

**ANALISI INTERVALLARE  
PER MODELLI DI SELEZIONE DEL PORTAFOGLIO<sup>♦</sup>**

*Silvio Giove*

*Dipartimento di Matematica Applicata, Università Ca Foscari di Venezia  
e-mail: sgiove@unive.it*

*Stefania Funari*

*Dipartimento di Matematica Applicata, Università Ca Foscari di Venezia  
e-mail: funari@unive.it*

*Carla Nardelli*

*Dipartimento di Discipline Economico-Aziendali, Università di Messina  
e-mail: nardelli@unive.it*

**Abstract**

Tra gli approcci proposti in letteratura per affrontare i problemi di selezione del portafoglio, oltre ai metodi derivati dal ben noto modello di Markowitz, è interessante considerare la programmazione *possibilistica* in cui i tassi di rendimento, anziché essere descritti da variabili casuali, sono rappresentati da variabili *possibilistiche*. Diverso è in tal caso il significato dell'incertezza assegnato a tali variabili, che risulta caratterizzato da *ambiguità* piuttosto che da stocasticità. Seguendo tale filone, ma con un approccio leggermente diverso, i coefficienti della funzione obiettivo e dei vincoli possono essere rappresentati da opportuni intervalli. In particolare per la risoluzione di problemi di programmazione lineare intervallare è stato impiegato il criterio del *minimax regret*. Per i problemi di selezione di portafoglio viene anche proposto un nuovo approccio alla programmazione *possibilistica* basato sul metodo del *regret*, secondo cui il decisore ha come obiettivo la minimizzazione di un funzionale che rappresenta la massima deviazione possibile tra il rendimento realizzato del portafoglio ed il rendimento di un benchmark. Nel presente lavoro viene affrontato un problema di selezione del portafoglio in cui i prezzi dei titoli sono rappresentati da variabili intervallari, per la cui risoluzione viene usato il metodo del *minimax regret*.

---

<sup>♦</sup> Presentato al XXVI Convegno A.M.A.S.E.S, Verona 11-14 Settembre 2002.

## 1. Introduzione

In molti problemi di decisione in ambito economico e finanziario i dati sono solitamente espressi in modo impreciso ed ambiguo, per cui nella letteratura specializzata è possibile notare un crescente interesse riguardo ai problemi di ottimizzazione affrontati tramite tecniche di programmazione stocastica, fuzzy e possibilistica. In particolare, fra gli approcci proposti per affrontare i problemi di selezione del portafoglio, oltre ai metodi derivati dal ben noto modello di Markowitz, è interessante considerare la programmazione *possibilistica* in cui i tassi di rendimento, anziché essere descritti da variabili casuali, sono rappresentati da variabili fuzzy o *possibilistiche* con un'associata distribuzione di possibilità in cui è inglobata la conoscenza degli esperti (Inuiguchi-Ramik, 2000, Tanaka-Guo-Turksen, 2000). Diverso è in tal caso il significato dell'incertezza assegnato a tali variabili, che risulta caratterizzato da *ambiguità* piuttosto che da stocasticità, si veda al proposito Inuiguchi-Sakawa (1995).

Seguendo tale filone, è possibile affrontare i problemi di programmazione possibilistica con l'approccio dell'analisi intervallare, in cui l'ambiguità viene descritta tramite variabili appartenenti ad assegnati intervalli; a tal proposito, in Alefeld-Mayer (2000) vengono presentate sia la teoria che alcuni esempi dell'analisi intervallare. Applicazioni dell'analisi intervallare a problemi di programmazione si trovano anche in Chinneck-Ramadan (2000), dove viene affrontato un problema di programmazione lineare.

In Inuiguchi-Sakawa (1995) viene considerato un problema di programmazione lineare intervallare, in cui la funzione oggetto viene ottimizzata per mezzo del criterio del *minimax regret*. Quest'ultimo viene impiegato in Inuiguchi-Tanino (2000) per risolvere problemi di selezione del portafoglio in cui il decisore ha come obiettivo la minimizzazione del *regret*, che rappresenta la massima

deviazione possibile tra il rendimento realizzato del portafoglio ed il rendimento di un benchmark.

Nel presente lavoro viene formulato un problema di selezione del portafoglio a variabili intervallari per la cui risoluzione si utilizza l'approccio del *minimax regret*; tale problema risulta analogo a quello proposto da Inuiguchi-Tanino (2000) per quanto riguarda la formulazione generale del problema, ma si differenzia da questo per l'uso di variabili intervallari nei coefficienti della funzione obiettivo.

Il lavoro è strutturato come segue: nel paragrafo 2 si definisce la funzione *regret* e si presentano alcuni risultati teorici riguardanti le proprietà di questa; nel paragrafo successivo si delineano alcune applicazioni presentate in letteratura riguardanti la teoria del portafoglio e si formula il nostro problema di selezione; nel paragrafo 4 si esaminano alcuni casi particolari sulla forma funzionale della funzione *regret* e nell'ultimo paragrafo sono riportate alcune considerazioni conclusive.

