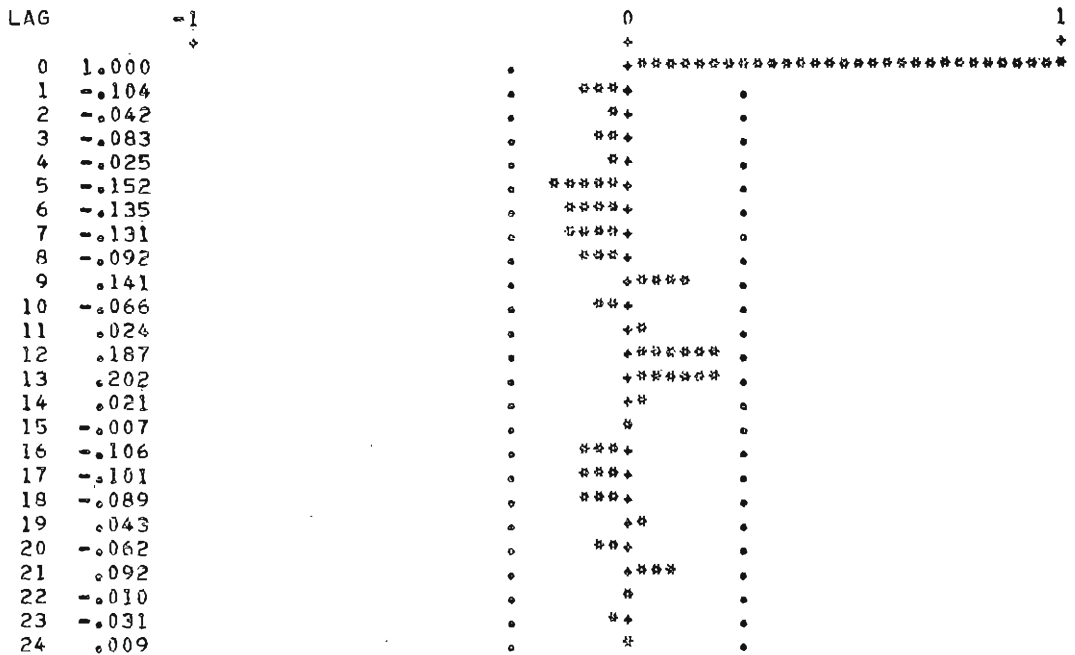


FIG. 17. - Funzione di autocorrelazione della Percentuale di Forza Lavoro che rinnova il contratto



considerazione un nuovo ingresso che tenga conto dell'azione sindacale, ma questa sembra contraddetta dal fatto che i residui si presentano come determinazioni di un « white noise » e quindi il modello (4.4) risulterebbe ben specificato. Non si può escludere però che esista un altro ingresso « white noise » correlato con N_t ipotizzato dal modello. In tal caso, aver trascurato questo nuovo ingresso, ha come diretta conseguenza l'amplificazione della varianza dei residui e, qualora risulti correlato con gli altri ingressi del sistema, l'incertezza circa la validità dei parametri anche come valori iniziali per successive tecniche di ottimizzazione.

Questa ipotesi è stata verificata procedendo alla costruzione di una serie temporale ⁽¹⁸⁾ che esprimesse compiutamente l'effetto dell'azione sindacale sul costo del lavoro. Essa viene brevemente descritta in Procidano-Sartore (1979b) ed, in modo più dettagliato, in Procidano-Sartore (1979a).

La fig. 17, che descrive l'autocorrelazione di questa nuova serie, rivela che essa può effettivamente considerarsi come una realizzazione di un processo « white noise »; l'autocorrelogramma non presenta nemmeno un'elevata autocorrelazione in corrispondenza del dodicesimo ritardo temporale, come ci si poteva aspettare, presupponendo una ciclicità triennale prevalente nelle scadenze contrattuali dei singoli contratti nel settore industriale.

