17. IDENTIFICAZIONE, CAUSALITA' ED ESOGENEITA': ALCUNE OSSERVAZIONI CRITICHE

*di Domenico Sartore**

Sommario

La comunicazione vuole mettere in evidenza i legami esistenti tra il problema dell'identificazione econometrica e della causalità; mostrare come la funzione di correlazione incrociata, non potendo caratterizzare la causalità istantanea, possa essere usata come test per l'esogeneità di un processo solo in casi particolari; infine, chiarire il senso della scomposizione spettrale, rispetto alla definizione di causalità, data dal Granger, alla luce dei teoremi dimostrati da Sims.

1. Causalità: sue caratteristiche alternative ed esogeneità

Nell'ampia «survey» di Pierce e Haugh (1977), sono stati sintetizzati attraverso la dimostrazione di tre teoremi[1] i diversi modi di caratterizzare gli «eventi di causalità» specificati nello stesso articolo. Con essi si dimostra che esistono condizioni equivalenti per la caratterizzazione, a seconda della particolare forma che assume il modello stocastico. Un risultato notevole messo in evidenza dagli enunciati è che la funzione di correlazione incrociata tra le innovazioni del modello stocastico «può essere usata per caratterizzare qualsiasi evento di causalità che si verifichi» e ciò a prescindere da qualsiasi forma di specificazione del modello. Di qui il suggerimento di usare la stima di tale funzione come test per mettere in evidenza l'esistenza, o meno, di causalità istantanea e non istantanea e la sua direzione. Solo nel caso di causalità istantanea, la funzione di correlazione non è in grado di discriminare la direzione di causalità. Ne segue che la specificazione del modello nelle sue relazioni funzionali diventa condizionale alle informazioni fornite dal test. In particolare, definendo con $\varrho_{uv}(k)$ la funzione di correlazione incrociata tra

* Università degli Studi di Milano e di Venezia.

1. Pierce e Haugh, 1977, pp. 272-275.

le innovazioni u e v dei processi x e y, se $\varrho_{uv}(0)=0$, non ha più senso distinguere tra la prima e la terza delle forme equivalenti per l'identificazione econometrica, descritte in Granger-Newbold (1977), dovendo il modello assumere la matrice di covarianza degli errori, Σ, diagonale e la matrice triangolare, P, uguale alla matrice identità[2].

Quanto detto nella «survey» va però parzialmente rivisto in quanto Price (1979) dimostra che, per la caratterizzazione della causalità istantanea, i risultati ottenuti da Pierce e Haugh non sono corretti. Il valore della correlazione incrociata $\varrho_{uv}(0)$ non caratterizza la causalità istantanea, tranne nel caso di assenza di feedback tra x e y[3].

La descrizione dell'evento «causalità istantanea» è fatta da Pierce e Haugh, usando la notazione binaria[4], con:

$$C_I=[(001), (101), (011), (111)]$$

unicamente caratterizzata da $\varrho_{uv}(0)\neq 0$. Dopo il risultato di Price, diventa impossibile dare una qualsiasi caratterizzazione dell'insieme C_I, può invece essere data per i suoi primi tre elementi nel seguente modo:

a. (001); esiste solo causalità istantanea tra x e y se, e solo se, $\varrho_{uv}(k)=0$, $k\gtrless 0$ e $\varrho_{uv}(0)\neq 0$;
b. (101); esiste causalità istantanea tra x e y e causalità unidirezionale da x a y se, e solo se, $\varrho_{uv}(k)=0$, $k<0$ e $\varrho_{uv}(k)\neq 0$ per $k=0$ e per almeno un $k>0$;
c. (011); esiste causalità istantanea tra x e y e causalità unidirezio-

2. Si veda Granger-Newbold, 1977, p. 219. Qui si è usata la stessa notazione degli autori per le matrici Σ e P.
3. Cfr. Pierce e Haugh, 1979.
4. Lo spazio delle interrelazioni causali è descritto da Pierce e Haugh nel seguente modo (si veda Pierce e Haugh, 1977, tab. 1, p. 268):

(000) - x e y sono indipendenti
(001) - solamente causalità istantanea
(100) - x causa y solamente e non istantaneamente
(101) - x causa y solamente e istantaneamente
(010) - y causa x solamente e non istantaneamente
(011) - y causa x solamente e istantaneamente
(110) - feedback, non istantaneamente
(111) - feedback e causalità istantanea.

nale da y a x se, e solo se, $\varrho_{uv}(k)=0$, $k>0$ e $\varrho_{uv}(k)\neq 0$ per $k=0$ e per almeno un $k<0$.