## 2. Aspetti teorici

Si definisce la funzione *regret* nel modo seguente:

$$r(x; c) = \max_{\substack{e^T y = 1 \\ y \geq 0}} F(c^T y, c^T x) \quad (2.1)$$

dove la funzione  $F: \mathfrak{R}_0^+ \times \mathfrak{R}_0^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$  è continua, strettamente crescente nella prima componente e strettamente decrescente nella seconda;  $x, y \in \mathfrak{R}^n$  rappresentano i vettori delle quote di portafoglio,  $c \in \mathfrak{R}^n$  indica il vettore dei prezzi, ciascuno dei quali appartenente ad un intervallo strettamente positivo:

$$c_i \in C_i, \quad C_i = [c_i^{\inf}, c_i^{\sup}], \quad c_i^{\inf} > 0 \quad (2.2)$$

ed  $e = (1, \dots, 1)^T$ .

Inoltre siano  $C = C_1 \times C_2 \times \dots \times C_n$  e  $X = \{x \in \mathfrak{R}^n : e^T x = 1, x \geq 0\}$ .

Si osservi che, come conseguenza della definizione (2.1), se  $y^*$  massimizza la funzione  $F$  rispetto alla sua prima componente, segue immediatamente dai vincoli  $e^T y = 1, y \geq 0$  che

$$c^T y^* \geq c^T x \quad \forall x \in X \quad (2.3)$$

Si assuma che

$$F(a, b) \geq 0, \quad \forall a \geq b > 0 \quad (2.4)$$

e

$$F(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b > 0 \quad (2.5)$$

in quanto nel caso migliore (che si ottiene quando il portafoglio scelto  $x$  soddisfa  $c^T x = c^T y^*$ ) si vuole assicurare che il *regret* risulti nullo.

Si ipotizzi inoltre che

$$\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset \quad (2.6)$$

in modo da garantire che non esiste un titolo dominante, nel senso che tutti i valori assunti dal prezzo di questo titolo non sono sistematicamente maggiori dei valori assunti dai prezzi di tutti gli altri titoli.

Dalla linearità delle componenti della funzione  $F$ , si ottiene la seguente:

*Proprietà 1:* esistono due indici  $i_M, i_m$  tali che  $\max_y c^T y$  si ottiene per

$y_i = 0, \quad \forall i \neq i_M, \quad y_{i_M} = 1$  e  $\min_x c^T x$  si ottiene per  $x_i = 0, \quad \forall i \neq i_m, \quad x_{i_m} = 1$ .

Infatti, se così non fosse, ad esempio se esistessero due componenti di  $y$  diverse da zero,  $y_i, y_j$  tali che  $y_i + y_j = 1$  ( $y_k = 0, \forall k \neq i, j$ ),  $y$  non potrebbe essere ottimo, tranne nel caso banale  $c_i = c_j$ , che non si considererà nel seguito. Infatti sia ad esempio  $c_i > c_j$ ; ne segue che  $c_i > c_i y_i + c_j y_j$ , in quanto il secondo membro è una combinazione lineare convessa di  $c_i, c_j$  (analogamente si procede se  $c_i < c_j$ ). Dunque necessariamente l'ottimo si ottiene rispetto ad  $y$  in corrispondenza di quell'indice  $i_M$  tale per cui:  $i_M = \arg \max_i \{c_i^{\text{sup}}\}$ , e pertanto il primo argomento della funzione  $F$  nel punto di massimo vale  $c_{i_M}$ .

Analogamente si può dimostrare che  $\min_x c^T x$  si ottiene in corrispondenza di un indice  $i_m = \arg \min_i \{c_i^{\text{inf}}\}$ .

Inoltre, dalla proprietà 1 e dalla monotonia di  $F$  nelle sue due componenti, il massimo del *regret* si ottiene quando la prima componente di  $F$  è massima e la seconda è minima. Quindi vale la seguente:

*Proprietà 2:* l'estremo superiore della funzione *regret*  $r^{\text{sup}} = \max_{\substack{x \in X \\ c \in C}} r(x; c)$  si

ottiene in corrispondenza di due indici  $i_{\text{max}}, i_{\text{min}}$  con  $i_{\text{max}} \neq i_{\text{min}}$  tali che  $r^{\text{sup}} = F(c_{i_{\text{max}}}^{\text{sup}}, c_{i_{\text{min}}}^{\text{inf}})$ .

Più precisamente si può dare un'ulteriore caratterizzazione dell'estremo superiore della funzione *regret*, come illustrato nella proposizione 1.

**Proposizione 1:** al variare di  $x \in X$  e di  $c \in C$ , si ha che il *regret*  $r(x;c)$  è un intervallo  $r = [r^{\text{inf}}, r^{\text{sup}}]$ ,

dove  $r^{\text{inf}} = 0$  e  $r^{\text{sup}} = \max_{\substack{x \in X \\ c \in C}} r(x;c) = \max_i \{ \max_{j \neq i} F(c_i^{\text{sup}}, c_j^{\text{inf}}) \}$ .