5. *La serie temporale dell'azione sindacale come nuovo ingresso del modello dinamico*

La verifica della validità dell'ipotesi fatta alla fine del paragrafo 4 è stata effettuata mediante il calcolo del correlogramma incrociato tra la serie dei residui e la serie della percentuale di forza lavoro che rinnova il contratto che si indicherà brevemente con r_t . Come è osservabile nelle figg. 18 e 19 si ha un valore di correlazione evidente tra n_t e r_{t-1} con un valore prossimo a 0,4; e una seppur leggera correlazione tra n_t e r_t pari a 0,216. Questi valori suggeriscono la possibilità di reinterpretare la componente N_t del modello (2.6) come un processo stocastico lineare rispetto al nuovo ingresso R_t , supposto processo puramente casuale, di cui r_t costituisce una realizzazione. Il fatto che risultino i valori di correlazione sopra indicati suggerisce un modello che presenta per il ritardo 0 e 1, valori di autocorrelazione teorica non nulli, cioè:

⁽¹⁸⁾ Il grafico di tale serie è riportato in *Appendice* sotto il titolo: *Percentuale di forza lavoro che rinnova il contratto nel settore industriale.*

$$(5.1) \quad N_t = \alpha_0 R_t + \alpha_1 R_{t-1} + \varepsilon_t$$

sotto le ipotesi che:

- a) $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$;
- b) $E(R_t^2) = \sigma_R^2$;
- c) $E[R_t R_{t-k}] = E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}] = E[N_t N_{t-k}] = 0$;
- d) $E[R_t \varepsilon_{t-k}] = E[\varepsilon_t R_{t-k}] = 0$.

Il modello (5.1) possiede una funzione di correlazione incrociata tra R_t ed N_t pari a:

$$(5.2) \quad \rho_{NR}(k) = \begin{cases} \alpha_0 \sigma_R / \sigma_N & \text{per } k = 0 \\ \alpha_1 \sigma_R / \sigma_N & \text{per } k = 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

dove $\sigma_N^2 = (\alpha_0 + \alpha_1) \sigma_R^2 + \sigma_\varepsilon^2$

ed i seguenti valori di autocorrelazione teorica:

$$(5.3) \quad \rho_{NN}(k) = \begin{cases} 1 & \text{per } k = 0 \\ \alpha_0 \alpha_1 \sigma_R / \sigma_N & \text{per } k = \pm 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si noti che mentre i risultati sperimentali confortano i risultati ottenuti in (5.2), i valori dell'autocorrelogramma teorico (5.3) contraddicono la condizione c) del modello (5.1) assunta in base ai valori ottenuti sperimentalmente, a meno che non si ipotizzi $\alpha_0 = 0$ oppure $\alpha_1 = 0$.

FIG. 18. - Funzione di correlazione incrociata tra Percentuale di Forza Lavoro che rinnova il contratto e Valori Residui

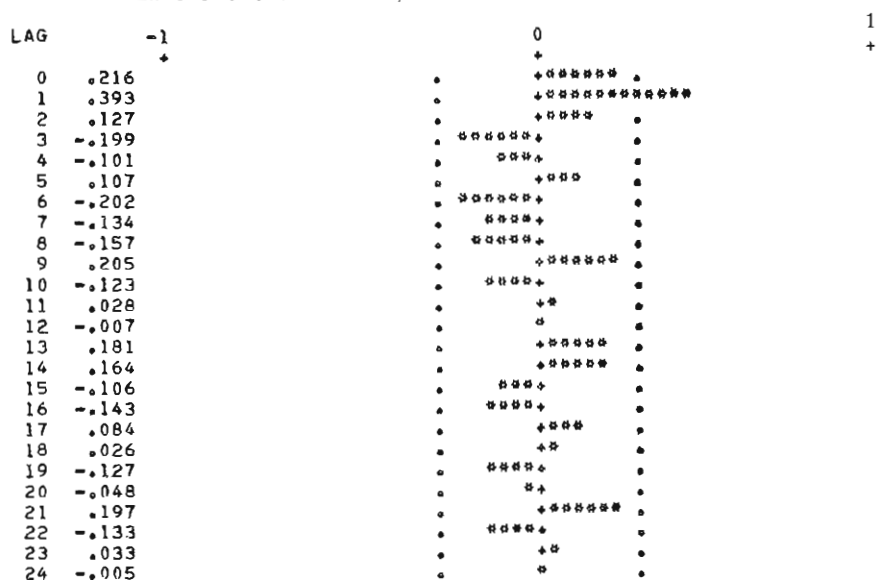
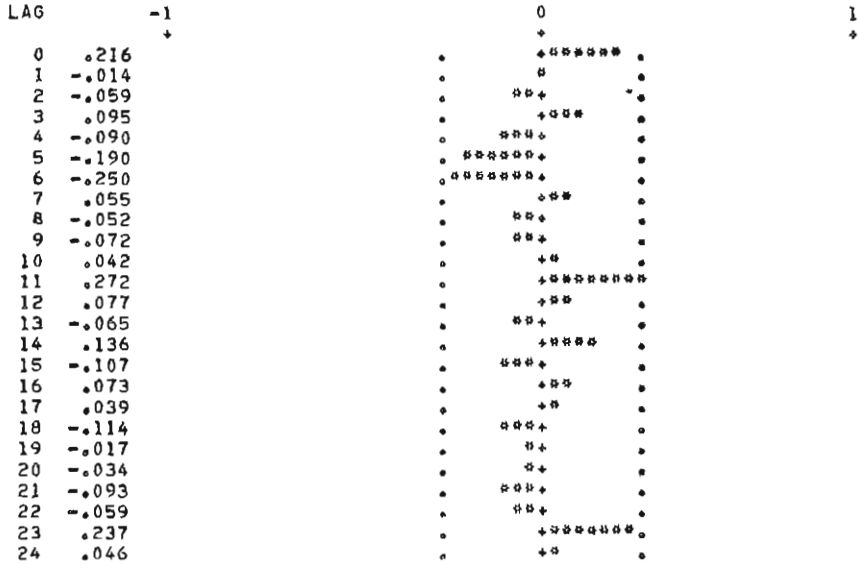


