MODELLI DI FIRST PASSAGE TIME PER IL RISCHIO DI CREDITO

Martina NARDON
E-mail: mnardon@unive.it
Dipartimento di Matematica Applicata
Università Ca' Foscari di Venezia

ABSTRACT - Il rischio di credito rappresenta uno dei fattori cruciali nella determinazione dei prezzi e dei rendimenti delle attività finanziarie. Sebbene gli effetti del rischio di credito sulla valutazione dei titoli obbligazionari siano già da lungo tempo oggetto di indagine, lo sviluppo di modelli analitici per lo studio e la quantificazione di tali effetti è relativamente recente.
In questo contributo l'attenzione viene principalmente rivolta al problema della valutazione di titoli obbligazionari che incorporano rischio di credito. In particolare, si studiano modelli che caratterizzano l'epoca in cui si manifesta l'insolvenza mediante il tempo di primo passaggio attraverso una frontiera di un opportuno processo stocastico che descrive, ad esempio, il valore delle attività dell'ente emittente. La frontiera di *default* può essere assunta costante oppure funzione deterministica del tempo o, ancora, essere governata da un processo stocastico. Verranno presentati alcuni modelli di *first passage time* proposti in letteratura nell'ambito dei modelli strutturali per il rischio di credito. Tali modelli si differenziano tra loro per le diverse assunzioni inerenti alla specificazione di tre elementi cruciali: la variabile (aleatoria) che descrive la perdita in caso di insolvenza, l'evento *default* e le dinamiche che governano i tassi di interesse *default-free*.

KEYWORDS - *Defaultable bonds*, modelli strutturali, *first passage time*, frontiera di *default*, probabilità di *default*.

1 INTRODUZIONE

Il rischio di credito è uno dei rischi di mercato più analizzati e di difficile quantificazione. Tradizionalmente il problema è stato affrontato mediante l'applicazione di metodi attuariali basati su dati storici. Tuttavia la rapida crescita nei mercati finanziari delle attività e dei titoli derivati, in particolare dei derivati trattati nei mercati *over the counter* e dei *derivati creditizi*, nonché l'elevato livello di sofisticazione di alcuni strumenti finanziari, hanno evidenziato l'inadeguatezza dei metodi tradizionali nel valutare in modo adeguato i rischi conseguenti.

In prima istanza, il rischio di credito può essere definito come l'eventualità che una delle parti di un contratto non onori gli obblighi di natura finanziaria assunti, causando una perdita per la controparte creditrice (si veda Ammann (2001)). Tale definizione contempla solamente il caso estremo in cui il debitore si rende insolvente. Ma una perdita di valore della posizione creditoria può derivare anche da un deterioramento delle condizioni economico-finanziarie del debitore da cui dipende la possibilità di far fronte agli impegni finanziari, pur non divenendo insolvente. In un'accezione meno semplificata, per rischio di credito si intende allora la possibilità che da una variazione inattesa del merito creditizio di un debitore derivi una variazione inattesa del valore del credito. I *ratings* forniti, ad esempio, dalle note agenzie Standard & Poor's e Moody's rappresentano una stima del merito creditizio delle imprese e dei paesi.

Esistono quindi diverse accezioni di rischio di credito[1], che distinguono l'eventualità in cui la perdita creditizia si manifesti solo in seguito all'insolvenza del debitore (*default-mode paradigm*), dal caso in cui la variazione del valore dell'esposizione derivi dal deterioramento del merito creditizio della controparte, trattando l'insolvenza come evento estremo (*mark-to-market*, o *mark-to-model*, *paradigm*).

Gli strumenti finanziari soggetti al rischio di credito si possono distinguere essenzialmente in due categorie: titoli di debito e posizioni fuori bilancio. Tra i primi annoveriamo: i titoli di stato (*treasury bonds*), emessi da paesi emergenti, i titoli di debito emessi da altri enti pubblici, le obbligazioni emesse da società private (*corporate bonds*), qualsiasi forma di finanziamento concessa alle aziende, i mutui e, in generale, il credito al consumo (vendite rateali, carte di credito, ecc.). Tra le posizioni fuori bilancio rientrano: i titoli derivati trattati nei mercati regolamentati[2], i titoli derivati trattati nei mercati *over the counter* per i quali esiste il rischio di controparte, i titoli derivati la cui attività sottostante comporta rischio di credito (ad esempio, opzioni emesse su obbligazioni) e, infine, i derivati creditizi.

Una questione cruciale è la determinazione del valore equo (*fair value*) di un'obbligazione soggetta al rischio di credito. Gli strumenti utilizzati a tal fine sono i modelli per il rischio di insolvenza e per la variazione del merito creditizio. In alternativa, noto il valore di mercato di un'obbligazione (o il livello dei tassi), ci si potrebbe chiedere cosa si può dedurre sulla probabilità di insolvenza[3].

In letteratura si possono individuare fondamentalmente due diversi approcci alla misurazione del rischio di credito: approcci *model-based*, tra cui si possono distinguere i *modelli strutturali* e i *modelli in forma ridotta*, e approcci tradizionali (o *non model-based*), basati sui dati storici delle insolvenze.

I *modelli strutturali* si possono a loro volta suddividere in:

- *firm-value models*, basati sull'evoluzione del valore dell'attivo (e quindi sulla struttura patrimoniale) della società emittente e sulla teoria della valutazione delle opzioni finanziarie (Black e Scholes (1973) e Merton (1974));

[1] Per una discussione generale sull'argomento si rimanda al documento del Comitato di Basilea (1999).

[2] Sebbene il rischio di credito in tal caso sia molto meno rilevante, come ha osservato Amman (2001), esso è pur sempre esistente.

[3] È pratica diffusa inferire dai prezzi di mercato delle obbligazioni soggette a rischio di credito la probabilità di insolvenza.

- *first passage time models*, introdotti da Black e Cox (1976) (si veda anche Longstaff e Schwartz (1995)), che considerano la possibilità di *default* prima della scadenza del debito, se il valore dell'attivo scende al di sotto di un certo livello (*threshold* o *default boundary*).

I *modelli in forma ridotta* o *intensity-based models* (si vedano, tra gli altri, i contributi di Jarrow e Turnbull (1995), Jarrow, Lando e Turnbull (1997) e Duffie e Singleton (1999)), rappresentano un approccio recente al rischio di credito che consiste nell'elaborazione di modelli che trattano l'insolvenza come evento completamente esogeno, non dipendente dalla struttura patrimoniale della società o del Paese in esame. Tali modelli sono basati sulla specificazione di un processo esogeno che governa l'evento default: tipicamente si assume che si tratti di un processo di Poisson e spesso si ipotizza che il tasso di recupero sia esogeno al modello.

In realtà la distinzione in due classi di modelli non è così netta; in letteratura sono stati proposti modelli *ibridi* che considerano elementi di entrambi gli approcci. Nei modelli strutturali il tasso di recupero (ovvero la frazione del prestito che verrà rimborsata ai creditori) è generalmente specificato dalla conoscenza della struttura patrimoniale, mentre nei modelli in forma ridotta viene spesso assegnato esogenamente. Tale caratterizzazione del tasso di recupero non pare tuttavia un elemento cruciale per differenziare i due approcci.

In un recente contributo, Jarrow e Protter (2004) osservano che le due classi di modelli non sono così diverse tra loro; l'elemento distintivo è dato dalla caratterizzazione dell'epoca in corrispondenza della quale si manifesta l'insolvenza (*default time*). Nei modelli strutturali si ipotizza di disporre della stessa informazione del *management* della società emittente. Nei modelli in forma ridotta, invece, si prescinde dalla conoscenza del valore di tutte le attività e passività della società: l'informazione disponibile è la stessa del mercato. Sotto questo punto di vista, Jarrow e Protter ritengono che i modelli in forma ridotta siano preferibili.

Come conseguenza del diverso insieme informativo di cui dispone chi costruisce un modello per il rischio di credito, si ha che nei modelli strutturali l'epoca del default è un tempo d'arresto *prevedibile*[4], mentre nei modelli in forma ridotta l'epoca in cui si manifesta l'insolvenza è un tempo d'arresto *totalmente inaccessibile*[5].

La trattazione che segue è dedicata all'analisi di alcuni modelli strutturali per la misurazione del rischio di credito. L'attenzione sarà principalmente rivolta al problema della valutazione di titoli obbligazionari che incorporano rischio di credito. In particolare, si studiano modelli che caratterizzano l'epoca in cui si manifesta l'insolvenza mediante il tempo di primo passaggio attraverso una frontiera di un opportuno processo stocastico che descrive, ad esempio, il valore delle attività dell'ente emittente. La frontiera di *default* può essere assunta costante oppure funzione deterministica del tempo o, ancora, essere governata da un processo stocastico. Verranno presentati alcuni modelli di *first passage time* proposti in letteratura. Tali modelli si differenziano tra loro per le diverse assunzioni inerenti alla specificazione di tre

[4]La definizione formale di tempo d'arresto prevedibile verrà data più avanti nel paragrafo dedicato ai modelli di *first passage time*.

[5]Si veda Protter (2004).

elementi cruciali: la variabile (aleatoria) che descrive la perdita in caso di insolvenza, l'evento *default* e le dinamiche che governano i tassi di interesse *default-free*.