*Dimostrazione:* il fatto che il *regret* risulti un intervallo si giustifica con la continuità e la monotonia della funzione  $F$  rispetto a ciascuno dei suoi argomenti. Inoltre  $r^{\text{inf}} = 0$  è una diretta conseguenza della relazione (2.5), mentre  $r^{\text{sup}}$  si ricava dalla proprietà 2.

**Proposizione 2:** siano  $i_M = \arg \max_i \{c_i^{\text{sup}}\}$ ,  $i_m = \arg \min_i \{c_i^{\text{inf}}\}$ ,

$j_M = \arg \max_{i \neq i_M} \{c_i^{\text{sup}}\}$  e  $j_m = \arg \min_{i \neq i_m} \{c_i^{\text{inf}}\}$ . Vale quanto segue:

- i) se  $i_M \neq i_m$  allora  $r^{\text{sup}} = F(c_{i_M}^{\text{sup}}, c_{i_m}^{\text{inf}})$ ;
- ii) se  $i_M = i_m$  allora  $r^{\text{sup}} = \max\{F(c_{i_M}^{\text{sup}}, c_{j_m}^{\text{inf}}), F(c_{j_M}^{\text{sup}}, c_{i_m}^{\text{inf}})\}$ .

*Dimostrazione:*

i) è una conseguenza immediata della definizione di *regret* e delle proprietà 1 e 2. Infatti, il primo argomento di  $F$  è massimo in corrispondenza del vettore di base  $y$ , in cui l'unica componente non nulla è  $y_{i_M}$  e il secondo argomento è minimo in

corrispondenza del vettore di base  $x$ , in cui l'unica componente non nulla è  $x_{i_m}$ ; inoltre, per la monotonia della funzione  $F$  e dal fatto che  $i_M \neq i_m$ , segue la tesi.

ii) per le proprietà 1 e 2, siano  $i_{\max}$  ed  $i_{\min}$  gli indici tali per cui  $F(c_{i_{\max}}^{\sup}, c_{i_{\min}}^{\inf})$  sia massima con  $i_{\max} \neq i_{\min}$ ; sia ad esempio  $i_{\max} \neq i_M$  (quindi  $i_{\min} = i_m$ ). Deve essere per la monotonia di  $F$  rispetto al suo primo argomento:  $i_{\max} = \arg \max_{i \neq i_M} \{c_i^{\sup}\} = j_M$ . Analogamente, se fosse  $i_{\min} \neq i_m$  ne segue con considerazioni simili che  $i_{\max} = i_M$ ,  $i_{\min} = j_m$ . Dunque il punto di massimo di  $F$  va cercato tra le coppie  $(c_{i_M}^{\sup}, c_{j_m}^{\inf}), (c_{j_M}^{\sup}, c_{i_m}^{\inf})$ .

E' possibile dimostrare che anche la funzione *regret* definita in (2.1) è una variabile intervallare.

**Proposizione 3:** Sia  $R(x) = [\inf_{c \in C} r(x; c), \sup_{c \in C} r(x; c)]$ , al variare di  $x \in X$ . Si

dimostra che  $R(x)$  è un intervallo con estremo inferiore zero ed estremo superiore

$$r^{\sup}(x) = \max_i \{ \max_{c_i \in C_i} F(c_i, c_i x_i + \sum_{j \neq i} c_j^{\inf} x_j) \} \quad (2.7)$$

*Dimostrazione:* per dimostrare la (2.7), si deve calcolare ( $x$  è fissato):

$$r^{\sup}(x) = \max_{\substack{c \in C \\ y \in X}} F(c^T y, c^T x) \quad (2.8)$$

Sia  $c^* = (c_1^*, \dots, c_n^*)$  il vettore che massimizza la (2.8); necessariamente, per la proprietà 1, deve essere  $y^* = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ , ovvero  $\exists i^* : y_{i^*}^* = 1, y_j^* = 0 \forall j \neq i^*$ .

Data poi la monotonia (decrecente rispetto al secondo argomento) della funzione  $F$ , essendo  $c_j^{\inf} \leq c_j \in C_j$ , ed essendo il primo argomento indipendente dai valori  $c_1, \dots, c_{i^*-1}, c_{i^*+1}, \dots, c_n$ , segue che:

$$F(c_{i^*}^*, c_{i^*}^* x_{i^*}^* + \sum_{j \neq i^*} c_j x_j) \leq F(c_{i^*}^*, c_{i^*}^* x_{i^*}^* + \sum_{j \neq i^*} c_j^{\inf} x_j), \forall c_j \in C_j \quad (2.9)$$

quindi:

$$\max_{c, y} F(c^T y, c^T x) = \max_{c_j \in C_j} F(c_{i^*}^*, c_{i^*}^* x_{i^*}^* + \sum_{j \neq i^*} c_j x_j) = F(c_{i^*}^*, c_{i^*}^* x_{i^*}^* + \sum_{j \neq i^*} c_j^{\inf} x_j) \quad (2.10)$$