FIG. 19. - *Funzione di correlazione incrociata tra Valori Residui e Percentuale di Forza Lavoro che rinnova il contratto*



D'altra parte assumere il modello:

$$(5.4) \quad N_t = \alpha_1 R_{t-1} + \varepsilon_t$$

comporta una funzione di autocorrelazione teorica pari a:

$$(5.5) \quad \rho_{NN}(k) = \begin{cases} 1 & \text{per } k = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

ma una funzione di correlazione incrociata

$$(5.6) \quad \rho_{NR}(k) = \begin{cases} \alpha_1 \sigma_R / \sigma_N & \text{per } k = 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

dove $\sigma_N^2 = \alpha_1^2 \sigma_R^2 + \sigma^2$.

In questo caso, quindi, mentre i valori della funzione di autocorrelazione teorica sembrano concordare con quelli sperimentali, non concordano invece i valori di correlazione incrociata perché difficilmente si può assumere che un valore pari a 0,393 non sia significativamente diverso da zero. L'opzione verso il primo o secondo modello può essere decisa in via sperimentale. In questa sede non si è ritenuto opportuno procedere in tal modo per le considerazioni che ora si esporranno.

Avendo supposto R_t processo puramente casuale, ciò non esclude, in via teorica, la possibilità di una correlazione incrociata con gli altri ingressi del sistema, cioè \dot{p}_t e u_t^{-1} . Se ciò fosse, verrebbero a

modificarsi le funzioni di risposta frequenziale del sistema relativo a tutti tre gli ingressi presi in considerazione. Una verifica sui correlogrammi incrociati tenderebbe ad escludere tale evenienza, ma l'utilizzazione degli intervalli di confidenza per i correlogrammi incrociati come regola di decisione, soprattutto dopo averne dichiarato la grossolana approssimazione è quanto mai sconsigliabile. Si tratta allora di procedere con una verifica più sostanziale attraverso il calcolo diretto delle funzioni di risposta frequenziale relative ai tre ingressi. Questa procedura è in corso di elaborazione e risulta tutt'altro che agevole perché implica un riadattamento dei programmi sul calcolatore e non viene per ciò riportata in questa sede.

Un'ultima osservazione va fatta per quanto riguarda gli intervalli di confidenza riportati nelle figg. 18 e 19. Pur rimanendo valide le osservazioni riportate nella nota (15), in questo caso va aggiunto che poiché gli intervalli di confidenza dipendono dai valori teorici dell'autocorrelazione incrociata, dipenderanno anche dal modello prescelto tra (5.1) e (5.4).

Ad esempio, per il secondo, gli intervalli verrebbero calcolati in base al valore:

$$(5.7) \quad \text{var} [r_{NR}(k)] \approx \begin{cases} (n_i - k)^{-1} [\rho_{NR}^2(k) - 1]^2 & \text{per } k = 1 \\ (n - k)^{-1} & \text{altrove} \end{cases}$$

per $k = 1$, al variare di $\rho_{NR}(1)$ gli intervalli di confidenza descrivono una curva parabolica concava verso l'asse delle ascisse che viene intersecato per valori di $\rho(1) = \pm 1$, mentre il vertice della parabola si ha per $\rho_{NR}(1) = 0$.

