Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Marta Cardin

Su una classe di gruppi con molti sottogruppi quasinormali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 72 (1984), p. 157-161.

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1984__72__157_0>

REND. SEM. MAT. UNIV PADOVA, Vol. 72 (1984)

Su una classe di gruppi con molti sottogruppi quasinormali.

MARTA CARDIN (*)

1. In [2] si considera la classe dei gruppi G con una famiglia di sottogruppi $\{H_i\}_{i\in I}$ tali che $G = < H_i: i \in I >$ e se $i, j \in I$ ogni sottogruppo contenuto in $H_i \vee H_j$ è quasinormale in G, provando che un gruppo periodico con tali proprietà è metabeliano.

In questa nota si utilizza il teorema citato per determinare la struttura dei gruppi appartenenti alla classe considerata.

Dai risultati trovati si deduce the se σ è una proiettività del gruppo G nel gruppo $\bar{G}$, $N \lhd G$ allora $(N^\sigma[N^\sigma, 2\bar{G}])^{\sigma^{-1}}/N$ è un gruppo modulare migliorando così un risultato di [2].

2. Un gruppo G del tipo considerato è generato da sottogruppi ciclici quasinormali quindi ascendenti ed è dunque un gruppo di Gruenberg.

Per il teorema 2.31 di [3] G è localmente nilpotente quindi i suoi sottogruppi di Sylow sono normali.

Allora per studiare i gruppi periodici della classe considerata è sufficiente esaminare i p-gruppi appartenenti a tale classe.

Nel seguito se $\{H_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di sottogruppi del gruppo G con le proprietà citate supporremo sempre che $H_i = \langle x_i \rangle$ per un certo $i \in I$, e che se G è finito $\{x_i\}_{i\in I}$ sia un sistema minimale di generatori di G.

LEMMA 1. Sia $G = \langle x_i: i \in I\rangle$ un p-gruppo tale che ogni sottogruppo di $\langle x_i, x_j\rangle$ sia quasinormale in G. Se non esistono due sotto-

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento Matematica Applicata dell'Università, Dorsoduro 3861, 30123 Venezia.

gruppi distinti $\langle x_i, x_j\rangle$ e $\langle x_k, x_l\rangle$ $(i, j, k, l \in I)$ isomorfi a Q_8, allora G è modulare.

Dim. È sufficiente considerare il caso in cui G è un p-gruppo finito.

Possiamo supporre quindi che $I = \{1, ..., n\}$ con $n > 2$ perchè la tesi è banale se $n \leq 2$.

Dimostriamo dapprima il lemma nel caso in cui $p = 2$ e G ha esponente non maggiore di 4. Sd $\langle x_i, x_j\rangle$ non è isomorfo a Q_8 per ogni i, j, $1 \leq i$, $j \leq n$, allora G è abeliano

Supponiamo dunque che $\langle x_1, x_2\rangle$ sia il gruppo dei quaternioni e quindi che $\langle x_1, x_i\rangle$ e $\langle x_2, x_i\rangle$ siano abeliani per ogni i, $3 \leq i \leq n$. Se $|x_i| = 4$ per un certo i, $3 \leq i \leq n$, allora $\langle x_i\rangle \cap \langle x_1, x_2\rangle > 1$ perchè $\langle x_1 x_i\rangle$ e $\langle x_2 x_i\rangle$ devono essere permutabili; si ha dunque $|x_2 x_i| = 2$ e quindi $\langle x_1, x_2 x_i\rangle$ è un gruppo diedrale e ciò è assurdo perchè $\langle x_1, x_2 x_i\rangle$ è modulare per la proposizione 1.4 di [2]. Allora per ogni i, $3 \leq i \leq n$, $|x_i| = 2$ e quindi G è hamiltoniano.

Considerando quindi il caso generale sia G un controesempio di cardinalità minima; se $p = 2$ G ha esponente maggiore di 4 e quindi, per la dimostrazione della proposizione 1.6 di [2] che se $p > 2$ è valida anche se G ha esponente minore o uguale a p^2, $Z(G)$ non è ciclico.