Per individuare il valore di  $i^*$  è sufficiente determinare il massimo dei seguenti  $n$  problemi:

$$\max_{c_i \in C_i} F(c_i, c_i x_i + \sum_{j \neq i} c_j^{\inf} x_j) \quad i = 1, \dots, n; \quad (2.11)$$

il valore  $i^*$  è calcolato come:

$$i^* = \arg \max_i \{ \max_{c_i \in C_i} F(c_i, c_i x_i + \sum_{j \neq i} c_j^{\inf} x_j) \} \quad (2.12)$$

Pertanto, il vettore ottimo  $c^*$  ha tutte le componenti uguali all'estremo inferiore dell'intervallo, tranne una, l' $i^*$ -esima, che può assumere anche un valore interno al relativo intervallo  $C_{i^*}$ .

La seguente proprietà, di immediata verifica, fornisce una condizione sufficiente tale per cui  $c_{i^*}^* = c_{i^*}^{\sup}$ .



*Proprietà 3:* detta  $G(c_i) = F(c_i, c_i x_i + \sum_{j \neq i} c_j^{\text{inf}} x_j)$ , se  $\frac{dG(c_i)}{dc_i} \geq 0$ , allora

$$r^{\text{sup}}(x) = \max_i F(c_i^{\text{sup}}, c_i^{\text{sup}} x_i + \sum_{j \neq i} c_j^{\text{inf}} x_j) \quad (2.13)$$

Valgono inoltre le seguenti:

**Proposizione 4:** sia  $F(a,b)$  tale per cui  $F(a+d, b+e) \geq F(a,b) \quad \forall d > e \geq 0$ .

Allora:

$$r^{\text{sup}}(x) = \max_i F(c_i^{\text{sup}}, c_i^{\text{sup}} x_i + \sum_{j \neq i} c_j^{\text{inf}} x_j) \quad (2.13)$$

*Dimostrazione:* infatti, sia  $i^*$  definito come in (2.13) e sia  $c_{i^*}^*$  il corrispondente

massimante, dato da  $c_{i^*}^* = \arg \max_{c_{i^*}} F(c_{i^*}, c_{i^*} x_{i^*} + \sum_{j \neq i^*} c_j^{\text{inf}} x_j)$ .

Si supponga per assurdo che  $c_{i^*}^* < c_{i^*}^{\text{sup}}$ ; per quanto detto nella proposizione 1,

deve essere  $c^* = (c_1^{\text{inf}}, \dots, c_{i^*-1}^{\text{inf}}, c_{i^*}^*, c_{i^*+1}^{\text{inf}}, \dots, c_n^{\text{inf}})$ . Siccome  $c_i \leq c_i^{\text{sup}} \quad \forall i$ , ed essendo  $d x_i \leq d$ , risulta:

$$F(c_i + d, c_i x_i + d x_i + \sum_{j \neq i} c_j^{\text{inf}} x_j) \geq F(c_i, c_i x_i + \sum_{j \neq i} c_j^{\text{inf}} x_j), \quad \forall i \quad (2.14)$$

Posto  $d = (c_{i^*}^{\text{sup}} - c_{i^*}^*)$ ,  $e = d x_i$ , segue:

$$F(c_{i^*}^{\text{sup}}, c_{i^*}^{\text{sup}} x_i + \sum_{j \neq i} c_j^{\text{inf}} x_j) = F(c_{i^*}^* + (c_{i^*}^{\text{sup}} - c_{i^*}^*), c_{i^*}^* x_i + \sum_{j \neq i} c_j^{\text{inf}} x_j + (c_{i^*}^{\text{sup}} - c_{i^*}^*) x_i) =$$

$$= F(c_{i^*}^* + d, c_{i^*}^* x_i + \sum_{j \neq i} c_j^{\text{inf}} x_j + e) \geq F(c_{i^*}^*, c_{i^*}^* x_i + \sum_{j \neq i} c_j^{\text{inf}} x_j) \quad (2.15)$$

Ne segue che  $c_{i^*}^*$  non può essere il massimante, da cui la tesi.

L'ipotesi indicata nella proposizione 4 può essere sostituita da una diversa condizione sulla funzione  $F$ , in modo da ottenere lo stesso risultato per l'estremo superiore della funzione *regret*.