Nelle figg. 18 e 19 vengono quindi riportati, per brevità, gli intervalli di confidenza corrispondenti al valore costante $\pm 2\sqrt{T} = \pm 0,254$, mentre, in realtà, a seconda delle ipotesi assumibili per $\rho_{NR}(1)$ gli intervalli sono più stretti. La seguente tabella descrive i valori degli intervalli di confidenza per la fig. 27, in base ad alcune ipotesi su $\rho_{NR}(1)$ quando $k = 1$:

$\rho_{NR}(1)$	0	0,3	0,4	0,5
Intervalli di confidenza (95%)	0,256	0,233	0,215	0,192

6. Conclusioni

L'applicazione dell'analisi spettrale per l'identificazione di modelli dinamici si è rivelata utile. Essa ha permesso di determinare le funzioni di risposta impulsiva, le quali per ogni ritardo temporale, forniscono dei valori che possono essere assunti come stime iniziali

nei metodi iterativi di ottimizzazione per la determinazione di stime dei minimi quadrati o stime di massima verosimiglianza. Di più, le funzioni di risposta impulsiva suggeriscono informazioni circa il numero di ritardi temporali da considerare nel modello dinamico. Quest'ultimo punto merita però ulteriori approfondimenti metodologici. Infatti, le funzioni di risposta impulsiva non sempre assumono un andamento che converge rapidissimamente a zero. D'altra parte, un modello dinamico che venga caratterizzato da un numero considerevole di ritardi temporali nelle variabili in ingresso perderebbe quell'efficacia di rappresentazione semplice e sintetica, necessaria per l'interpretazione anche economica del modello e contraddirebbe il principio di parsimonia⁽¹⁹⁾ nell'uso dei parametri. Si deve quindi trovare un criterio di troncamento che limiti il numero di pesi utilizzati del modello. Qui si è suggerito il criterio della minimizzazione della varianza dei residui, perché riduce drasticamente il numero dei pesi w_k rispetto ai criteri suggeriti dalla teoria del controllo automatico e già accennati al § 4.

Tuttavia va verificato se tale criterio ha una sua validità generale.

Per altra via, si può cercare di ottenere una funzione di risposta impulsiva che decresca molto più rapidamente a zero. Vanno, quindi, approfonditi i metodi di identificazione di w_k , il cui andamento è certamente legato all'ordine dell'equazione differenziale che caratterizza il modello e quindi, nei diagrammi di Bode, alle configurazioni che assumono la funzione di amplificazione ed ancor più la funzione di fase.

I risultati empirici, ottenuti nella presente ricerca, mettono in discussione la validità del suggerimento dato da Box e Jenkins di ottenere stime iniziali di w_k attraverso la trasformata di Fourier della funzione di risposta frequenziale per l'estrema sensibilità della funzione di amplificazione e di fase alle alte frequenze rispetto alla componente erratica delle serie temporali economiche esaminate. Ciò apre un interessante campo di ricerca sui metodi di identificazione di w_k e sulle procedure volte ad ottenere stime iniziali che siano più vicine possibile alle stime ottimali ottenute in modo diretto sui parametri di una funzione di trasferimento.

ISABELLA PROCIDANO - DOMENICO SARTORE

Università di Venezia, Ca' Foscari

(19) Box-Jenkins (1976).