La presenza di causalità istantanea, nel caso (111), non può essere caratterizzata attraverso la funzione di correlazione e tanto meno la sua assenza, nel caso (110).

Questa correzione del Price sembra invitare ad una maggior cautela nel considerare congiuntamente i concetti di causalità istantanea, feedback, causalità unidirezionale. E' quindi opportuno procedere ad una ulteriore riflessione su di essi soprattutto per quanto concerne le relazioni con il concetto di «stretta esogeneità econometrica»[5].

Forse, un'errata interpretazione dei risultati ottenuti da Sims (1972), ha attribuito ai tests di causalità il compito di determinare l'esogeneità di una variabile rispetto ad un'altra. Nelson (1979), ad esempio, attribuisce a Sargent (1976) l'idea che se «y non causa x» nel senso di Granger, ciò implichi stretta esogeneità econometrica di x rispetto a y.

Il dibattito econometrico si sarebbe presto concluso su tale argomento semplicemente chiarendo che l'enunciato: «y non causa x», usato da Sims nei suoi teoremi, non esclude la possibilità che vi sia causalità istantanea tra y e x (con notazione binaria l'evento dell'enunciato sarebbe stato descritto dall'insieme [(000), (100), (101)]). Inoltre, nel dare la rappresentazione autoregressiva o a media mobile di un processo stocastico bivariato, Sims assume la matrice Σ associata al vettore dei disturbi ε_t uguale alla matrice identità, mentre non pone nessuna restrizione sulle matrici dei parametri al ritardo zero se non quelle necessarie per l'unicità della rappresentazione e ciò non esclude la possibilità che la causalità istantanea tra le variabili possa essere rappresentata.

Per comodità di esposizione si conserverà la dizione «y non causa x» per intendere la non esclusione della causalità istantanea tra x e y, altrimenti si userà la proposizione: «y non causa strettamente x». Si consideri ora il seguente:

5. La definizione di «stretta esogeneità econometrica» per x_t è esattamente la condizione espressa dal secondo teorema di Sims [1972] che x_t sia incorrelato con i residui u_s ottenuti dalla funzione a ritardi distribuiti di y_t rispetto ai valori correnti e passati di x_t.

Teorema: Dato un processo stocastico bivariato stazionario in covarianza (x_t, y_t), x_t è strettamente esogeno rispetto a y_t *solo se* y_t non causa x_t nel senso di Granger.

Prova[6]: Si supponga che il modello per il processo stocastico bivariato sia:

$$
\begin{aligned}
x_t &= \alpha(L)\varepsilon_t + \beta(L)\eta_t \\
y_t &= \gamma(L)\varepsilon_t + \vartheta(L)\eta_t
\end{aligned}
\qquad (1.1)
$$

dove

$$
E[\varepsilon_t \eta_s] = \delta_{ts}\Sigma \quad , \quad \Sigma \text{ semidefinita positiva;} \qquad (1.2)
$$
$$
\alpha_0 = \vartheta_0 = 1 \text{ e } \gamma_0 = \beta_0 = 0.
$$

Data l'ipotesi di stretta esogeneità econometrica, y_t si può esprimere così:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \sum_{j=0}^{\infty} h_j x_{t-j} + u_t \\
&= h(L)x_t + u_t \qquad\qquad E[x_t u_s] = 0, \quad \forall\, t, s.
\end{aligned}
$$

E, per il teorema di Wold sulla scomposizione di un processo stocastico, esisterà la rappresentazione di x_t:

$$
x_t = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_{t-j} + e_t
$$

dove $E[e_t x_s] = 0$, per $s < t$. Ora, per $s < t$, $E[e_t y_s] = E[e_t h(L) x_s] + E[e_t u_s] = 0$, essendo $E[e_t h(L) x_s] = 0$ data l'ortogonalità tra e_t e i valori passati di x_t, ed $E[e_t u_s] = E[a(L) x_t u_s] = 0$ poiché $E[x_t u_s] = 0$, $\forall\, t,s$.