**Proposizione 5:** sia  $F(a,b)$  derivabile parzialmente e tale che

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial a} > \left| \frac{\partial F(a,b)}{\partial b} \right|. \text{ Allora}$$

$$r^{\text{sup}}(x) = \max_i F(c_i^{\text{sup}}, c_i^{\text{sup}} x_i + \sum_{j \neq i} c_j^{\text{inf}} x_j) \quad (2.16)$$

*Dimostrazione:* per dimostrare la (2.16) si deve calcolare il

$$\max_{c_i \in C_i} F(c_i, c_i x_i + \sum_{j \neq i} c_j^{\text{inf}} x_j) \quad (2.17)$$

A tale scopo, si osservi che il differenziale totale della funzione  $F$  rispetto a  $c_i$ :

$$\frac{d}{dc_i} F(c_i, c_i x_i + \sum_{j \neq i} c_j^{\text{inf}} x_j) = \frac{\partial F}{\partial a} \cdot \frac{da}{dc_i} + \frac{\partial F}{\partial b} \cdot \frac{db}{dc_i} = \frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b} \cdot x_i \geq \frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b} \quad (2.18)$$

essendo  $x_i \in [0,1]$ . Inoltre con le ipotesi fatte sulle derivate parziali di  $F$ , la (2.18)

è positiva ed il massimo della funzione  $F$  si ottiene per  $c_i = c_i^{\text{sup}}$ .

E' agevole verificare che le ipotesi della proposizione 5 implicano quelle della proprietà 3.

### 3. Formulazione di problemi di selezione di portafoglio

#### 3.1. Alcuni modelli della letteratura

Il problema di selezione di portafoglio è stato affrontato nella letteratura tradizionale impiegando il classico modello di Markowitz. Recentemente, sono stati proposti dei modelli alternativi che non si basano sulla programmazione stocastica, ma sulla programmazione matematica fuzzy oppure sulla programmazione lineare possibilistica.

In Tanaka-Guo-Türksen (2000) viene studiato il seguente problema di portafoglio con *probabilità fuzzy*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min x^T Vx \\ x \\ x^T a = m_p \\ x^T e = 1 \\ x \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

dove  $x$  è il vettore delle  $n$  quote di portafoglio,  $a$  è il vettore delle medie ponderate fuzzy e  $V$  è la matrice di varianze e covarianze ponderate fuzzy, definite come segue:

$$a_i = \frac{\sum_{k=1}^m h_k r_{ki}}{\sum_{k=1}^m h_k}, \quad v_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^m (r_{ki} - a_i)(r_{kj} - a_j) h_k}{\sum_{k=1}^m h_k}$$

in cui  $m$  è il numero dei dati a disposizione,  $h_k$  è un *grado di possibilità* rappresentante la similarità tra il futuro stato del mercato e lo stato dei dati disponibili per il  $k$ -esimo set di dati ed  $r_{ki}$  è il rendimento storico dell' $i$ -esimo

titolo azionario per il  $k$ -esimo set di dati. In analogia al caso classico si ottiene la frontiera efficiente fuzzy.

Un secondo problema di portafoglio analizzato in Tanaka-Guo-Türksen (2000) è il seguente problema di programmazione quadratica che minimizza lo *spread* del rendimento di possibilità.

$$\begin{cases} \min_x x^T D x \\ x^T b = m_p \\ x^T e = 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

in cui si assume che i rendimenti dei titoli siano governati da una distribuzione di possibilità con parametri  $b$  e  $D$  ottenuti applicando l'analisi delle componenti principali. Anche in questo caso si ottiene una frontiera efficiente di possibilità.

Interessante è il fatto che lo *spread* del rendimento di un portafoglio di possibilità è maggiore della varianza del rendimento di un portafoglio di possibilità fuzzy, per cui i modelli di possibilità offrono portafogli efficienti che, a parità di rendimento medio, sono più rischiosi di quelli forniti dai modelli con probabilità fuzzy.

Nel lavoro di Inuiguchi-Tanino (2000), viene presentato un problema di selezione di portafoglio basato sulla programmazione possibilistica, introducendo il concetto di *regret* al fine di ottenere un portafoglio efficiente diversificato. Il problema è formulato come segue:

$$\begin{cases} \min_x R(x) \\ x^T e = 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

dove il *regret*  $R(x)$  è una variabile possibilistica, con una definita distribuzione di possibilità, data dalla massimizzazione, rispetto al vettore  $c$  dei tassi di rendimento, con una assegnata distribuzione di possibilità, della funzione *regret*  $r(x;c)$ . La soluzione ottima trovata corrisponde ad un investimento diversificato, come nel modello classico di Markowitz e a differenza della maggior parte degli approcci di programmazione possibilistica precedentemente proposti in cui i portafogli ottimi concentrano l'investimento in un unico titolo.

Anche in Inuiguchi-Ramik (2000) si pongono a confronto più modelli di selezione di portafoglio che utilizzano sia la programmazione stocastica (modello di Markowitz, modello di Kataoka, modello del rischio minimo) che la programmazione matematica fuzzy e possibilistica (modello dello spread minimo, modello frattile, modello di *modality* e modello del *minimax regret*), pervenendo ad analoghe considerazioni sulla diversificazione dei portafogli efficienti.