Il presente lavoro è strutturato come segue. Il paragrafo 2 presenta sinteticamente il modello strutturale classico di Merton (1974). Nel paragrafo 3, dopo una breve introduzione ai modelli di *first passage time*, si analizzano alcuni modelli proposti in letteratura; in particolare, si studiano il modello Black e Cox (1976), in cui la frontiera di *default* viene assunta come una funzione esponenziale del tempo, un modello in cui la frontiera è assunta costante e il tasso di interesse *default-free* è governato da un processo stocastico (Longstaff e Schwartz (1995) e Cathcart ed El-Jahel (1998)) e, infine, un modello in cui sia la frontiera che il tasso di interesse sono stocastici (Saá-Requejo e Santa-Clara (1999) e Hsu et al. (2002)). Nel paragrafo 4 vengono presentati alcuni esempi numerici inerenti alla stima della probabilità di insolvenza mediante metodi numerici di tipo Monte Carlo e alla valutazione di obbligazioni soggette a rischio di credito, sotto le ipotesi di uno dei modelli presentati in precedenza. Infine, il paragrafo 5 riporta alcune considerazioni conclusive.

2 MODELLI STRUTTURALI

Si definiscono modelli strutturali o *firm-value models* i modelli per il rischio di credito basati sull'evoluzione del valore dell'attivo (quindi sulla conoscenza della struttura patrimoniale) di una società emittente e sulla teoria della valutazione di opzioni finanziarie. L'idea di applicare la teoria dell'*option pricing* (Black e Scholes (1973)) al problema della valutazione delle obbligazioni che incorporano rischio di credito risale ad un'intuizione di Merton (1974). Negli ultimi anni, tali idee sono state sviluppate in diverse direzioni[6]. Possono essere classificati come modelli strutturali anche i modelli cosiddetti di *first passage time*, che saranno oggetto di studio del paragrafo successivo; in questo paragrafo verrà brevemente analizzato l'approccio di Merton.

Si consideri un semplice prestito di ammontare nominale B con scadenza, ad esempio, tra un anno. Tale prestito può essere modellato come uno *zero-coupon bond* con scadenza fissa $T = 1$ e valore di rimborso B. Nel corso dell'anno la società (prenditrice dei fondi) investirà le somme ricevute in diversi progetti e attività. Sia A il processo (stocastico) che descrive il valore delle attività dell'azienda. Alla scadenza del prestito possono verificarsi due casi: il valore delle attività supera il valore del debito oppure è inferiore.

Se alla scadenza del prestito il valore delle attività è maggiore del valore nominale del prestito ($A_T \geq B$), la società sarà in grado di far fronte ai propri obblighi e avrà un incentivo a rimborsare il prestito. Se, invece, all'epoca T il valore di mercato dell'azienda è inferiore a B (cioè $A_T < B$), il prestito non sarà rimborsato e le attività saranno liquidate per ripagare parzialmente il debito.

[6] KMV, ad esempio, ha elaborato in questo filone un modello per la previsione dell'insolvenza denominato *Credit Monitor Model*™.

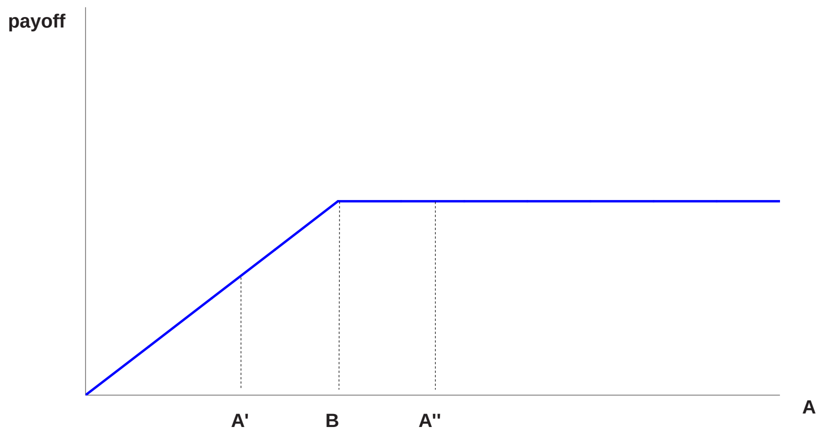

Figura 1: Payoff del prestatore di fondi al variare del valore delle attività.

Dal punto di vista del soggetto finanziatore si configurano due possibili alternative:

- se $A > B$ interessi e prestito saranno ripagati completamente;
- se $A \leq B$ i possessori delle obbligazioni subiranno delle perdite.

Alla scadenza del prestito il payoff del prestatore di fondi sarà dato da:

$$B + \min(A_T - B, 0) = B - \max(B - A_T, 0) = \min(A_T, B). \tag{1}$$

Si osservi che, poiché vi possono essere altri costi (diretti e indiretti) derivanti dal mancato pagamento del debito (*bankruptcy costs*), il soggetto prestatore di fondi subirà in genere una perdita maggiore rispetto ai soli interessi e alle somme erogate. Il suo payoff è analogo a quello del *writer* di un'opzione put, con prezzo di esercizio B e attività sottostante A (si veda a tal riguardo la figura 1).

Dalla teoria dell'*option pricing* si ha la ben nota formula per il valore di un'opzione put emessa su un titolo azionario, con prezzo di esercizio X:

$$p_t(S_t, X, T - t) \; = \; f(S_t, X, r, \sigma_S, \tau). \tag{2}$$

Il valore di un'opzione put scritta sull'attivo di una società, con prezzo di esercizio pari al valore nominale del debito è

$$p_t(A_t, B, T - t) \; = \; f(A_t, B, r, \sigma_A, \tau). \tag{3}$$

S_t, σ_S, X, B, r e τ sono variabili osservabili; r è il tasso di interesse privo di rischio assunto costante. $\tau = T - t$ è il tempo mancante alla scadenza del debito (*default horizon*). σ_S e σ_A sono, rispettivamente, le volatilità del valore di mercato delle azioni e del *valore di mercato dell'attivo*.

È importante notare che il valore di mercato dell'attivo A e la sua volatilità σ_A non sono direttamente osservabili. Se lo fossero, il valore del debito (soggetto a rischio di credito), il valore dell'opzione nell'equazione (3) e lo *spread* per i prestiti soggetti a rischio di credito rispetto al tasso *risk-free* potrebbero essere calcolati direttamente.

Le ipotesi alla base del modello di Merton (1974) sono le seguenti[7]:

- i mercati sono privi di attriti;
- assenza di opportunità di arbitraggio;
- il valore di mercato dell'attivo è governato da un processo stocastico $(A_t)_{t\geq 0}$ di tipo moto browniano geometrico;
- la struttura del capitale della società all'epoca t è descritta dalla seguente equazione[8]
$$A_t = E_t + D_t; \tag{4}$$
- $(E_t)_{t\geq 0}$ è il processo stocastico che descrive il valore di mercato del capitale proprio (moto browniano geometrico per assunzione);
- $(D_t)_{t\geq 0}$ è il processo che descrive il valore di mercato del debito modellato come uno *zero-coupon bond* con scadenza T e valore nominale B.

Dal punto di vista del soggetto finanziatore, si ha rischio di credito se e solo se

$$\mathbb{P}[A_T < B] > 0. \tag{5}$$

Se la probabilità di insolvenza è strettamente positiva, si ha

$$D_0 < Be^{-rT}. \tag{6}$$

La disequazione (6) deve valere necessariamente poiché chi presta dei fondi pretende una compensazione per il rischio di insolvenza della controparte. Tale *premio per il rischio* di credito può essere caricato implicitamente scontando il valore B ad un tasso maggiore al tasso applicato alle attività prive di rischio.

Il problema della copertura del rischio di credito è piuttosto controverso (si veda Cossin e Pirotte (2001)); il prestatore di fondi si può coprire (teoricamente) dal rischio di credito assumendo una posizione lunga su un'opzione put scritta sull'attività A, con prezzo di esercizio B e scadenza T. Il suo portafoglio sarà quindi costituito da un'opzione put europea e un bond di valore nominale B.

In ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio, all'epoca iniziale $t = 0$ il valore del portafoglio del prestatore è dato da

$$D_0 + p_0(A_0, B, r, \sigma_A, T) = Be^{-rT}. \tag{7}$$

Da cui deriva

$$D_0 = Be^{-rT} - p_0(A_0, B, r, \sigma_A, T). \tag{8}$$

[7] Sell'argomento, si veda, tra gli altri, Cossin e Pirotte (2001), capitolo 3.

[8] In particolare, si assume vi sia un unico debito in essere che scade all'epoca T.

Il valore iniziale del debito è dato dal valore attuale (calcolato in base al tasso r) del valore nominale del debito B meno il prezzo di un'opzione put europea utilizzata per coprirsi dal rischio di credito.

Diamo ora un'interpretazione del debito dal punto di vista della società prenditrice di fondi; questa assume una posizione lunga su una put europea scritta sul valore dell'attivo e con prezzo di esercizio B. Il payoff alla scadenza è dato da

$$\max(B - A_T, 0) - B. \tag{9}$$

Dal punto di vista della società, il valore del capitale proprio può essere descritto come una posizione corta su un'opzione call, scritta sul valore dell'attivo A, con prezzo di esercizio B e scadenza all'epoca T. Gli azionisti assumono, invece, una posizione lunga su un'opzione call europea il cui valore all'epoca iniziale è indicato con c_0,

$$E_0 = c_0(A_0, B, r, \sigma_A, T). \tag{10}$$

Dalle equazioni (4), (8) e (10) si ottiene

$$A_0 + p_0(A_0, B, r, \sigma_A, T) = c_0(A_0, B, r, \sigma_A, T) + Be^{-rT}, \tag{11}$$

ovvero la ben nota relazione di parità *put-call* per opzioni europee.