Quindi i valori passati di y_t non aiutano a migliorare la previsione di x_t, rispetto alle informazioni contenute nella storia passata di x_t; in altre parole, y_t non causa x_t nel senso di Granger. Δ

La dimostrazione prescinde dalle assunzioni fatte in (1.2). Infatti rimane imprecisata la relazione tra $h(L)$ ed i polinomi del mo-

6. La prova di questo teorema è, ovviamente, analoga alla prova data da Sims (1972) nel suo secondo teorema, per dimostrare che la proposizione «y_t non causa x_t» nel senso di Granger costituisce una condizione necessaria affinché x_t possa considerarsi strettamente esogeno. Qui tuttavia si è seguita l'impostazione di Sargent (1979).

dello (1.1) e tra i disturbi ε_t, η_t e u_t. Essa, però, sussiste qualora si dimostri che per la stretta esogeneità econometrica di x_t rispetto a y_t *non è sufficiente* che y_t non causi x_t nel senso di Granger. Vengono, cioè, implicate le considerazioni sull'identificabilità econometrica svolte per le rappresentazioni approssimate con modelli ARMA (p, q).

Ponendo:

$$H(L) = \begin{bmatrix} \alpha(L) & \beta(L) \\ \gamma(L) & \vartheta(L) \end{bmatrix}$$

per semplicità, si considerino solo i due casi:

1) $H(0)=I$, Σ non vincolata e 2) $H(0)$ triangolare (superiore) con valori unitari sulla diagonale principale e Σ diagonale.

Nel primo caso (cioè nelle condizioni formulate in (1.2)), si osservi che se y_t non causa x_t nel senso di Granger allora, per il primo teorema di Sims si può scrivere la (1.1) come:

$$\begin{aligned} x_t &= \alpha(L)\varepsilon_t \\ y_t &= \gamma(L)\varepsilon_t + \vartheta(L)\eta_t \end{aligned} \tag{1.3}$$

Ora, poiché Σ può non essere diagonale, può anche sussistere la relazione lineare $\eta_t = \pi_t + \varrho\varepsilon_t$, sostituendo nella seconda equazione della (1.3):

$$\begin{aligned} y_t &= \gamma(L)\varepsilon_t + \vartheta(L)\,(\pi_t + \varrho\varepsilon_t) \\ &= [\gamma(L) + \varrho]\alpha(L)^{-1}x_t + \vartheta(L)\pi_t \\ &= h(L)x_t + u_t \end{aligned}$$

dove $h(L) = [\gamma(L) + \varrho]\alpha(L)^{-1}$; $u_t = \vartheta(L)\pi_t$.

Si osservi che:

$$\begin{aligned} E[x_t u_s] &= E[\alpha(L)\varepsilon_t\, \vartheta(L)\pi_s] \\ &= E[\alpha(L)\, \vartheta(L)\, (\varepsilon_t\varepsilon_s - \varrho\varepsilon_t\eta_s)] \end{aligned}$$

da cui:

$$E[x_t u_s] = \begin{cases} (\sigma_{\varepsilon\eta} - \varrho\sigma^2_\varepsilon) \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \vartheta_j \alpha_{t+j-s} & \text{per } s \leq t \\ \\ (\sigma_{\varepsilon\eta} - \varrho\sigma^2_\varepsilon) \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \vartheta_{j+s-t} \alpha_j & \text{per } s > t \end{cases} \tag{1.4}$$

quindi, se y_t non causa x_t nel senso di Granger, ciò non implica stretta esogeneità econometrica di x_t rispetto a y_t non essendo necessariamente $E[x_t u_s]=0, \ \forall t, s$[7].

Nel secondo caso, valga:

$$\Sigma = I; \quad \alpha_0 = \vartheta_0 = 1, \quad \beta_0 \neq 0, \quad \gamma_0 = 0$$

Si osservi che, se y_t non causa x_t nel senso di Granger, ma sussiste causalità istantanea, allora si dimostra[8] che $\beta(L)$ è proporzionale a $\alpha(L)$ ed il fattore di proporzionalità è β_0 essendo $\alpha_0 = 1$. Dalla (1.1) si ottiene:

$$x_t = \alpha(L)\varepsilon_t + \beta_0\alpha(L)\eta_t$$

da cui:

$$\varepsilon_t = \alpha(L)^{-1}x_t - \beta_0\eta_t$$

sostituendo nella seconda equazione della (1.1):

$$\begin{aligned} y_t &= \gamma(L)\,\alpha(L)^{-1}x_t + [\vartheta(L) - \beta_0\gamma(L)]\eta_t \\ &= h(L)x_t + u_t \end{aligned}$$

dove $h(L) = \gamma(L)\,\alpha(L)^{-1}$ ed $u_t = [\vartheta(L) - \beta_0\gamma(L)]\eta_t$