Il criterio del *minimax regret* può essere visto come un possibile approccio alternativo per la risoluzione di problemi di programmazione lineare a coefficienti intervallari. A questo proposito, in Inuiguchi-Sakawa (2000) viene affrontato un problema di *minimax regret*, in cui la funzione *regret*  $r(x;c)$  è data da

$$r(x;c) = \max_{y: Ay \leq b} (cy - cx),$$

dove  $c$  è un vettore di variabili intervallari, e rappresenta la differenza tra il valore ottimo della funzione obiettivo  $cy^*$  e il vero valore della funzione obiettivo  $cx$ . Per ogni vettore  $x$ , il caso peggiore si realizza quando la funzione *regret* è massimizzata rispetto a  $c$ : si può perciò definire la funzione  $R(x)$  come:

$$R(x) = \max_c r(x;c)$$

Il problema di programmazione lineare può essere quindi formulato in termini di minimizzazione del massimo *regret*:

$$\min_x R(x) = \min_x \max_{c,y} (cy - cx) \quad (3.4)$$

In questo lavoro vengono dimostrati alcuni risultati teorici riguardanti le soluzioni di questo problema; in particolare, si prova che le soluzioni ottime del problema (3.4) si ottengono quando i coefficienti intervallari  $c$  assumono o il valore minimo o il valore massimo del proprio intervallo. Inoltre, sotto determinate ipotesi, la soluzione ottima del problema di *minimax regret* esiste sempre e non è necessariamente un punto estremo della regione ammissibile.

### 3.2. Il modello proposto

Nel presente lavoro si affronta un problema di selezione di portafoglio in cui si minimizza l'estremo superiore dell'intervallo cui appartiene la variabile intervallare *regret*, come definito nella (2.7):

$$\min_{x \in X} \{ \max_i \{ \max_{c_i \in C_i} F(c_i, c_i x_i + \sum_{j \neq i} c_j^{\inf} x_j) \} \} \quad (3.5)$$

Si osservi che questo problema è analogo a quello presentato in Inuiguchi-Tanino (2000) per quanto riguarda la formulazione che impiega il criterio del *minimax regret*, ma si differenzia per il fatto che i coefficienti della funzione obiettivo sono variabili intervallari. D'altra parte si può notare che anche in Inuiguchi-Sakawa (2000) viene impiegata una funzione lineare per il *regret* come in uno dei casi particolari che verranno descritti al paragrafo 4.

Qualora valessero le ipotesi di una tra le due proposizioni 4 oppure 5, il problema (3.5) può essere formulato nel modo seguente:

$$\min_{x \in X} \{ \max_i \{ F(c_i^{\sup}, c_i^{\sup} x_i + \sum_{j \neq i} c_j^{\inf} x_j) \} \} \quad (3.6)$$

ovvero, ponendo  $H_i(x) = c_i^{\text{sup}} x_i + \sum_{j \neq i} c_j^{\text{inf}} x_j$  :

$$\min_{x \in X} \{ \max_i F(c_i^{\text{sup}}, H_i(x)) \} \quad (3.7)$$

Poiché il primo argomento di  $F$  non dipende da  $x$  e la funzione  $F$  è decrescente nel secondo argomento, il minimo di  $F$  rispetto ad  $x$  si ottiene quando la funzione  $H_i(x)$  è massima. Pertanto, il problema (3.7) è equivalente ai seguenti  $n$  sottoproblemi di ottimizzazione, con funzione obiettivo lineare:

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} F(c_i^{\text{sup}}, H_i(x)) &\Leftrightarrow \max_{x \in X} H_i(x) \\ F(c_i^{\text{sup}}, H_i(x)) &\geq F(c_j^{\text{sup}}, H_j(x)) \quad \forall j \neq i, j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.8)$$

e quindi il punto di minimo del problema (3.7) si ottiene calcolando il minimo dei valori ottimi degli  $n$  sottoproblemi (3.8).

#### 4. Alcuni casi particolari

Può essere interessante analizzare alcune forme funzionali particolari del *regret*; il caso più semplice che soddisfa l'ipotesi della proposizione 4 è quello in cui la  $F$  è una funzione lineare. Il secondo caso che sarà presentato riguarda una funzione lineare frazionaria che, se da un lato rappresenta una situazione più realistica, dall'altro non soddisfa né l'ipotesi della proposizione 4, né quella della proposizione 5, bensì quella della proprietà 3.

### Caso lineare (n = 2)

Si considerino due titoli i cui prezzi appartengano agli intervalli  $c_1 \in [c_1^{\text{inf}}, c_1^{\text{sup}}]$  e  $c_2 \in [c_2^{\text{inf}}, c_2^{\text{sup}}]$ . Per la proposizione 4 si deve risolvere il seguente problema di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \max \{ & F(c_1^{\text{sup}}, c_1^{\text{sup}} x_1 + c_2^{\text{inf}} x_2), F(c_2^{\text{sup}}, c_2^{\text{sup}} x_2 + c_1^{\text{inf}} x_1) \} \\ & x_1 + x_2 = 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Posto  $x = x_1 = 1 - x_2$  tale problema si scrive anche nel modo seguente:

$$\min_{x \in [0,1]} \max \{ K_1(x), K_2(x) \} \quad (4.2)$$

dove

$$\begin{aligned} K_1(x) &= F(c_1^{\text{sup}}, c_1^{\text{sup}} x_1 + c_2^{\text{inf}} x_2) = F(c_1^{\text{sup}}, (c_1^{\text{sup}} - c_2^{\text{inf}})x + c_2^{\text{inf}}) \\ K_2(x) &= F(c_2^{\text{sup}}, c_2^{\text{sup}} x_2 + c_1^{\text{inf}} x_1) = F(c_2^{\text{sup}}, (c_1^{\text{inf}} - c_2^{\text{sup}})x + c_2^{\text{sup}}) \end{aligned}$$