Osserviamo che azionisti (*shareholders*) e creditori (*bondholders*) hanno interessi chiaramente opposti: per i primi un aumento della volatilità dell'attivo comporta un aumento del valore dell'opzione call; per i secondi (che assumono un posizione *short* in un'opzione put) si configura la situazione opposta.

Un problema che emerge nell'applicazione del modello brevemente descritto consiste nella determinazione del valore di mercato e della volatilità dell'attivo che, come già notato, non sono grandezze direttamente osservabili (si veda, tra gli altri, il contributo di Ericsson e Reneby (2002)). Tali valori si possono ricavare dal valore di mercato delle azioni, qualora questo dato sia disponibile. Il valore di mercato del capitale proprio è osservabile ed è dato dalla *capitalizzazione di borsa*:

$$E_t = \textit{numero di azioni} \ \times \ \textit{valore di un'azione}. \tag{12}$$

Anche la volatilità σ_E è, in qualche modo, osservabile o stimabile.

In base alla nota formula di Black-Scholes, il valore corrente di mercato delle azioni E_0 (definito dall'equazione (10)) è dato da

$$E_0 = A_0\mathcal{N}(d_1) - Be^{-rT}\mathcal{N}(d_2), \tag{13}$$

dove

$$d_1 = \frac{\ln(A_0/B) + (r + \sigma_A^2/2)T}{\sigma_A\sqrt{T}}, \tag{14}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_A\sqrt{T}, \tag{15}$$

ed $\mathcal{N}(\,\cdot\,)$ è la funzione di ripartizione di una variabile casuale gaussiana standardizzata.

Le grandezze A_0 e σ_A non sono osservabili, ma si può dimostrare (date le ipotesi sull'evoluzione di A ed E) che vale la seguente relazione tra le volatilità dei due processi,

$$\frac{\sigma_E}{\sigma_A} = \frac{A_0}{E_0}\frac{\partial E}{\partial A}, \tag{16}$$

con $\partial E/\partial A = \mathcal{N}(d_1)$ (si vedano, tra gli altri, Cossin e Pirotte (2001) e Crosbie e Bohn (2003)).

Ne deriva che, per stimare A_0 e σ_A si devono risolvere simultaneamente le equazioni (13) e (16).

Nel modello di Merton, la probabilità di insolvenza (in un mondo neutrale verso il rischio) è data da $\mathcal{N}(-d_2)$, ovvero dalla probabilità dell'evento $\{A_T < B\}$.

Il modello presentato in questo paragrafo rappresenta una semplificazione estrema della realtà, in quanto si considera una struttura patrimoniale molto semplice, il tasso di interesse *risk-free* è assunto noto e costante, l'insolvenza può manifestarsi solo alla scadenza del prestito. In tale contesto si ottengono formule analitiche per la probabilità di default, il tasso di rendimento alla scadenza, i *credit spreads* e il valore di recupero. Nei modelli di *first passage time* tali ipotesi vengono rilassate. In particolare, si ammette che il default possa verificarsi prima dell'epoca T.

3 MODELLI DI FIRST PASSAGE TIME

Nel modello di Merton si ipotizza che l'insolvenza possa manifestarsi solo alla scadenza del prestito. Nei modelli di *first passage time* tale ipotesi viene rilassata per consentire il default in qualsiasi momento prima dell'epoca T. Si è già osservato come la diversa caratterizzazione dell'epoca in cui avviene il default sia un punto cruciale nella distinzione tra le due classi predominanti di modelli per il rischio di credito (si veda a tal riguardo Jarrow e Protter (2004)).

L'epoca in cui si verifica l'insolvenza verrà qui definita come il primo istante in corrispondenza del quale il valore di un dato processo, ad esempio il processo che descrive il valore delle attività dell'azienda debitrice, scende al di sotto di un certo livello (*threshold*) detto *default boundary* o *default barrier*. Tale frontiera di default[9] potrà essere assunta costante (come nel contributo di Longstaff e Schwartz (1995)), ovvero funzione del tempo (come in Black e Cox (1976) che considerano una frontiera esponenziale) o, ancora, descritta da un processo stocastico (come nel contributo di Saá-Requejo e Santa-Clara (1999)). L'interpretazione economica che si puà dare del superamento della frontiera di default è una qualche violazione di accordi contrattuali inerenti al prestito.

Formalmente, si consideri un modello a tempo continuo sull'orizzonte temporale $[0, \overline{T}]$. Sia dato uno spazio di probabilità munito di filtrazione $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), (\mathcal{F}_t;\, t \in [0, \overline{T}])\}$. L'informazione disponibile è descritta dalla filtrazione $(\mathcal{F}_t;\, t \in [0, \overline{T}])$.

Si consideri una società qualsiasi che prende a prestito dei fondi nella forma tecnica di uno *zero-coupon bond* (ZCB) che promette di pagare 1 euro alla scadenza T. Sia $v(t, T)$ il valore in $t \geq 0$ di un *defaultable zero-coupon bond* con scadenza

[9] Si osservi che nel modello di Merton la frontiera di default si riduce ad un singolo punto.

all'epoca T. Come nel paragrafo precedente, si assume che questa sia l'unica passività della società; si assume, inoltre, che siano negoziati *default-free zero-coupon bond* per tutte le scadenze.

Indichiamo con r il tasso di interesse a pronti *default-free*, senza fare, per il momento, alcuna assunzione sul processo che governa tale tasso.

Si assume, inoltre, assenza di opportunità di arbitraggio per i mercati delle obbligazioni (sia *defaultable* che *default-free*). Si assume, quindi, l'esistenza (non l'unicità) di una misura di martingala equivalente $\mathbb{Q}$.

Siano $(A_t)_{t\geq 0}$ il processo stocastico che descrive il valore dell'attivo e K_t il valore della frontiera di default all'epoca $t \in [0, T]$. Se si ammette che K_t possa essere aleatorio, l'insieme informativo all'epoca t sarà descritto dalla $\sigma-$algebra $\mathcal{F}_t = \sigma(A_u, K_u;\, u \leq t)$.

Un'altra assunzione importante riguarda il pagamento agli obbligazionisti del valore di recupero in caso di insolvenza. Si può assumere, ad esempio, che tali somme siano pari al valore della frontiera al momento del default, ma che vengano comunque pagate alla scadenza del debito.

Premettiamo alla discussione che segue le definizioni di tempo d'arresto e di tempo d'arresto prevedibile[10].

Definizione 1. *Dato uno spazio di probabilità munito di filtrazione* $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), (\mathcal{F}_t;\, t \in [0, \overline{T}])\}$, *si definisce* ***tempo d'arresto*** *una variabile aleatoria* τ *che assume valori non negativi e tale che l'evento* $\{\omega \in \Omega \,:\, \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, *per ogni* $t \in [0, \overline{T}]$.

Definizione 2. *Un tempo d'arresto* τ *è* ***prevedibile*** *se esiste una successione di tempi d'arresto* $(\tau_n)_{n\geq 1}$ *tale che* (τ_n) *è crescente,* $\tau_n \leq \tau$ *su* $\{\tau > 0\}$ *per ogni* n *e* $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = \tau$ *quasi certamente.*

Nei modelli di *first passage time*, l'epoca in cui si manifesta l'insolvenza (*default time*) è descritta da una variabile aleatoria che corrisponde al tempo di primo passaggio attraverso la frontiera di default. Formalmente,

$$t^* \,=\, \inf\{t \,:\, A_t \leq K_t\}. \tag{17}$$

L'epoca in cui si manifesta il default è un tempo d'arresto *prevedibile*[11]. Intuitivamente, un tempo d'arresto prevedibile è "noto" un istante prima della sua realizzazione. Poiché il processo che governa il valore dell'attivo è continuo, è possibile prevedere un attimo prima la violazione della frontiera di default. Il default può essere in qualche modo anticipato osservando le traiettorie del processo $(A_t)_{t\geq 0}$.

Se si assume che il valore di recupero sia pari al valore della frontiera al momento del default, allora il valore del *defaultable bond* sarà dato da

$$v(0, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\left(\mathbf{1}_{\{t^*\leq T\}} K_{t^*} + \mathbf{1}_{\{t^*>T\}} \cdot 1\right)\, e^{-\int_0^T r_u du}\right). \tag{18}$$

[10]Si vedano Karatzas e Shreve (1991) e Protter (2004).

[11]Jarrow e Protter (2004) osservano che tale proprietà non vale in generale se si ammette che il processo $(A_t)_{t\geq 0}$ presenti dei salti.

Nell'ipotesi in cui il processo A soddisfi l'equazione differenziale stocastica

$$dA_t = rA_t dt + \sigma A_t dW_t, \qquad A_0 > 0, \tag{19}$$

dove $\sigma > 0$, W è un moto browniano standard, il tasso di interesse r sia costante e si assume che la frontiera di default sia anch'essa costante e pari al livello K per ogni $t \in [0, T]$, allora l'espressione (18) può essere scritta in forma chiusa (si vedano anche Saá-Requejo e Santa-Clara (1999), Bielecki e Rutkowski (2002) e Jarrow e Protter (2004)) e si ottiene

$$v(0,T) = Ke^{-rT}\mathbb{Q}(t^* \leq T) + e^{-rT}[1 - \mathbb{Q}(t^* \leq T)], \tag{20}$$

dove

$$\mathbb{Q}(t^* \leq T) = \mathcal{N}(h_1(T)) + A_0 e^{1-2r/\sigma^2}\mathcal{N}(h_2(T)), \tag{21}$$

$$h_1(T) = \frac{-\log A_0 - (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{(T)}}, \tag{22}$$

$$h_2(T) = \frac{-\log A_0 + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{(T)}}, \tag{23}$$

e $\mathcal{N}(\,\cdot\,)$ è la funzione di ripartizione di una variabile normale standard.