Ora:

$$\begin{aligned} E[x_t u_s] &= E\{[\alpha(L)\,(\varepsilon_t + \beta_0\eta_t)]\,[\vartheta(L) - \beta_0\gamma(L)]\eta_s\} \\ &= E[\beta_0\alpha(L)\eta_t\,\vartheta(L)\eta_s - \beta_0^2\alpha(L)\eta_t\,\gamma(L)\eta_s] \end{aligned}$$

da cui:

$$E[x_t u_s] = \begin{cases} \beta_0\sigma^2_\eta\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} \vartheta_j\alpha_{j+t-s} - \beta_0 \sum\limits_{j=0}^{\infty} \gamma_j\alpha_{j+t-s}\right) & \text{per } s \leq t \\ \beta_0\sigma^2_\eta\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} \alpha_j\vartheta_{j+s-t} - \beta_0 \sum\limits_{j=0}^{\infty} \alpha_j\gamma_{j+s-t}\right) & \text{per } s > t \end{cases} \qquad (1.5)$$

7. Sargent (1979), assumendo questa rappresentazione del processo stocastico bivariato stazionario, segue la medesima impostazione nella dimostrazione. Si osservi che la condizione $\rho = \sigma_{\varepsilon\eta}/\sigma_\varepsilon^2$ data dall'Autore per ottenere la stretta esogeneità econometrica di x_t rispetto a y_t è solo sufficiente.

8. Si veda Pierce e Haugh, 1977, p. 274.

Anche per questa via risulta evidente che l'assenza di causalità non implica la stretta esogeneità econometrica. Sono necessarie delle condizioni ulteriori ma, a differenza del caso precedente, è sufficiente darle sui disturbi u_t invece che sul polinomio $h(L)$.

Alla luce dei risultati ottenuti è possibile dimostrare il seguente:

Corollario: Dato un processo stocastico bivariato stazionario in covarianza (x_t, y_t), x_t è strettamente esogeno rispetto a y_t *se* y_t non causa strettamente x_t nel senso di Granger.

Prova: Poiché l'assenza di causalità istantanea implica Σ e $H(0)$ entrambi diagonali, ciò equivale a porre $\varrho=0$, $(\sigma_{\varepsilon\eta}=0)$, nella (1.4) oppure $\beta_0=0$ nella (1.5). Δ[9].

Questi risultati sono importanti perché permettono una maggiore chiarezza nel considerare congiuntamente i concetti di causalità unidirezionale, causalità istantanea, feedback ed esogeneità. Infatti la funzione di correlazione incrociata $\varrho_{uv}(k)$ può essere utilizzata come test per la stretta esogeneità econometrica di una variabile rispetto ad un'altra solo nei seguenti casi particolari[10]:

se $\varrho_{uv}(k)=0$, $k\leq 0$ e $\varrho_{uv}(k)\neq 0$ per almeno un $k>0$, allora si dirà che x_t è strettamente esogeno rispetto a y_t; mentre, qualora $\varrho_{uv}(k)=0$, $k\geq 0$ e $\varrho_{uv}(k)\neq 0$ per almeno un $k<0$, allora y_t sarà strettamente esogeno rispetto a x_t.

Nei casi b) e c) dell'insieme C_I non è possibile stabilire una relazione di stretta esogeneità econometrica, né discernere la direzio-

9. Nelson (1979) dimostra, per altra via, che la causalità in senso debole non implica l'esogeneità, costruendo equazioni in cui la variabile non causata dipende dalla storia passata della variabile non causante. L'impostazione data nel presente articolo ci sembra più generale. Va tuttavia messo in evidenza un semplice modello dato dal Nelson, cioè

$$x_t = \varepsilon_t \qquad\qquad E(\varepsilon_t \eta_s) = 0, \ \forall t,s$$
$$y_t = \varepsilon_t + \eta_t$$

Questo, per quanto detto, costituisce un ottimo esempio contro la proposizione che la non causalità in senso stretto sia una condizione necessaria per la stretta esogeneità econometrica di x_t rispetto a y_t.