Posto  $F(a, b) = a - b$  allora  $K_1, K_2$  diventano, rispettivamente:

$$K_1(x) = (c_2^{\text{inf}} - c_1^{\text{sup}})x + (c_1^{\text{sup}} - c_2^{\text{inf}})$$

$$K_2(x) = (c_2^{\text{sup}} - c_1^{\text{inf}})x$$

Per la condizione (2.6), la funzione  $K_1$  ha coefficiente angolare negativo, mentre  $K_2$  ha coefficiente angolare positivo. Ne segue che il punto di ottimo  $x^*$  si ottiene dall'intersezione di  $K_1$  e  $K_2$ :

$$(c_2^{\text{inf}} - c_1^{\text{sup}})x^* + (c_1^{\text{sup}} - c_2^{\text{inf}}) = (c_2^{\text{sup}} - c_1^{\text{inf}})x^*$$

da cui



$$x^* = \frac{c_2^{\text{inf}} - c_1^{\text{sup}}}{c_2^{\text{inf}} - c_1^{\text{sup}} - c_2^{\text{sup}} + c_1^{\text{inf}}}$$

Ad esempio ponendo  $c_1^{\text{inf}} = 2, c_1^{\text{sup}} = 10, c_2^{\text{inf}} = 4, c_2^{\text{sup}} = 12$  si ottiene un portafoglio diversificato investendo  $x^* = 3/8$  e  $1 - x^* = 5/8$ . La figura 1 evidenzia la funzione massimo tra  $K_1$  e  $K_2$  ed il suo punto di minimo.

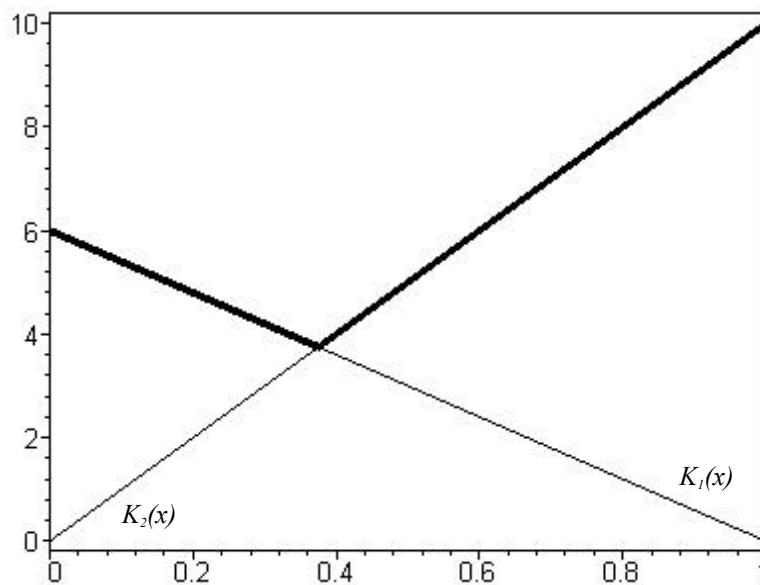


Figura 1

#### 4.1. Caso lineare ( $n > 2$ )

Qualora ci siano più di due titoli, il problema di portafoglio può essere formulato come segue:

$$\min_{x \in X} \max_i F(c_i^{\text{sup}}, c_i^{\text{sup}} x_i + \sum_{j \neq i} c_j^{\text{inf}} x_j) \quad (4.3)$$

Posto  $K_i(x) = F(c_i^{\text{sup}}, c_i^{\text{sup}} x_i + \sum_{j \neq i} c_j^{\text{inf}} x_j)$  e  $F(a, b) = a - b$ , il problema (4.3)

diventa:

$$\min_{x \in X} \max_i K_i(x) = \sum_{j \neq i} (c_i^{\text{sup}} - c_j^{\text{inf}}) x_j \quad (4.4)$$

che può essere scomposto in  $n$  sottoproblemi di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} & \min_{x \in X} K_i(x) \\ & K_i(x) \geq K_j(x) \quad \forall j \neq i, j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

La soluzione ottima è il minimo dei valori ottimi trovati.