In generale, non sono note soluzioni in forma chiusa per la probabilità di default $\mathbb{Q}(t^* \leq T)$. Nel caso in cui i tassi di interesse *default-free* siano stocastici, ma con volatilità deterministica del prezzo del bond, sono state proposte in letteratura delle soluzioni approssimate (si vedano, Hsu et al. (2002) e Durbin (1992) per l'approssimazione della probabilità di primo passaggio prima dell'epoca T). In tutti gli altri casi, Saá-Requejo e Santa-Clara (1999) e Hsu et al. (2002) suggeriscono che una stima della probabilità $\mathbb{Q}(t^* \leq T)$ può essere calcolata mediante la simulazione Monte-Carlo.

Oltre ai contributi già citati, altri metodi basati sullo studio del tempo di primo passaggio sono stati proposti da Kim et al. (1993), Shimko et al. (1993), Bryis e de Varenne (1997), Catchart ed El-Jahel (1998), Taurén (1999), Collin-Dufresne e Goldstein (2001) e Hui et al. (2003).

Osserviamo che altri autori studiano il problema della determinazione della struttura patrimoniale ottimale e della scelta da parte del *management* dell'epoca più favorevole in corrispondenza della quale dichiarare lo stato di insolvenza (per un approfondimento e l'indicazione di alcuni riferimenti bibliografici sull'argomento si veda, ad esempio, Bielecki e Rutkowski (2002)).

Nella trattazione che segue verranno analizzati alcuni modelli di *first passage time* proposti in letteratura.

3.1 Un modello con *default boundary* deterministica e tasso di interesse *default-free* costante

In questo paragrafo verrà brevemente presentato l'approccio di Black e Cox (1976), in cui gli autori estendono il modello di Merton per consentire il default prima della scadenza.

Oltre alle usuali assunzioni (mercati perfetti, assenza di costi di transazione, tassazione e costi di bancarotta), Black e Cox assumo che esista un tasso di interesse noto e costante r (tasso privo di rischio) e considerano un'unica emissione di titoli di puro sconto con scadenza all'epoca T e valore di rimborso F.

Il valore dell'azienda, V, è governato da un processo di tipo diffusivo (opportunamente neutralizzato per il rischio) a coefficienti costanti:

$$dV_t = (r - \delta)V_t dt + \sigma V_t dW_t, \tag{24}$$

dove δ è il tasso istantaneo di dividendo, $\sigma > 0$ e W è un processo di Wiener standard.

Il processo V può assumere valori molto elevati o scendere a livelli molto bassi, fino quasi ad annullarsi. In generale, vi possono essere delle barriere superiori o inferiori per V in corrispondenza delle quali si rende necessaria una riorganizzazione patrimoniale della società. Tali barriere (*reorganization boundaries*) possono essere date esogenamente, ad esempio per obblighi contrattuali assunti (*safety covenants*), oppure determinate endogenamente come parte della soluzione ottima di un problema decisionale. Esempi di barriere superiori sono le cosiddette *call provision*, mentre un esempio di barriera inferiore è la frontiera di default. Se il valore della società scende al di sotto di un dato livello (che può essere variabile nel tempo), i creditori (gli obbligazionisti) possono costringere la società a dichiarare lo stato di insolvenza.

L'epoca del default è una variabile aleatoria; la sua distribuzione è quella del tempo di primo passaggio di V attraverso una frontiera, che indichiamo con $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$,

$$t^* = \inf\{t \in [0, T) : V_t \le X_t\} = \inf\{t \in [0, T) : V_t = X_t\}. \tag{25}$$

La frontiera di default nel modello di Black e Cox (1976) viene definita mediante una funzione esponenziale del tipo:

$$X_t = Ke^{-\gamma(T-t)}, \tag{26}$$

dove K e γ sono dei parametri, con $K > 0$.

Il valore di recupero è dato dal valore della società all'epoca del default $V_{t^*} = X_{t^*}$

Sia $v(V, t, T)$ il valore del *corporate bond* all'epoca t; v dipende dal valore di V e soddisfa l'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 v}{\partial V^2} + (r - \delta)V \frac{\partial v}{\partial V} - rv + \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \tag{27}$$

con condizioni

$$\begin{aligned} v(V, T, T) &= \min(V, F), & (28)\\ v(X, t, T) &= Ke^{-\gamma(T-t)}. & (29) \end{aligned}$$

Sia $S(V, t, T)$ il valore di un'azione all'epoca t; S dipende dal valore V e soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 S}{\partial V^2} + (r - \delta)V \frac{\partial S}{\partial V} - rS + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \tag{30}$$

con condizioni

$$\begin{aligned} S(V,T,T) &= \max(V-F,0), && (31)\\ S(X,t,T) &= 0. && (32) \end{aligned}$$

Nel modello di Black e Cox la probabilità di default può essere calcolata analiticamente ed è data da

$$\begin{aligned} \Pi(t,T) \,=\, 1 \,-\, \mathcal{N}\left(\frac{\ln V_t/X_t + (r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) + \\ + \left(\frac{V_t}{X_t}\right)^{1-2(r-\delta-\gamma)/\sigma^2} \mathcal{N}\left(\frac{-\ln V_t/X_t + (r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \end{aligned} \qquad (33)$$

con $\tau = T-t$, $X_t = Ke^{-\gamma(T-t)}$.

$\Pi(t,T)$ è la probabilità che il processo V, il cui valore all'epoca t è V_t, con *drift* $(r-\delta)$ e volatilità σ, incontri la frontiera X (funzione esponenziale del tempo) prima della scadenza T.

Black e Cox ottengono una formula di valutazione per il bond $v(V,t,T)$[12]. In particolare, v risulta essere una funzione crescente di V e t, e decrescente in σ^2, r e δ.

Una scelta interessante della frontiera di default è

$$X_t = \rho F e^{-r(T-t)}, \qquad (34)$$

con $0 \leq \rho \leq 1$. La frontiera di default all'epoca t è pari ad una frazione del valore attuale di F (valore di rimborso alla scadenza del corporate bond). v risulta essere una funzione crescente e convessa del parametro ρ.

3.2 Un modello con *default boundary* costante e tasso di interesse *default-free* stocastico

L'ipotesi che, in un modello per la valutazione di titoli obbligazionari, il tasso di interesse r sia noto e costante è piuttosto forte. In questo paragrafo analizzeremo un modello (in particolare il modello di Cathcart ed El-Jahel (1998)) in cui la frontiera di default viene assunta costante, mentre si ammette che il tasso di interesse sia stocastico.

Longstaff e Schwartz (1995) propongono un modello in cui il valore delle attività V è governato da un processo di tipo moto browniano geometrico il cui drift, in un mondo neutralizzato per il rischio, dipende dal tasso di interesse *default-free* r; tale tasso è assunto stocastico e, in particolare, viene adottato il modello di Vasicek (1977). Nel modello di Longstaff e Schwartz la frontiera di default viene assunta costante e assegnata esogenamente. L'insolvenza si manifesta allora in corrispondenza del primo istante in cui V raggiunge tale frontiera. Infine, il valore di recupero è assunto costante e pari ad una frazione del valore di rimborso del titolo.

[12] Per i dettagli si rinvia al contributo di Black e Cox (1976).

Il modello, brevemente descritto nel seguito, presenta alcuni punti in comune con l'approccio di Longstaff e Schwartz (1995).

Cathcart ed El-Jahel (1998) propongono un modello per la valutazione di obbligazioni soggette al rischio di credito, in cui l'epoca del default coincide con il primo istante in corrispondenza del quale un dato processo che "segnala" il manifestarsi dell'insolvenza (*signaling process*) oltrepassa un certo livello.

Oltre alle usuali assunzioni[13] di mercati privi di attriti e perfettamente competitivi, in cui le negoziazioni avvengono a tempo continuo, non vi sono costi di transazione, né tassazione, né asimmetrie informative e gli investitori agiscono da *price takers*, si ipotizza quanto segue.

Sia X un processo a tempo continuo le cui dinamiche determinano il default (*signaling process*). Si assume che tale processo soddisfi l'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = \alpha X_t dt + \sigma_X X_t dW_t^X, \tag{35}$$

dove $X_0 > 0$, α e $\sigma_X > 0$ sono parametri costanti e W^X è un processo di Wiener standard.

Il processo X può rappresentare diverse grandezze quali, ad esempio, il valore delle attività dell'azienda, oppure puó descrivere un insieme di effetti (ad esempio, la liquidità dell'attivo). Cathcart ed El-Jahel osservano che il modello appare appropriato per descrivere il processo da cui dipende il default per soggetti che emettono titoli di debito, ma non hanno un insieme di attività agevolmente identificabile.[14]

A differenza dei modelli strutturali classici in cui il tasso di interesse viene assunto costante, Cathcart ed El-Jahel adottano il modello di Cox, Ingersoll e Ross (1985) (più brevemente denominato CIR nel seguito) per descrivere le dinamiche (adattate per il rischio) del tasso di interesse a pronti.