Sia A un sottogruppo di $Z(G)$ di esponente p con $|A| = p^2$. Proviamo che se x è un elemento non triviale di A, $G/\langle x\rangle$ è modulare.

Infatti in caso contrario esisterebbero due sottogruppi $\langle x_i, x_j\rangle$ e $\langle x_k, x_l\rangle$ $(1 \leq i, j, k, l \leq n)$ che modulo $\langle x\rangle$ sono distinti e siomorfi a Q_8.

x non appartiene a $\langle x_i, x_j\rangle$ o *a* $\langle x_k, x_l\rangle$ perchè non esistono gruppi modulari 2-generati di ordine 16 con un quoziente isomorfo a Q_8.

Allora $\langle x_i, x_j\rangle$ e $\langle x_k, x_l\rangle$ sarebbero due sottogruppi distinti e isomorfi a Q_8 di G, in contraddizione con le ipotesi.

G non è modulare quindi contiene un sottogruppo H minimale non modulare.

$A \leq H$ perchè se esistesse un elemento x di A tale che $\langle x\rangle \cap H = 1$ allora $H \cong H\langle x\rangle/\langle x\rangle$ sarebbe un gruppo modulare.

Per la proposizione 1.8 di [4] esiste un sottogruppo N di H tale che H/N è un gruppo di ordine p^3 non modulare.

Allora $A \cap N = 1$ e ciò è assurdo perchè H/N non può contenere un sottogruppo centrale non ciclico.

Corollario. Se σ è una proiettività del gruppo G nel gruppo $\overline{G}$ e $N \lhd G$ allora $(N^\sigma[N^\sigma, 2\overline{G}])^{\sigma^{-1}}/N$ è un gruppo modulare.

Dim. La tesi discende direttamente dalle dimostrazioni del lemma 2.4 e del teorema 2.5 di [2] e dal lemma 1.

LEMMA 2. Se G è un gruppo non periodico e $\{H_i\}_{i\in I}$ una famiglia di sottogruppi di G tali che ogni sottogruppo di $H_i \vee H_j$ $(i, j \in I)$ è quasinormale in G, allora G è modulare.

DIM. Possiamo supporre che $I = \{1, \ldots, n\}$ e quindi che G sia nilpotente.

Sia T il sottogruppo di torsione di G; per ogni i, j, $1 \leq i$, $j \leq n$ $\langle x_i, x_j \rangle$ è un gruppo modulare e quindi $\langle x_i, x_j \rangle T/T$ è abeliano per la proposizione 1.12 di [4].

Allora G/T è abeliano e quindi $G/Z(G)$ è finito. Se G non è modulare esistono due elementi a e b di G tali che $\langle a \rangle$ e $\langle b \rangle$ non sono permutabili.

Allora se $H = \langle a, b \rangle$ e $K = (\langle a \rangle \cap Z(G))\,(\langle b \rangle \cap Z(G))$, H/K è un gruppo finito non quasihamiltoniano.

G è un gruppo nilpotente finitamente generato e quindi esiste N normale e di indice finito in G tale che $H \cap N \leq K$.

Si può supporre inoltre che la 2-componente di G/N abbia esponente maggiore di 4. Allora G/N è quasihamiltoniano perchè lo sono le sue p-componenti per il lemma 1 e ciò è assurdo perchè $HN/N \cong$ $\cong H/H \cap N$ non è quasihamiltoniano.

Per quanto riguarda le notazioni sui gruppi extraspeciali si fa riferimento a [1, p. 203].

In particolare nel seguito se E e F sono due gruppi extraspeciali EF indicherà il loro prodotto centrale.

TEOREMA. G è un p-gruppo finito con un insieme di sottogruppi $\{H_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ tali che $G = \langle H_i \colon 1 \leq i \leq n \rangle$ e se $1 \leq i$, $j \leq n$, ogni sottogruppo di $H_i \vee H_j$ è quasinormale in G se e solo se o G è un p-gruppo modulare oppure $p = 2$, $G = B \times A$ con A 2-gruppo abeliano elementare e B isomorfo ad uno dei seguenti gruppi per un certo intero positivo n: $Q_8^n D_8^n$, $Q_8^n D_8^n \curlyvee C_4\, Q_8^{n+1} D_8^n$.