#### 4.2. Caso lineare frazionario ( $n = 2$ )

Si considerino due titoli i cui prezzi appartengano agli intervalli  $c_1 \in [c_1^{\text{inf}}, c_1^{\text{sup}}]$  e  $c_2 \in [c_2^{\text{inf}}, c_2^{\text{sup}}]$  ed una funzione  $F$  definita come segue  $F(a, b) = \frac{a}{b} - 1$ . Si noti che tale funzione soddisfa l'ipotesi della proprietà 3, ma non le ipotesi delle proposizioni 4 e 5. Il problema di ottimizzazione quindi diventa:

$$\begin{aligned} & \min_{x_1, x_2} \max \{ F(c_1^{\text{sup}}, c_1^{\text{sup}} x_1 + c_2^{\text{inf}} x_2), F(c_2^{\text{sup}}, c_2^{\text{sup}} x_2 + c_1^{\text{inf}} x_1) \} \\ & x_1 + x_2 = 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ponendo  $x_1 = x, x_2 = 1 - x$  ed essendo  $F(a, b) = \frac{a}{b} - 1$ , il problema (4.5) può scriversi come segue:

$$\min_{x \in [0,1]} \max \left\{ \frac{c_1^{\sup}}{x(c_1^{\sup} - c_2^{\inf}) + c_2^{\inf}} - 1, \frac{c_2^{\sup}}{x(c_1^{\inf} - c_2^{\sup}) + c_2^{\sup}} - 1 \right\} \quad (4.6)$$

Si può dimostrare che la soluzione ottima  $x^*$  del problema (4.6) si può ottenere risolvendo i seguenti due problemi di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} & \max_{x \in [0,1]} (c_1^{\sup} - c_2^{\inf})x + c_2^{\inf} \\ & [c_1^{\sup}(c_1^{\inf} - c_2^{\sup}) - c_2^{\sup}(c_1^{\sup} - c_2^{\inf})]x + (c_1^{\sup}c_2^{\sup} - c_2^{\sup}c_2^{\inf}) \geq 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

e

$$\begin{aligned} & \max_{x \in [0,1]} (c_1^{\inf} - c_2^{\sup})x + c_2^{\sup} \\ & [c_2^{\sup}(c_1^{\sup} - c_2^{\inf}) - c_1^{\sup}(c_1^{\inf} - c_2^{\sup})]x + (c_2^{\sup}c_2^{\inf} - c_1^{\sup}c_2^{\sup}) \geq 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ad esempio ponendo, come nel caso particolare del paragrafo 4.1,  $c_1^{\inf} = 2$ ,  $c_1^{\sup} = 10$ ,  $c_2^{\inf} = 4$ ,  $c_2^{\sup} = 12$  si ottiene un portafoglio diversificato investendo  $x^* = 18/43$  e  $1 - x^* = 25/43$ .

Nel caso in cui si disponga di più di 2 titoli, si può mostrare, analogamente al caso lineare, che il problema di portafoglio si risolve impostando  $n$  problemi di programmazione lineare.

## **Conclusioni**

Il metodo del *regret*, ben noto nel contesto della Teoria delle Decisioni e della Ricerca Operativa (ad esempio per la soluzione di problemi di analisi multicriterio), costituisce un'interessante metodologia di analisi decisionale.

Per quanto nella letteratura finanziaria sia stato scarsamente utilizzato, e principalmente in un contesto fuzzy, nel presente lavoro si è formalizzato un problema di *minimax regret* nel contesto della teoria del portafoglio, nel quale i prezzi dei titoli sono rappresentati da variabili intervallari. Uno dei risultati ottenuti afferma che, per ogni funzione  $F$  che soddisfi alcune opportune condizioni, il problema di selezione di portafoglio con prezzi intervallari può essere affrontato risolvendo tanti problemi di ottimizzazione con funzione obiettivo lineare e vincoli non lineari, quanti sono i titoli in esame. Inoltre si è visto come le soluzioni efficienti forniscano dei portafogli che sono diversificati. L'approccio proposto appare un'interessante alternativa all'approccio tradizionale con cui si affrontano problemi di selezione di portafoglio. Se da un lato la funzione *regret* sembra condensare tutte le informazioni necessarie, d'altro lato il prezzo da pagare consiste nella necessità di identificare tale funzione con opportuni metodi.

## **Bibliografia**

- Alefeld, G., Mayer G. (2000), "Interval Analysis: theory and applications", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 121, 421-464.
- Chinneck J.W., Ramadan K. (2000), "Linear programming with interval coefficients", *Journal of the Operational Research Society*, 51, 209-220.

- Inuiguchi M., Ramik J. (2000), "Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem", *Fuzzy Sets and Systems*, 111, 3-28.
- Inuiguchi M., Sakawa M. (1995), "Minimax regret solution to linear programming problems with an interval objective function", *European Journal of Operational Research*, 86, 526-536.
- Inuiguchi M., Tanino T. (2000), "Portfolio selection under independent possibilistic information", *Fuzzy Sets and Systems*, 115, 83-92.
- Tanaka H., Guo P., Türksen I.B. (2000), "Portfolio selection based on fuzzy probabilities and possibilities distributions ", *Fuzzy Sets and Systems*, 111, 387-397.