Nel modello CIR, il tasso *spot* r è governato da un processo stocastico che soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)\, dt + \sigma_r \sqrt{r_t}\, dW_t^r, \tag{36}$$

dove $r_0 > 0$, κ, θ e $\sigma_r > 0$ sono parametri costanti e W^r è un processo di Wiener standard. I parametri θ e κ rappresentano, rispettivamente, il valore medio di lungo periodo del tasso r e la velocità di aggiustamento a tale valor medio, mentre la varianza istantanea risulta proporzionale a r (si veda Cox, Ingersoll e Ross (1985)).

In tale contesto, il valore $p(t,T)$ di uno zero-coupon bond *default-free* all'epoca t, con scadenza all'epoca T è dato dalla formula

$$p(t,T) = A(\tau)\, e^{-B(\tau) r}, \tag{37}$$

dove $\tau = T - t$,

$$A(\tau) = \left[\frac{2\gamma e^{(\gamma+\kappa)\frac{\tau}{2}}}{2\gamma + (\gamma+\kappa)(e^{\gamma\tau} - 1)}\right]^{2\kappa\theta/\sigma^2} \tag{38}$$

$$B(\tau) = \frac{2(e^{\gamma\tau} - 1)}{2\gamma + (\gamma+\kappa)(e^{\gamma\tau} - 1)} \tag{39}$$

[13] Si vedano Black e Scholes (1973), Merton (1974), Black e Cox (1976).

[14] Si pensi al caso di obbligazioni emesse da paesi emergenti o altri enti pubblici territoriali (*municipal bonds*).

e

$$\gamma = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}. \tag{40}$$

Si assume, inoltre, che i due processi W^X e W^r siano non correlati[15].

Come in Longstaff e Schwartz (1995), Cathcart ed El-Jahel assumono che esista un certo livello (*lower threshold*) $\overline{X}$ al di sotto del quale si verifica il default. Quando il valore di X raggiunge la frontiera costante $\overline{X}$, la società fallisce (e può quindi essere messa in liquidazione oppure si ha una riorganizzazione, conformemente alle leggi in materia vigenti in un dato Paese) e risulta simultaneamente insolvente rispetto a tutte le posizioni debitorie in essere al momento del default.

I modi e i tempi in cui viene gestito il default nella pratica possono essere diversi; in una visione molto semplificata della realtà, in caso di fallimento segue una allocazione delle attività della società tra i creditori. L'ipotesi che Cathcart ed El-Jahel fanno (in linea con quanto assunto da Longstaff e Schwartz (1995) e spesso nei modelli in forma ridotta) è quella di tasso di recupero esogeno al modello. Più precisamente, si assume che se all'epoca $t < T$ il valore del processo X tocca la barriera $\overline{X}$, il creditore riceve la quantità $(1-w)$ di default-free zero-coupon bond con scadenza all'epoca T. La grandezza w (*writedown*) è assunta costante e $w \leq 1$; $wp(t,T)$ rappresenta allora la perdita in caso di insolvenza. Nella pratica il valore w può dipendere da molti fattori quali, ad esempio, la priorità, il rating, ecc.

Indichiamo con $v(X, r; t, T)$ il valore all'epoca $t < T$ di un *defaultable bond* (dipendente da X ed r) con scadenza all'epoca T o, equivalentemente, $v(X, r; \tau)$, dove $\tau = T - t$. v soddisfa la seguente equazione differenziale alle derivate parziali:

$$\alpha X \frac{\partial v}{\partial X} + \kappa(\theta - r)\frac{\partial v}{\partial r} + X^2 \frac{\sigma_X^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + r\frac{\sigma_r^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial 2^2} - \frac{\partial v}{\partial \tau} = rv, \tag{41}$$

con condizione finale (se non si è verificato il default prima della scadenza)

$$v(X, r; 0) = 1e \tag{42}$$

condizione al limite

$$v(\infty, r; \tau) = p(t, T). \tag{43}$$

In caso di default si ha $X_t = \overline{X}$,

$$v(\overline{X}, r; \tau) = (1 - w)p(t, T). \tag{44}$$

Inoltre, devono valere le condizioni

$$v(X, \infty; \tau) = 0, \tag{45}$$

$$v(X, r; \tau) < \infty \quad \text{per} \quad r \to 0. \tag{46}$$

Date le ipotesi del modello, il valore del *defaultable bond* è dato da

$$v(X, r; t, T) = p(t, T) - wp(t, T)f(X; \tau), \tag{47}$$

[15] Tale assunzione appare in linea con l'ipotesi di non correlazione tra il processo di *hazard rate* e il processo che governa i tassi di interesse nei modelli in forma ridotta. Altri autori osservano come i *credit spread* siano poco sensibili a variazioni del coefficiente di correlazione, mentre Longstaff e Schwartz (1995) osservano che una correlazione negativa tra i due processi ha come effetto una riduzione degli spread.

dove $p(t, T)$ è il valore di uno zero-coupon bond calcolato in base alle formule (37)–(40) nel modello CIR, $f(X; \tau)$ è la probabilità di default.

Se si definisce con

$$t_X^* = \inf\{t \geq 0 \, : \, X_t \leq \overline{X}\} \tag{48}$$

il tempo di primo passaggio attraverso la frontiera $\overline{X}$, allora $f(X; \tau)$ rappresenta la probabilità dell'evento $\{t_X^* \leq T\}$.

Nel modello di Cathcart ed El-Jahel la funzione $f(X; \tau)$ si ottiene dall'inversione di una trasformata di Laplace e viene calcolata mediante integrazione numerica[16].

Si può inoltre dimostrare che, in tale modello, il valore di un'obbligazione che paga cedole è pari al valore di un opportuno portafoglio di titoli di puro sconto.

Infine, i *credit spread* (*cs*) sono dati dalla seguente espressione:

$$cs = -\frac{\log\left[v(X, r; t, T)/p(t, T)\right]}{T - t} = -\frac{\log\left[1 - wf(X; \tau)\right]}{T - t}. \tag{49}$$

Si osservi che gli spread nell'espressione (49) non dipendono dal livello dei tassi *default-free*.

3.3 Un modello con *default boundary* stocastica e tasso di interesse *default-free* stocastico

L'approccio studiato in questa sezione è una generalizzazione del modello proposto inizialmente da Nielsen, Saá-Requejo e Santa-Clara (1993) e in seguito sviluppato da Saá-Requejo e Santa-Clara (1999). Nielsen, Saá-Requejo e Santa-Clara (1993) adottano il modello di Vasicek (1977) per descrivere le dinamiche del tasso spot default-free, mentre nei successivi contributi non viene specificata una particolare scelta del modello per la struttura a termine dei tassi.

Una caratteristica importante dell'approccio qui esaminato è la definizione della frontiera di default, K, che viene descritta da un particolare processo stocastico di tipo diffusivo che rappresenta il valore delle passività (o parte delle passività) in Saá-Requejo e Santa-Clara (1999) o, più in generale, il valore della società conseguente alla bancarotta (si veda Hsu et al. (2002)). Nella trattazione che segue si considera una società la cui struttura patrimoniale può comprendere una gamma di titoli con diversa scadenza, cedole e altri elementi contrattuali. Un'ipotesi realistica che viene generalmente adottata è quella di default simultaneo di tutte le posizioni debitorie in caso di violazione della frontiera di default.

Il tasso di perdita in caso di insolvenza w (o *writedown*) può essere una grandezza deterministica o una variabile aleatoria ($\mathcal{F}_T$-misurabile), non correlata con altri processi stocastici specificati nel modello. Si assume che, in caso di insolvenza, si riceve la quantità $1 - w$ di zero-coupon bond default-free, con uguale scadenza T. Tale assunzione permette di valutare un corporate bond indipendentemente da altri bond emessi dalla stessa società; ciò rende possibile la valutazione di obbligazioni che pagano delle cedole (mediante un portafoglio di zero-coupon bond), ma anche

[16] Per maggiori dettagli si rimanda al contributo di Cathcart ed El-Jahel (1998).

di strumenti finanziari più complessi emessi da società con una struttura patrimoniale maggiormente articolata rispetto alla semplice struttura assunta, ad esempio, in Merton (1974).

Il valore di un *defaultable* zero-coupon bond all'epoca t, con scadenza all'epoca T, può essere espresso come segue:[17]

$$\begin{aligned} v(t,T) &= \mathbb{E}_t\left[(1 - w\mathbf{1}_{\{t^* \leq T\}})e^{-\int_t^T r(u)du}\right] \\ &= p(t,T) - \mathbb{E}_t\left[w\mathbf{1}_{\{t^* \leq T\}}e^{-\int_t^T r(u)du}\right], \end{aligned} \tag{50}$$

dove $p(t,T)$ è il valore di un *default-free* zero-coupon bond, $w(T)$ è il tasso di perdita in caso di insolvenza, t^* è l'epoca in cui si manifesta il default, r è il tasso istantaneo default-free. Il valore atteso (condizionato all'informazione disponibile all'epoca t) è valutato in base ad una misura di probabilità aggiustata per il rischio, $\mathbb{Q}$. Per il momento, non vengono fatte assunzioni sulla dinamica dei tassi di interesse, né sulla correlazione tra il processo che determina il default e il processo che governa il tasso default-free. Nel seguito, tutti i processi saranno definiti in un mondo neutralizzato per il rischio.