BIBLIOGRAFIA

- AKAIKE H. e YAMAMOUCHI Y. (1962), *On the Statistical Estimation of Frequency Response Functions*, « Ann. Inst. Stat. Math. », n. 14.
- ANDERSON T. W. (1958), *On Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, J. Wiley & Sons. Inc., London.
- BARTLETT M. S. (1946), *On the Theoretical Specification of Sampling Properties of Autocorrelated Time Series*, « Journal of Royal Statistical Society », B8.
- BARTLETT M. S. (1955), *Stochastic Processes*, Cambridge University Press, Cambridge.
- BOX G. E. P. and JENKINS G. M. (1976), *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Revised Edition, Holden-Day.
- BRILLINGER D. R. (1974), *Time Series: Data Analysis and Theory*, Holt, Rinehart and Winston, Inc.
- DURBIN J. (1970), *Testing for Serial Correlation in Least-Squares Regression when Some of Regressors are Lagged Dependent Variables*, « Econometrica », n. 38.
- GRANGER C. W. J. (Settembre 1976), *Seasonality: Causation, Interpretation and Implications*, Paper presented to NBER/Census Conference on Seasonal Analysis of Economic Time Series, Washington, D.C.
- JENKINS G. M. (1963), *An Example of the Estimation of a Linear Openloop Transfer Function*, « Technometrics », n. 5.
- JENKINS G. M. e WATTS D. G. (1968), *Spectral Analysis and its Applications*, Holden-Day.
- MARRO G. (1976), *Fondamenti di teoria dei sistemi*, 2ª ed., Patron, Bologna.
- PROCIDANO I. - SARTORE D. (1979a), *Serie trimestrale della forza lavoro soggetta a rinnovo contrattuale nel settore industriale (1959-1976)*, pubblicazione interna del Laboratorio di Statistica, Ca' Foscari, Venezia.
- PROCIDANO I. - SARTORE D. (1979b), *Identificazione di un modello per la curva di Phillips italiana*, in corso di pubblicazione in un volume a cura di G. Franco, edito da Etas Kompass, Milano.

APPENDICE

Grafici delle serie economiche utilizzate
come ingressi e come uscita nel modello dinamico