10. Valgono ovviamente tutte le obiezioni circa la non elevata potenza del test e la sua distorsione (si veda Pierce e Haugh, 1977, Sims, 1977, Sargent, 1979).

ne della causalità istantanea, sembra però opportuno assumere che la causalità istantanea abbia lo stesso verso della causalità non istantanea. Nel caso a) dell'insieme C_I, il verso della causalità istantanea può solo essere assunto a priori. Infine, in presenza di feedback, non ha senso parlare di variabili esogene ed endogene, ma piuttosto di variabili «strumento» ed «obiettivo». Da questo punto di vista, il concetto di feedback istantaneo può essere abbandonato perché privo di efficacia nella rappresentazione della realtà e si può comunque assegnare, a priori, un verso alla causalità istantanea.

2. Causalità e rappresentazione di un processo stocastico nel dominio frequenziale

Il processo stocastico bivariato rappresentato dalla (1.1) può essere interpretato come un sistema di equazioni alle differenze finite lineari stocastiche e può essere descritto attraverso il seguente diagramma:

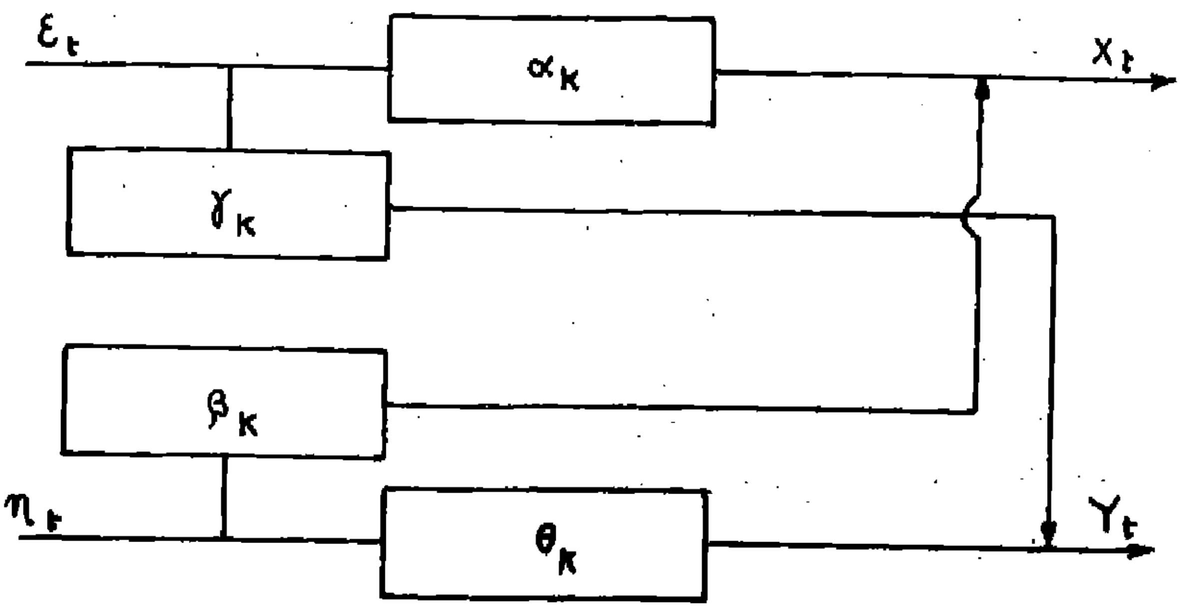

Fig. 2.1

dove ε_t e η_t rappresentano gli ingressi del sistema, x_t e y_t le uscite ed α_k, β_k, γ_k, ϑ_k le funzioni di risposta impulsiva.

Se f rappresenta la frequenza misurata in cicli per unità di tempo (mese, trimestre, ecc...), considerando le trasformate di Fourier delle autocovarianze e covarianze incrociate che legano i processi del diagramma 2.1 e calcolando le trasformate di Fourier A(f), B(f), C(f), D(f), delle rispettive funzioni di risposta impulsiva, si ottiene la seguente rappresentazione del sistema (1.1) nel dominio frequenziale[11]:

$$\begin{aligned} H_{xx}(f) &= \sigma_\varepsilon^2 |A(f)|^2 + \sigma_\eta^2 |B(f)|^2 \\ H_{yy}(f) &= \sigma_\varepsilon^2 |C(f)|^2 + \sigma_\eta^2 |D(f)|^2 \\ H_{yx}(f) &= \sigma_\varepsilon^2 A(f)\,\bar{C}(f) + \sigma_\eta^2 B(f)\,\bar{D}(f) \end{aligned} \tag{2.1}$$

dove $H_{xx}(f)$ e $H_{yy}(f)$ sono gli autospettri rispettivamente del processo x_t e y_t; $H_{yx}(f)$ è lo spettro incrociato di x_t e y_t; $\bar{C}(f)$ indica la funzione complessa coniugata di C(f).