Iniziamo ad analizzare il modello proposto da Saá-Requejo e Santa-Clara (1999).

Sia V il processo che descrive il valore delle attività di una data società emittente obbligazioni. Si assume che tale processo soddisfi la seguente equazione differenziale stocastica:

$$dV_t = (r_t - \delta_V)V_t dt + \sigma_V V_t dW_t^V, \qquad V_0 > 0, \tag{51}$$

dove $\sigma_V > 0$, è una costante, δ_V è il tasso istantaneo in base al quale sono remunerati gli azionisti; W^V è un processo di Wiener standard.

Il tasso di interesse *default-free*, r, è governato da un processo stocastico, dipendente da un processo di Wiener standard W^r, correlato con il processo W^V, con coefficiente di correlazione ρ_{rV}.

La frontiera di default è definita mediante un processo stocastico che soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica

$$\frac{dK_t}{K_t} = (r_t - \delta_K)dt + \sigma_{Kr} dW_t^r + \sigma_{KV} dW_t^V, \qquad K_0 > 0, \tag{52}$$

dove σ_{Kr} e σ_{KV} sono due costanti positive, δ_K è il tasso istantaneo in base al quale sono remunerati gli obbligazionisti. K può rappresentare il valore di mercato delle passività totali o parte di esse, oppure il valore attualizzato (in base al tasso *default-free*) del valore nominale delle passività.

Nella pratica, l'insolvenza si può verificare sia nel caso in cui il valore delle attività scenda al di sotto del valore delle passività (*stock-based insolvency*), oppure per il mancato pagamento di somme dovute (*flow-based insolvency*). Nel modello di Saá-Requejo e Santa-Clara (1999), il default si manifesta in corrispondenza del primo istante in cui il processo V raggiunge il valore K.

Il tempo di primo passaggio è definito quindi come segue:

$$t^* = \inf\{u \geq t \,:\, V_u = K_u\}. \tag{53}$$

[17] Alla scadenza si avrà $v(T,T) = 1 - w\mathbf{1}_{\{t^* \leq T\}}$.

Se si definisce un nuovo processo[18],

$$X \equiv \log \frac{V}{K} = \log V - \log K, \tag{54}$$

allora il tempo di primo passaggio è il primo istante in corrispondenza del quale X si annulla; formalmente,

$$t^* = \inf\{u \geq t \,:\, X_u = 0\}. \tag{55}$$

Nell'analisi dell'epoca e della probabilità di default, si può quindi limitare lo studio all'andamento del rapporto V/K.

Si può agevolmente dimostrare che il processo X, definito dall'equazione (54), soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t^X, \qquad X_0 > 0, \tag{56}$$

dove i coefficienti di drift e di diffusione sono costanti e definiti come segue:

$$\mu = \delta_K - \delta_V - \frac{1}{2}\left(\sigma_V^2 - (\sigma_{KV}^2 + \sigma_{Kr}^2 + 2\rho_{rV}\sigma_{KV}\sigma_{Kr})\right) \tag{57}$$

e

$$\sigma^2 = (\sigma_V - \sigma_{KV})^2 + \sigma_{Kr}^2 - 2\rho_{rV}(\sigma_V - \sigma_{KV})\sigma_{Kr}. \tag{58}$$

W^X è un nuovo processo di Wiener, tale che

$$\sigma W_t^X = (\sigma_V - \sigma_{KV})W_t^V - \sigma_{Kr}W_t^r, \tag{59}$$

correlato con il processo W^r, con coefficiente di correlazione

$$\rho = \frac{\rho_{rV}(\sigma_V - \sigma_{KV})\sigma_{Kr}}{\sigma}. \tag{60}$$

Si assuma w costante. Nel caso in cui $\rho = 0$, si ha indipendenza tra l'evento default e il tasso di interesse *default-free*; in questo caso il *corporate bond* può essere valutato in forma chiusa:

$$v(t,T) = p(t,T) - w\, p(t,T)\, \mathbb{Q}_t(t^* \leq T), \tag{61}$$

dove la probabilità di default è data da[19]

$$\mathbb{Q}_t(t^* \leq T) = \mathcal{N}\left(\frac{-X_t - \mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + e^{-\frac{2\mu X_t}{\sigma^2}}\mathcal{N}\left(\frac{-X_t + \mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \tag{62}$$

Nel caso in cui la volatilità del prezzo del bond sia una funzione deterministica del tempo esistono delle soluzioni approssimate per la probabilità di default. In generale, una stima della probabilità di default può essere calcolata mediante la simulazione Monte Carlo, generando un numero elevato di traiettorie e semplicemente contando

[18] Il rapporto V/K è detto *solvency ratio*.

[19] Si veda Bielecki e Rutkowski (2002), corollario 3.1.1.

il numero di casi in cui la frontiera di default è stata oltrepassata. Anche il tempo medio di default può essere stimato in tal modo.

In particolare, se si adotta il modello CIR per descrivere le dinamiche del tasso di interesse default-free r, e se $\rho \neq 0$, si devono congiuntamente simulare le traiettorie dei due processi:

$$dr_t = \left[\kappa(\theta - r_t) + \sigma_r^2 B(\tau) r_t\right] dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dW_t^1, \tag{63}$$

e

$$dX_t = \left[\mu - \rho\sigma(\sigma_r^2 \sqrt{r_t} B(\tau)\right] dt + \rho\sigma dW_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}\sigma dW_t^2, \tag{64}$$

dove W^1 e W^2 sono due processi di Wiener indipendenti. $B(\tau)$ è dato dalla formula (39) nel modello CIR.

Date le precedenti assunzioni inerenti ai processi X ed r, il valore all'epoca t di un corporate bond è dato da

$$v(t,T) = p(t,T) - w\, p(t,T)\, \mathbb{Q}_t^T(t^* \leq T), \tag{65}$$

dove $\mathbb{Q}_t^T(t^* \leq T)$ è la probabilità *forward* di default[20].

4 ANALISI DI ALCUNI ESEMPI NUMERICI

In questo paragrafo verrà presentato un semplice esempio di applicazione della simulazione Monte Carlo per la stima della probabilità di default. Tale stima verrà utilizzata per il calcolo del prezzo di un defaultable zero-coupon bond e per l'analisi della sensitività al variare dei parametri del modello dei prezzi di tali titoli e dei credit spread. In particolare, nella sperimentazione che segue, adottiamo il modello di Cathcart ed El-Jahel (1998).

Come suggerito da Hsu et al. (2002), la simulazione Monte Carlo può, in generale, venire utilizzata per la stima della probabilità di default. Tale metodo è flessibile e facilmente implementabile: l'idea che l'epoca in cui si manifesta l'insolvenza corrisponda al primo istante in cui un certo processo raggiunge una frontiera viene tradotta in maniera del tutto intuitiva nella simulazione. È necessario generare un numero sufficientemente elevato di traiettorie di un opportuno processo. La probabilità di insolvenza viene stimata semplicemente contando il numero di traiettorie in cui si è verificata la violazione della frontiera e calcolando quindi la frequenza relativa di tale evento.

Negli esempi presentati di seguito, sono state generate 100 000 traiettorie (delle quali 50 000 antitetiche) del processo X. Nella simulazione consideriamo un passo temporale $\Delta t = 1/250$ (ciò corrisponde approssimativamente alla generazione di dati giornalieri) e scadenze fino a 20 anni.

Nelle figure 2 e 3 sono riportati i grafici dei prezzi di zero-coupon bond e dei relativi credit spreads per diversi valori di w. In particolare, si osservi che $w = 1$ corrisponde ad un tasso di recupero nullo; p rappresenta il valore di un default-free

[20]Per maggiori dettagli si rimanda ai contributi di Saá-Requejo e Santa-Clara (1999) e Hsu et al. (2002).

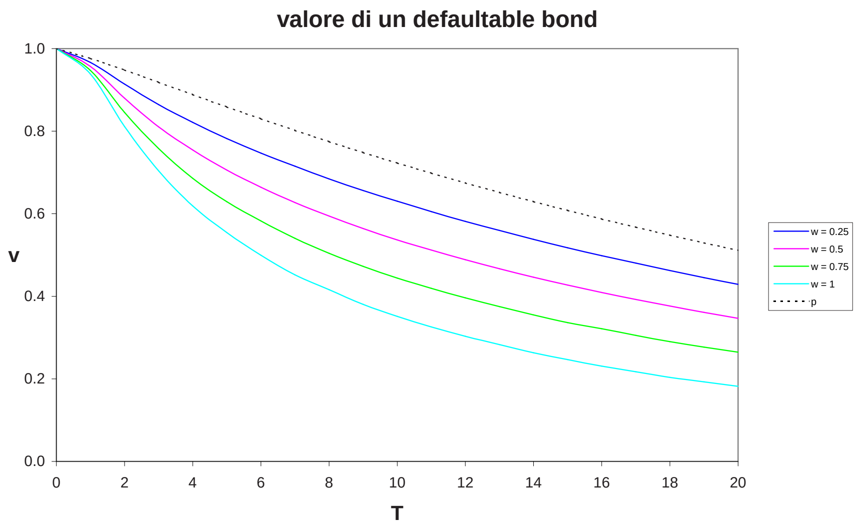

Figura 2: Valore di un defaultable ZCB al variare di $w \in \{0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ ($\alpha = 0.02$, $\sigma_X = 0.2$, $X_0/\overline{X} = 1.5$, $r_0 = 0.02$, $\theta = 0.04$, $\kappa = 0.5$, $\sigma_r = 0.3$).