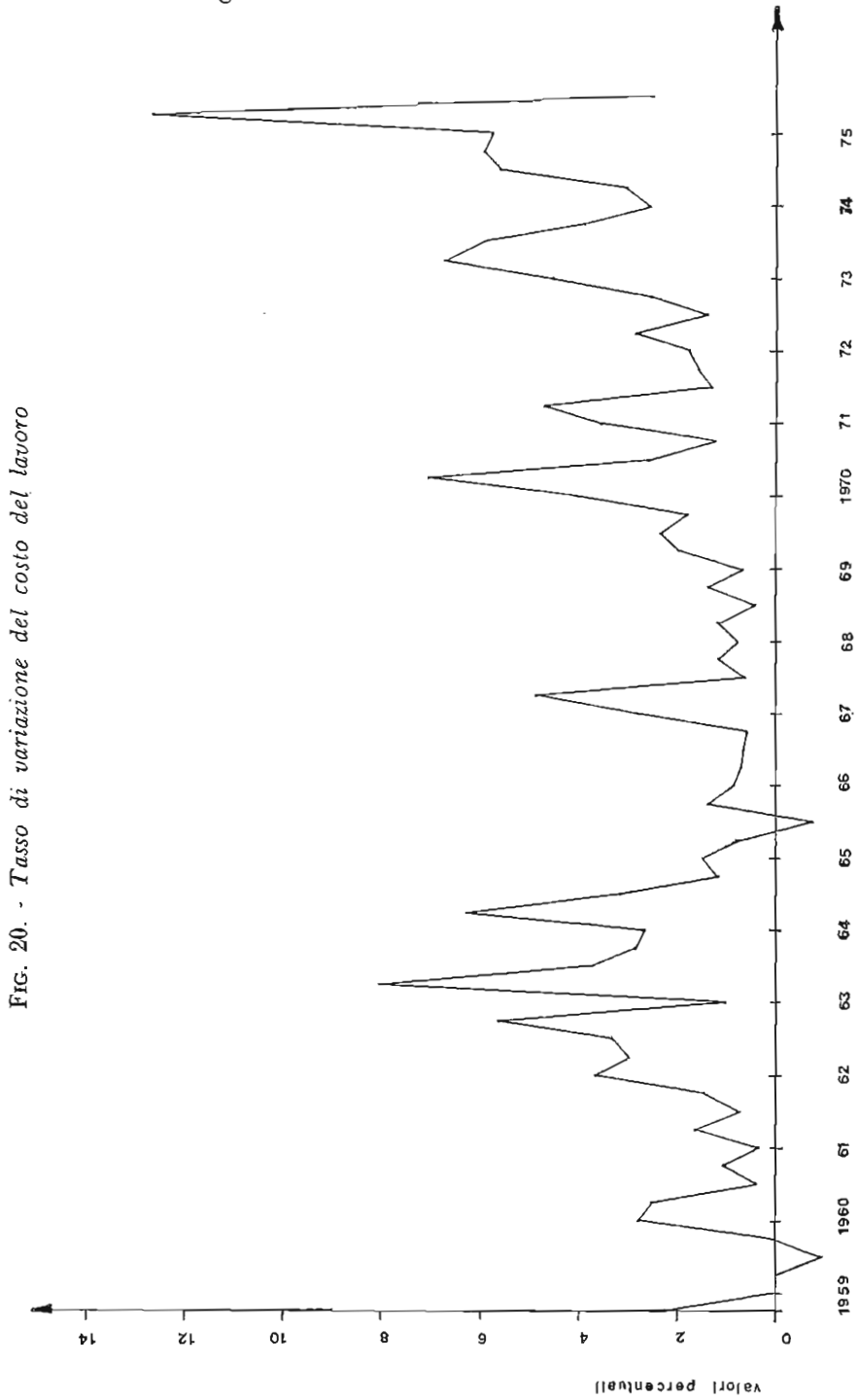


FIG. 20. - Tasso di variazione del costo del lavoro

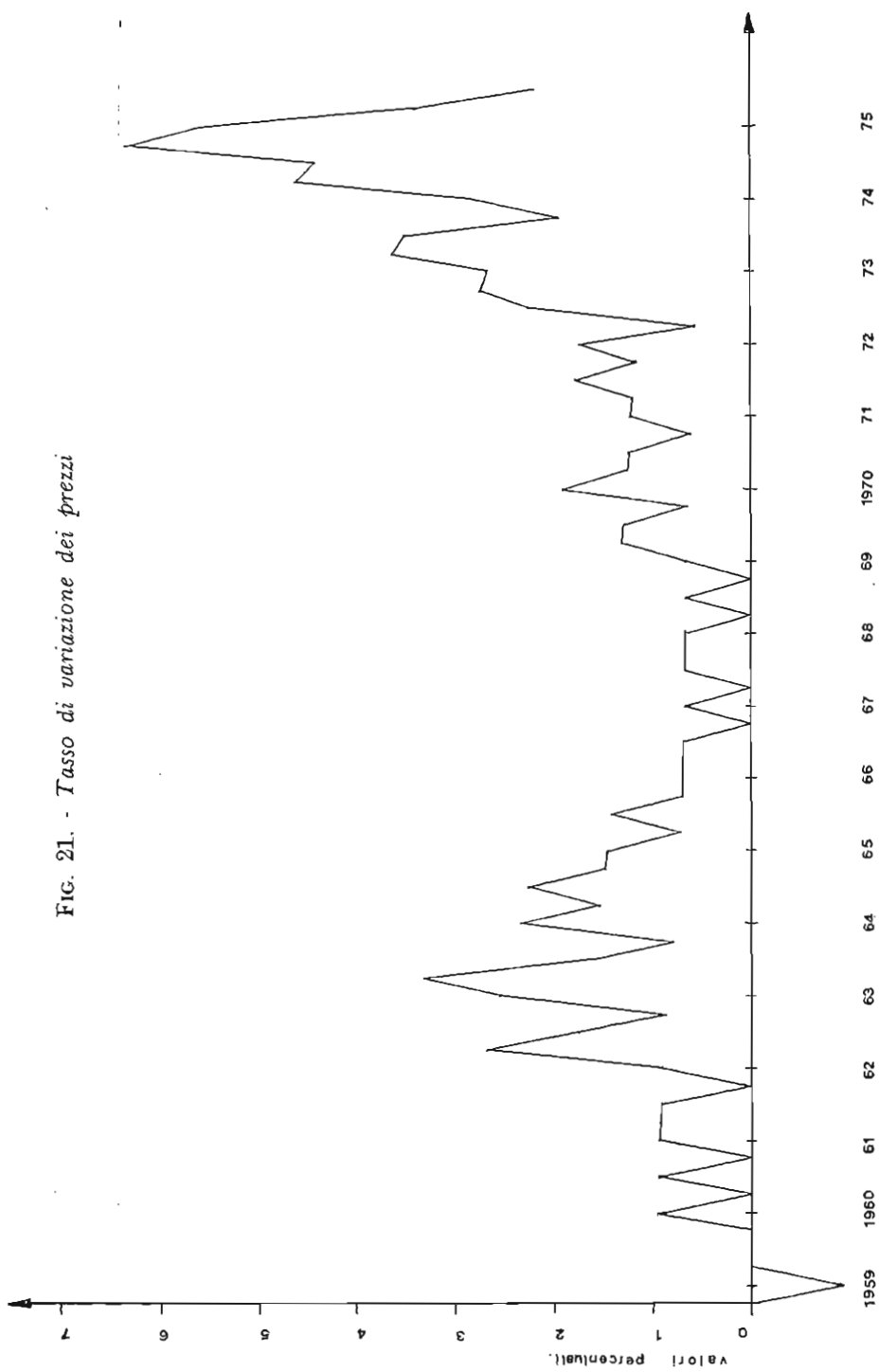


FIG. 22 - Tasso di disoccupazione - $U^{**} (-1)$
 (Valori destagionalizzati)