DIM. Se G non è modulare e soddisfa le ipotesi del teorema, si può supporre che $n \geq 2$ e che $\langle x_1, x_2 \rangle$ sia il gruppo dei quaternioni, per il lemma 1.

Allora per ogni i, $1 \leq i \leq n$, $\langle x_1, x_2, x_i \rangle$ è un gruppo di esponente 4 perchè o contiene due sottogruppi distinti $\langle x_i, x_j \rangle$ e $\langle x_k, x_l \rangle$ isomorfi a Q_8 oppure è modulare per il lemma 1 quindi hamiltoniano.

Pertanto se x è un elemento di G di periodo 2 e $x = x_i$ o $x = x_i x_j$, $1 \leq i$, $j \leq n$, allora $x \in Z(G)$ perchè per ogni k, $1 \leq k \leq n$, $\langle x, x_k \rangle$ è un gruppo modulare per la proposizione 1.4 di [2].

Inoltre se x_i centralizza x_1 (o x_2) allora o $|x_i| = 2$ oppure $|x_1 x_i| = 2$ perchè $\langle x_1, x_2, x_i \rangle$ è hamiltoniano.

Possiamo quindi limitarci a considerare il caso in cui per ogni i, $2 \leq i \leq n$, $\langle x_1, x_i \rangle$ e $\langle x_2, x_i \rangle$ sono isomorfi a Q_8.

Se $\langle x_i, x_j \rangle$ è abeliano con $3 \leq i$, $j \leq n$ allora $|x_i x_j| = 2$ essendo $x_i^2 = x_1^2 = x_j^2$.

Supponiamo quindi che per ogni i, j, $1 \leq i$, $j \leq n$, $\langle x_i, x_j \rangle$ sia il gruppo dei quaternioni.

Se $n = 3$, $G = \langle x_1, x_2 \rangle \times \langle x_1 x_2 x_3 \rangle$ è hamiltoniano.

Se $n > 3$ ed n è pari, $G = \langle x_1, x_2 \rangle \ \langle x_3 x_4, x_1 x_2 x_3 \rangle \ldots \langle x_{n-1} x_n, x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \rangle = Q_8 D_8 \ldots$ e quindi se $n \equiv 0 \bmod 4$, $G = Q_8^m D_8^m$ mentre se $n \not\equiv 0 \bmod 4$, $G = Q_8^{m+1} D_8^m$.

Se $n > 3$ ed n è dispari, $G = \langle x_1, x_2 \rangle \ \langle x_3 x_4, x_1 x_2 x_3 \rangle \ldots \langle x_1 x_2 \ldots x_n \rangle$ con $x_1 x_2 \ldots x_n \in Z(G)$.

Allora se $n \equiv 1 \bmod 4$, $G = Q_8^m D_8^m \curlyvee C_4$ mentre se $n \not\equiv 1 \bmod 4$ $G = Q_8^{m+1} D_8^m \times C_2$.

Viceversa se $G = Q_8^m D_8^m \curlyvee C_4$ esistono degli elementi $y_1, \ldots, y_n$ di G tali che $G = \langle y_1, y_2 \rangle \langle y_3, y_4 \rangle \ldots \langle y_{n-2}, y_{n-1} \rangle \ \langle y_n \rangle$ dove $\langle y_1, y_2 \rangle \cong Q_8$, $\langle y_3, y_4 \rangle \cong D_8$ $(|y_3| = 4) \ldots \langle y_{n-2}, y_{n-1} \rangle \cong Q_8$ e y_n è di ordine 4.