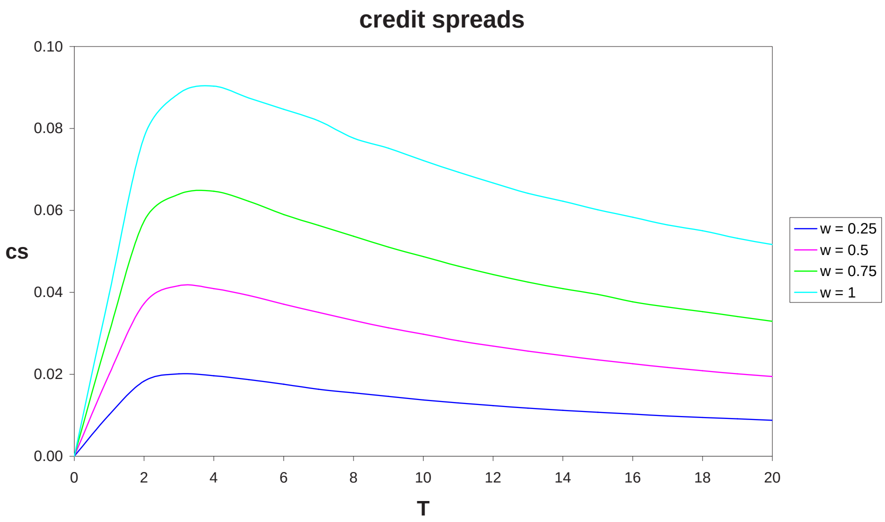

Figura 3: Credit spreads al variare di $w \in \{0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ ($\alpha = 0.02$, $\sigma_X = 0.2$, $X_0/\overline{X} = 1.5$, $r_0 = 0.02$, $\theta = 0.04$, $\kappa = 0.5$, $\sigma_r = 0.3$).

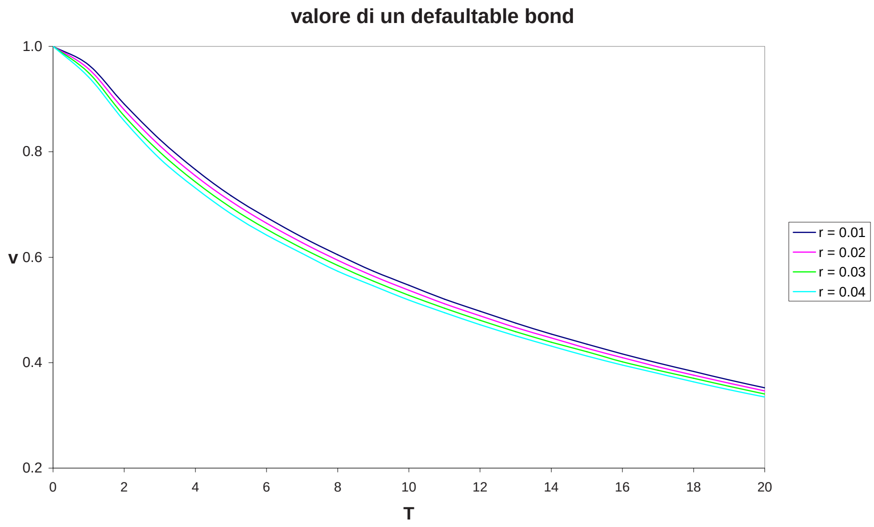

Figura 4: Valore di un defaultable ZCB al variare di $r_0 \in \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04\}$ ($\alpha = 0.02$, $\sigma_X = 0.2$, $X_0/\overline{X} = 1.5$, $w = 0.5$, $\theta = 0.04$, $\kappa = 0.5$, $\sigma_r = 0.3$).

bond. La figura 2 evidenzia come il valore di un'obbligazione soggetta a rischio di credito diminuisca al diminuire del tasso di recupero; tale fatto è, peraltro, del tutto intuitivo. La figura 3 mostra la tipica forma "a gobba" (*humped shape*) dei differenziali di rendimento rispetto ai titoli *default-free*.

La figura 4 mostra alcune curve dei prezzi di zero-coupon bond al variare del livello corrente dei tassi *default-free*. Com'è intuitivo attendersi, il prezzo di un'obbligazione è un funzione decrescente del tasso di interesse.

Le figure 5 e 6 mostrano un altro esempio di valutazione di obbligazioni soggette a rischio di credito e a diverso rischio di tasso di recupero. Nell'esempio in esame, il valore del rapporto $X_0/\overline{X}$ è pari a 2 (nell'esempio precedente era $X_0/\overline{X} = 1.5$); è interessante notare come sia cambiata la forma dei credit spreads.

Si osservi che valori maggiori di $X/\overline{X}$ possono essere associati a titoli appartenenti a classi di rating migliori. Le figure 7 e 8 evidenziano che titoli con un "buon" rating[21], corrispondenti a valori maggiori del rapporto $X/\overline{X}$, paghino un premio per il rischio inferiore in termini di credit spread.

Nel modello di Cathcart ed El-Jahel, per le particolari ipotesi adottate, i credit spreads, la probabilità di default e il tempo medio del default risultano indipendenti da r. Oltre agli effetti illustrati dai grafici, i risultati della simulazione hanno evidenziato che la probabilità di default risulta decrescente rispetto al rapporto $X/\overline{X}$, mentre il tempo medio del default risulta crescente. I credit spreads manifestano un andamento crescente rispetto al parametro σ_X e decrescente rispetto al parametro α.

[21] I valori utilizzati nell'esempio sono del tutto arbitrari.

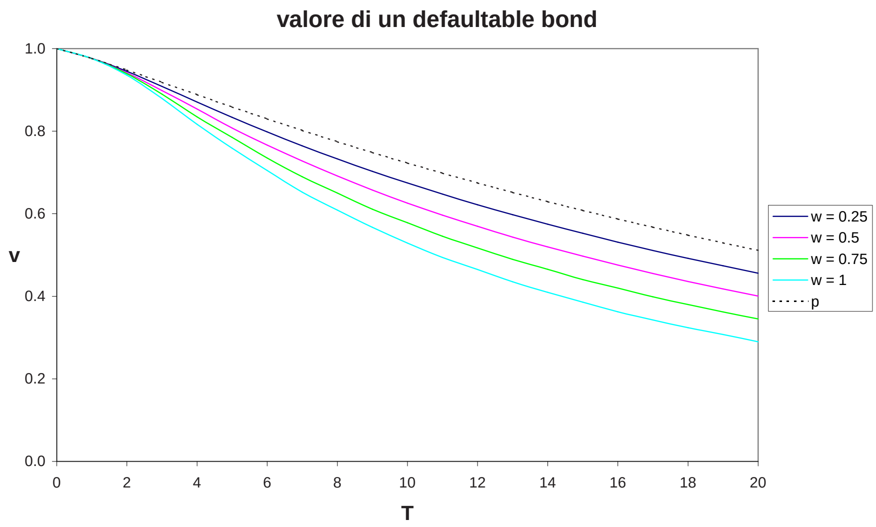

Figura 5: Valore di un defaultable ZCB al variare di $w \in \{0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ ($\alpha = 0.02$, $\sigma_X = 0.2$, $X_0/\overline{X} = 2$, $r_0 = 0.02$, $\theta = 0.04$, $\kappa = 0.5$, $\sigma_r = 0.3$).

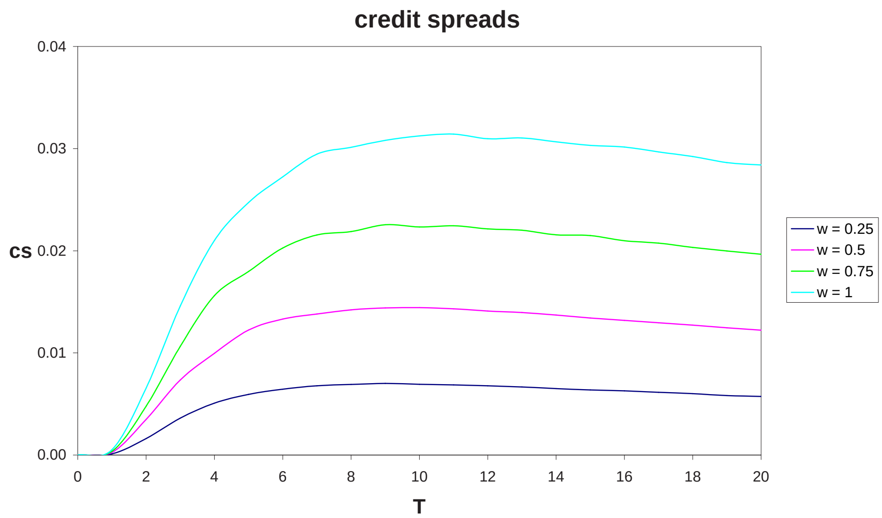

Figura 6: Credit spreads al variare di $w \in \{0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ ($\alpha = 0.02$, $\sigma_X = 0.2$, $X_0/\overline{X} = 2$, $r_0 = 0.02$, $\theta = 0.04$, $\kappa = 0.5$, $\sigma_r = 0.3$).