Il Granger (1969) arriva al medesimo risultato, partendo dalla rappresentazione autoregressiva del processo bivariato:

$$\begin{cases} [1-a(L)]x_t + [b_0 - b(L)]y_t = \varepsilon_t \\ [c_0 - c(L)]x_t + [1-d(L)]y_t = \eta_t \end{cases}$$

con $E[\varepsilon_t\, \varepsilon_s] = E[\eta_t\, \eta_s] = 0, \quad t \neq s; \quad E[\varepsilon_t\, \eta_s] = 0, \qquad \forall t, s$

a(L), b(L), c(L), d(L), sono polinomi nell'operatore dei ritardi L del tipo, ad es., $a(L) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j L^j$, e $b_0 = c_0 = 0$ oppure $b_0 = 0$ e $c_0 \neq 0$ a seconda che si ammetta l'assenza o meno, di causalità istantanea. Nel secondo caso la forma del modello proposta dal Granger risulta sottoidentificata. Non è questo l'aspetto che qui preme sottolineare, quanto il fatto che qualora siano soddisfatte le condizioni di invertibilità[12] della matrice polinomiale autoregressiva (assumendo $b_0 = c_0 = 0$):

$$M(L) = \begin{bmatrix} 1-a(L) & b(L) \\ c(L) & 1-d(L) \end{bmatrix}$$

la rappresentazione spettrale data dal Granger del processo bivariato è equivalente a quella data in (2.1).

11. Cfr. Jenkins e Watts, 1968, p. 353.
12. La matrice M(L) è invertibile quando le radici dell'equazione $|M(z)| = 0$, z variabile complessa, giacciono tutte all'esterno del cerchio unitario $|z| = 1$.

Infatti il Granger dimostra che:

$$\begin{aligned} H_{xx}(f) &= 1/\Delta\,(|1-d|^2\sigma_\varepsilon^2+|b|^2\sigma_\eta^2) \\ H_{yy}(f) &= 1/\Delta\,(|c|^2\sigma_\varepsilon^2+|1-a|^2\sigma_\eta^2) \\ H_{yx}(f) &= 1/\Delta\,[(1-d)\bar{c}\sigma_\varepsilon^2+(1-\bar{a})b\sigma_\eta^2] \end{aligned} \tag{2.2}$$

con $\Delta=|(1-a)\,(1-d)-bc|^2$, dove le funzioni H assumono lo stesso significato visto in (2.1) ed a, b, c, d, sono funzioni polinomiali in $\exp(-i2\pi f)$, omesso per brevità come argomento: ad esempio,

$$a(\exp(-i2\pi f))=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \exp(-i2\pi fk).$$

Ora ponendo:

$$A(f)=1-d;\ B(f)=b;\ C(f)=c;\ D(f)=1-a \tag{2.3}$$

le relazioni (2.2) sono immediatamente interpretabili in termini di funzioni di risposta frequenziale, cioè di trasformate di Fourier di funzioni di risposta impulsiva.

Lo spettro incrociato $H_{yx}(f)$ può essere visto come somma di due componenti, cioè:

$$H_{yx}(f)=H_1(f)+H_2(f)$$

dove:

$$H_1(f)=\Delta^{-1}(1-d)\bar{c}\sigma_\varepsilon^2 \text{ ed } H_2(f)=\Delta^{-1}(1-\bar{a})b\sigma_\eta^2$$

Equivalente scomposizione si ha per lo spettro incrociato in (2.2). Per questa via si può comprendere l'intuizione avuta dal Sims per l'enunciato del suo primo teorema. Infatti il Granger afferma che le componenti H_1 e H_2 sono direttamente legate alla causalità tra x_t e y_t. Se y_t non causa x_t, allora $b\equiv 0$ il che implica $H_2(f)\equiv 0$ ed $H_{yx}(f)=H_1(f)$. Ma $b\equiv 0$ implica $B(f)\equiv 0$ e ciò conduce al risultato del primo teorema di Sims.