Poniamo dunque

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_1 y_2 y_3, \quad x_4 = y_1 y_2 y_3 y_4 \ldots,$$

$$x_{n-2} = y_1 y_2 y_3 \ldots y_{n-1}, \quad x_{n-1} = y_1 y_2 y_3 \ldots y_{n-2} y_{n-1},$$

$$x_n = y_1 y_2 y_3 \ldots y_{n-2} y_n .$$

Allora $G = \langle x_i; 1 \leq i \leq n \rangle$ e per ogni $i, j, 1 \leq i$, $j \leq n$, $|x_i| = 4$ $x_i^{x_j} = x_i^{-1}$ e quindi G appartiene alla classe considerata.

In modo analogo si prova che i gruppi del tipo $Q_8^m D_8^m$ o $Q_8^{m+1} D_8^m$ con m intero positivo hanno un sistema di generatori con le proprietà volute.

Per concludere la dimostrazione è sufficiente osservare che se B è un gruppo appartenente alla classe considerata e A è un 2-gruppo abeliano elementare anche $B \times A$ appartiene a tale classe.

3. Da quanto già visto si deduce che se G è un p-gruppo non modulare appartenente alla classe in questione allora $p = 2$ e $G = B \times A$ con A 2-gruppo abeliano elementare, $B = \langle x_i \colon i \in I \rangle$ dove $\{x_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di elementi di B tali che per ogni i, $j \in I$ $i = j$, $x_i^4 = 1$ $x^2 = x^2$ e $x_i^{x_j} = x_i^{-1}$.

La struttura del gruppo B risulta determinata dalla cardinalità dall'insieme I; costruiamo quindi per ogni cardinale c un gruppo B_c con tali proprietà e con I di cardinalità c.

Fissato il cardinale c, sia V uno spazio vettoriale su $GF(2)$ con una base $\{v_i\}_{i\in I}$ di cardinalità c.

Supponiamo inoltre che su I sia fissato un ordinamento totale e definiamo quindi una forma bilineare f su V ponendo $f(v_i, v_j) = 0$ se $i < j$, $f(v_i, v_j) = 1$ se $i \geq j$.

Sia dunque $B_c = V \times GF(2)$ con il prodotto definito da $(v, a)(w, b) = = (v + w, a + b + f(v, w))(v, w \in V, a, b \in GF(2))$.

B_c è un gruppo di esponente 4 e se $x_i = (v_i, 0)\{x_i\}_{i\in I}$ è un sistema minimale di generatori di B_c tale che se $i, j \in I$ $i \neq j$, $x_i^2 = x_j^2 = (0, 1)$ e $x_i^{x_j} = (v_i, 1) = x_i^{-1}$.

Se c è un cardinale infinito B_c è un gruppo extraspeciale perchè ovviamente $B'_c = \langle(0, 1)\rangle$ e si può provare che $Z(B_c) = \langle(0, 1)\rangle$.

Infatti se $x = x_{i1} \ldots x_{in}$ è un elemento di B_c $(i_1, \ldots, i_n \in I)$ se n è pari $[x, x_{i1}] \neq 1$ mentre se n è dispari e $j \in I$ $j = \notin \{i_1 \ldots, i_n\}$ $[x, x_j] \neq 1$.

In particolare se $c = \aleph_0$ e $I = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$,

$$B_c = \langle x_1, x_2\rangle\langle x_3x_4, x_1x_2x_3\rangle\langle x_5x_6, x_1x_2x_3x_4x_5\rangle \ldots$$

$\ldots \langle x_{n-1}x_n, x_1 \ldots x_{n-1}\rangle \ldots = Q_8D_8Q_8 \ldots$ e quindi B_c è prodotto centrale di $\aleph_0$ copie di Q_8.

BIBLIOGRAFIA

[1] D. Gorenstein, *Finite groups*, Harper Row (1968).

[2] F. Napolitani - G. Zacher, *Über das Verhalten der Normalteiler unter Projektivitaten* (in corso di pubbl. su Math. Z.).

[3] D. Robinson, *Finiteness conditions and generalized soluble groups*, vol. I e II, Springer-Verlag (1972).

[4] M. Suzuki, *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Springer (1956).

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 Giugno 1983.