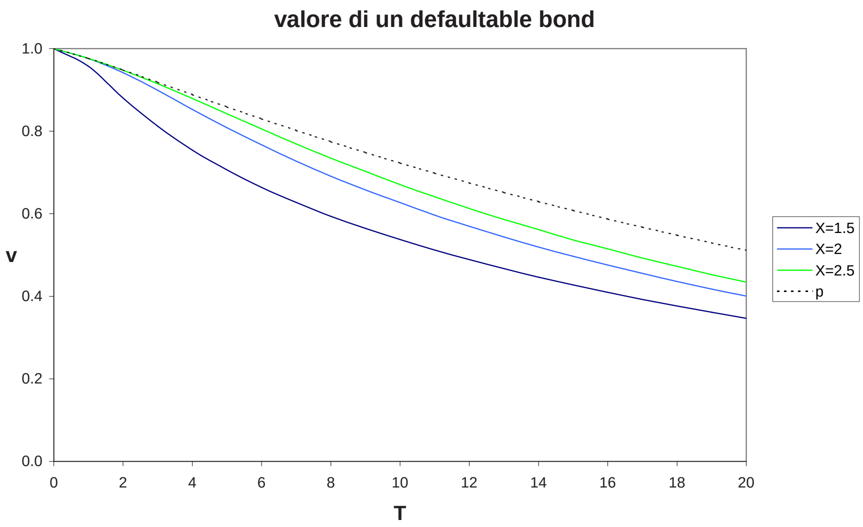

Figura 7: Valore di un defaultable ZCB al variare di $X_0/\overline{X} \in \{1.5, 2, 2.5\}$ ($\alpha = 0.02$, $\sigma_X = 0.2$, $w = 0.5$, $r_0 = 0.02$, $\theta = 0.04$, $\kappa = 0.5$, $\sigma_r = 0.3$).

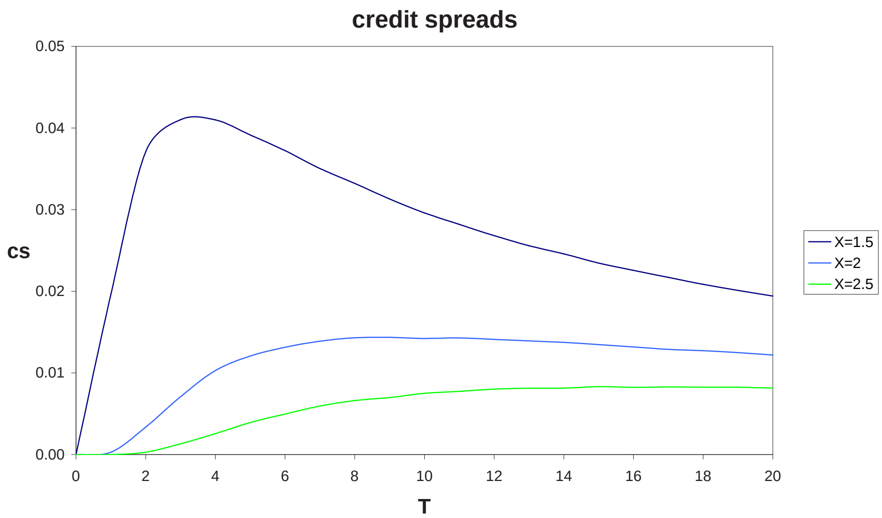

Figura 8: Credit spreads al variare di $X_0/\overline{X} \in \{1.5, 2, 2.5\}$ ($\alpha = 0.02$, $\sigma_X = 0.2$, $w = 0.5$, $r_0 = 0.02$, $\theta = 0.04$, $\kappa = 0.5$, $\sigma_r = 0.3$).

5 CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

Una corretta analisi del rischio di credito insito in alcune attività finanziarie appare cruciale al fine della valutazione di tali attività. Tuttavia il rischio di credito rappresenta uno dei rischi di mercato di più difficile definizione e quantificazione. In letteratura sono stati proposti e sviluppati diversi approcci alternativi alla misurazione del rischio di credito. In particolare, si usa distinguere due classi di modelli: i modelli strutturali (o *firm value models*) e i modelli in forma ridotta (o *intensity-based models*.

Nei modelli strutturali di *first passage time*, l'epoca del default viene caratterizzata mediante il tempo di primo passaggio di un opportuno processo, che può ad esempio rappresentare il valore delle attività, attraverso una frontiera. In questo contributo sono stati analizzati in particolare tre approcci: un modello con frontiera di default definita da una funzione deterministica del tempo, un modello con frontiera costante e, infine, un modello con frontiera stocastica.

In certi casi sono note delle formule per il valore di un defaultable zero-coupon bond. Se si rilassano alcune ipotesi (peraltro molto restrittive e poco realistiche) non sono note delle soluzioni in forma chiusa per la probabilità di default e il valore del bond. In generale, nei modelli di *first passage time* una stima della probabilità di default può essere calcolata mediante la simulazione Monte Carlo.

Sono stati infine presentati alcuni esempi numerici di valutazione di defaultable zero-coupon bonds in un modello con frontiera costante, valore di recupero costante e tasso di interesse stocastico e indipendente dal processo che governa il default.

Interessante appare l'applicazione di modelli più sofisticati, nonché più realistici (quali, ad esempio, il modello proposto da Saá-Requejo e Santa-Clara (1999) e la sua estensione ad opera di Hsu et al. (2002)) per la stima della probabilità di default e la valutazione di obbligazioni soggette a rischio di credito. Se si assume che la frontiera di default sia governata da un processo stocastico, i tassi siano stocastici e correlati con il processo che determina il default, allora il semplice schema di simulazione utilizzato nel paragrafo precedente si complica. Tuttavia, in assenza di soluzioni in forma chiusa o approssimate, la simulazione Monte Carlo può essere comunque utilizzata.

BIBLIOGRAFIA

[1] AMMANN M., *Credit Risk Valuation. Methods, Models, and Applications.* Springer-Verlag Berlin, 2001.

[2] BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION, Credit Risk Modelling: Current Practices and Applications. Basel, April 1999.

[3] BIELECKI T.R., RUTKOWSKI M., *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2002.

[4] BLACK F., COX J.C., Valuing corporate securities: some effects of bond indeture provisions. *Journal of Finance*, 31, 351–367, 1976.

[5] BLACK F., SCHOLES M., The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 637–654, 1973.

[6] BLUHM C., OVERBECK L., WAGNER C., *An Introduction to Credit Risk Modeling*. Chapman & Hall, 2003.

[7] BRIYS E., DE VARENNE F., Valuing fixed rate debt: An extention. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32, 239–248, 1997.

[8] CATHCART L., EL-JAHEL L., Valuation of defaultable bonds. *Journal of Fixed Income*, 8(1), 65–78, 1998.

[9] COLLIN-DUFRESNE P., GOLDSTEIN R.S., Do credit spreads reflect stationary leverage ratios? *The Journal of Finance*, 56, 1929–1958, (2001.

[10] COSSIN D., PIROTTE H., *Advanced Credit Risk Analysis: Financial Approaches and Mathematical Models to Assess, Price and Manage Credit Risk*. John Wiley & Sons, 2001.

[11] COX J.C., INGERSOLL J.E., ROSS S., A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53, 385–407, 1985.

[12] CROSBIE P., BOHN J., Modeling default risk. Moody's KMV Company, 2003.

[13] DUFFIE D., SINGLETON K.J., Modeling term structures of defaultable bonds. *Review of Financial Studies*, 12, 687–720, 1999.

[14] DURBIN J., The first-passage time of the Brownian motion process to a curved boundary. *Journal of Applied Probability*, 29, 291–304, 1992.

[15] ERICSSON J., RENEBY J., Estimating structural bond pricing models. *Working paper*, 2002.

[16] HSU J.C., SAÁ-REQUEJO J., SANTA-CLARA P., Bond pricing with default risk. *Working paper*, 2002.

[17] HUI C.H., LO C.F., TSANG S.W., Pricing corporate bond with dynamic default barriers. *Journal of Risk*, 5(3), 17–39, 2003.

[18] JARROW R.A., LANDO D., TURNBULL S.M., A Markov model for the term structure of credit risk spreads. *Review of Financial Studies*, 10, 481–523, 1997.

[19] JARROW R.A., PROTTER P., Structural versus reduced form models: a new information based perspective. *Working paper*, 2004.

[20] JARROW R.A., TURNBULL S.M., Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk. *Journal of Finance*, 50, 53–86, 1995.

[21] KARATZAS I., SHREVE S., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, 1991.

[22] KIM I.J., RAMASWAMY K., SUNDARESAN S., Does default risk coupons affect the valuation of corporate bonds? A contingent claims model. *Financial Management*, 22(3), 117–131, 1993.

[23] LONGSTAFF F.A., SCHWARTZ E.S., A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt. *Journal of Fianance*, 50, 789–819, 1995.

[24] MERTON R.C., On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, 29, 449–470, 1974.

[25] NIELSEN L.T., SAÁ-REQUEJO J., SANTA-CLARA P., Default risk and

interest rate risk: the term structure of default spreads. *Working paper*, INSEAD, 1993.

[26] PROTTER P., *Stochastic Integration and Differential Equations.* Springer-Verlag, New York, 2004.

[27] SAÁ-REQUEJO J., SANTA-CLARA P., Bond pricing with default risk. *Working paper*, 1999.

[28] SHIMKO D., TEJIMA N., VAN DEVENTER D.R., The pricing of risky debt when interest rates are stochastic. *Journal of Fixed Income*, 3(2), 58–65, 1999.

[29] TAURÉN M.P., A model of corporate bond prices with dynamic capital structure. *Working paper*, 1999.

[30] VASICEK O., An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5, 177–188, 1977.