L'enunciato di tale teorema sembra entrare in contraddizione con la scomposizione spettrale proposta dal Granger, infatti vi si afferma che, data la rappresentazione (1.1), «x_t non causa y_t secondo Granger se, e solo se, $\alpha(L)$ o $\beta(L)$ possono essere scelti identicamente nulli». Quindi, se y_t non causa x_t, potrà essere $\alpha(L)\equiv 0$, essendo $\beta(L)\not\equiv 0$, ma ciò conduce in termini di scomposizione dello spettro incrociato ad $H_1(f)=0$ ed $H_{yx}(f)=H_2(f)$ dovendo essere $A(f)\equiv 0$.

La contraddizione è solo apparente in quanto si può osservare che, nel caso in cui si scelga $\beta(L)\equiv 0$, allora si annulla $H_2(f)$ che è la componente associata con σ_η^2 ed i disturbi η_t risultano ortogonali al processo x_t per il secondo teorema di Sims; nel caso $\alpha(L)\equiv 0$, si annulla la componente $H_1(f)$ associata con σ_ε^2 e sono proprio i disturbi ε_t stavolta ad essere ortogonali al processo x_t. In entrambi i casi si annulla la componente dello spettro incrociato associata alla varianza dei disturbi che sono ortogonali al processo x_t, il processo non causato[13].

La scomposizione spettrale proposta dal Granger ha rilevanza teorica ma non operativa, in quanto essa è possibile solo se il processo stocastico bivariato è noto. Non è invece possibile operare la scomposizione dello spettro incrociato (stimato) partendo dalla stima delle funzioni di correlazione incrociata.

3. Conclusioni

Si è data una condizione necessaria ed una condizione sufficiente affinché un processo sia strettamente esogeno ad un altro, utilizzando il concetto di causalità secondo il Granger. Questi risultati permettono di chiarire in quali casi la funzione di correlazione incrociata possa essere utilizzata come test anche per l'esogeneità e non solo per la causalità. Va ricordato che, nel presente lavoro, si è fatto riferimento ad una particolare definizione di esogeneità, la «stretta esogeneità econometrica», prescindendo volutamente da altre definizioni di esogeneità presenti in letteratura, come ad esempio, l'esogeneità «debole» e «forte» definita in termini di funzioni di distribuzione delle variabili osservabili, proposta da Engle - Hendry - Richard (1980). Infine, dal confronto tra i risultati di Granger (1969) e di Sims (1972) si è potuto dare un ulteriore contributo interpretativo alla scomposizione spettrale proposta dal Granger.

13. Ringrazio K.F. Wallis per la proficua discussione su questo punto.

Bibliografia

Engle R.F., Hendry D.F., Richard J.F. (1980), *Exogeneity, causality and structural invariance in econometric modelling*, paper presented at the «International Symposium on Criteria for Evaluating the Reliability of Macro-Economic Models», Pisa, 16-18 dicembre.

Granger C.W.J. (1969), *Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods*, «Econometrica», vol. 37, n. 3, pp. 424-438.

Granger C.W.J. (1980), *Testing for causality: a personal viewpoint*, «Journal of Economic Dynamics and Control», vol. 2, n. 4, pp. 329-352.

Granger C.W.J., Newbold P. (1977), *Forecasting economic time series*, Academic Press, New York.

Jenkins G.M., Watts D.G. (1968), *Spectral analysis and its application*, Holden Day, San Francisco.

Nelson C.R. (1979), *Granger causality and the natural rate hypothesis*, «Journal of Political Economy», 87, n. 2, pp. 390-394.

Pierce D.A., Haugh L.D. (1977), *Causality in temporal systems* - Characterization and a survey, «Journal of Econometrics», 5, pp. 265-293.

Pierce D.A., Haugh L.D. (1979), *Comment on price*, «Journal of Econometrics», 10, pp. 257-260.

Price J.M. (1979), *A characterization of istantaneous causality: a correction*, «Journal of Econometrics», 10, pp. 253-256.

Sargent T.J. (1976), *A classical macroeconometric model for the United States*, «Journal of Political Economy», 84, n. 2, pp. 207-237.

Sargent T.J. (1979), *Causality, exogeneity, and natural rate models: reply to C.R. Nelson and B.T. McCallum*, «Journal of Political Economy», 87, n. 2, pp. 403-409.

Sims C.A. (1972), *Money, income, and causality*, «American Economic Review», september, pp. 540-552.

Sims C.A. (1977), *Comment on Pierce*, «Journal of the American Statistical Association», 72, pp. 11-12.