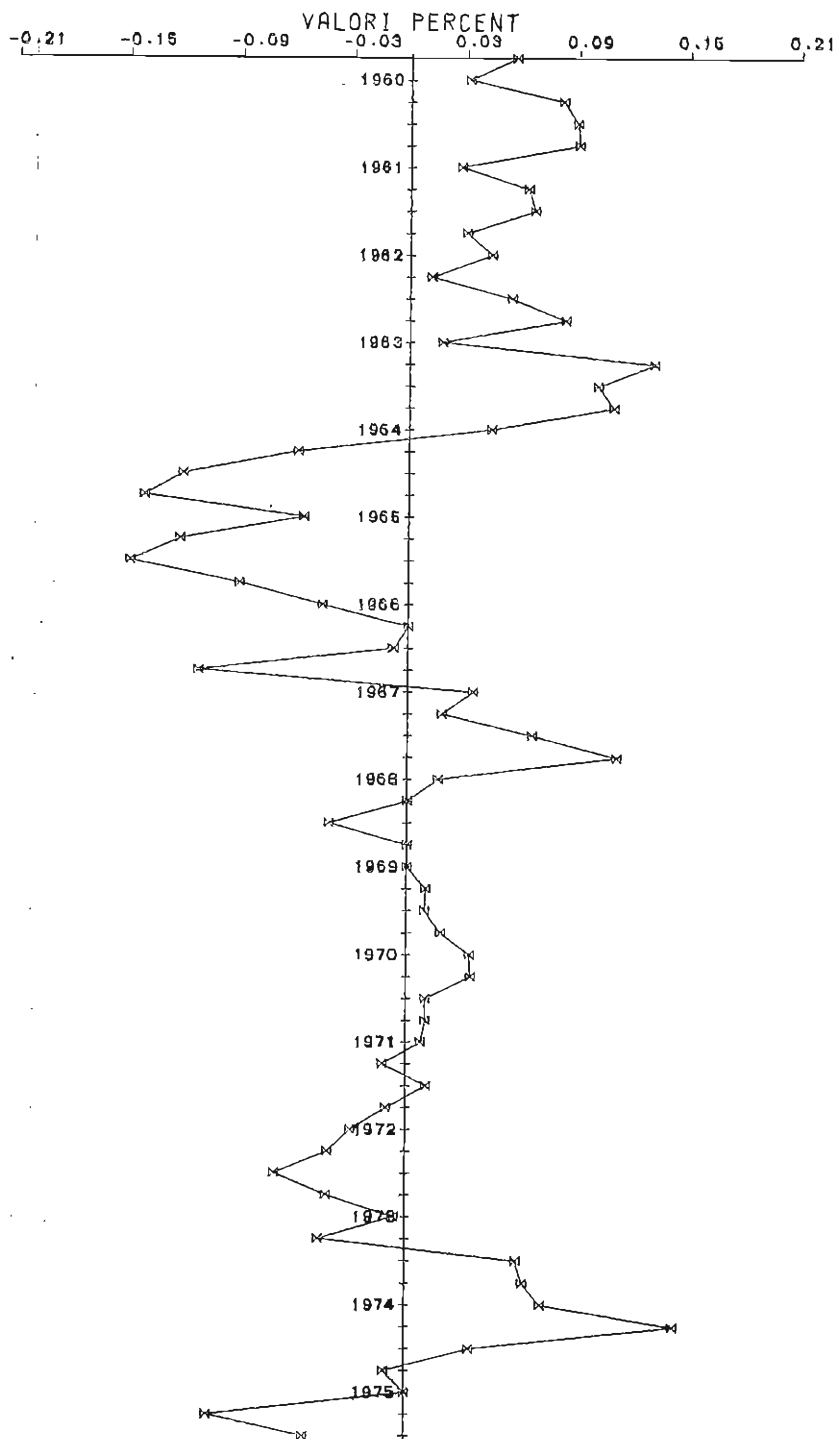


FIG. 23 - Percentuale di forza lavoro che rinnova il contratto nel settore industriale

