



Ca' Foscari
University
of Venice

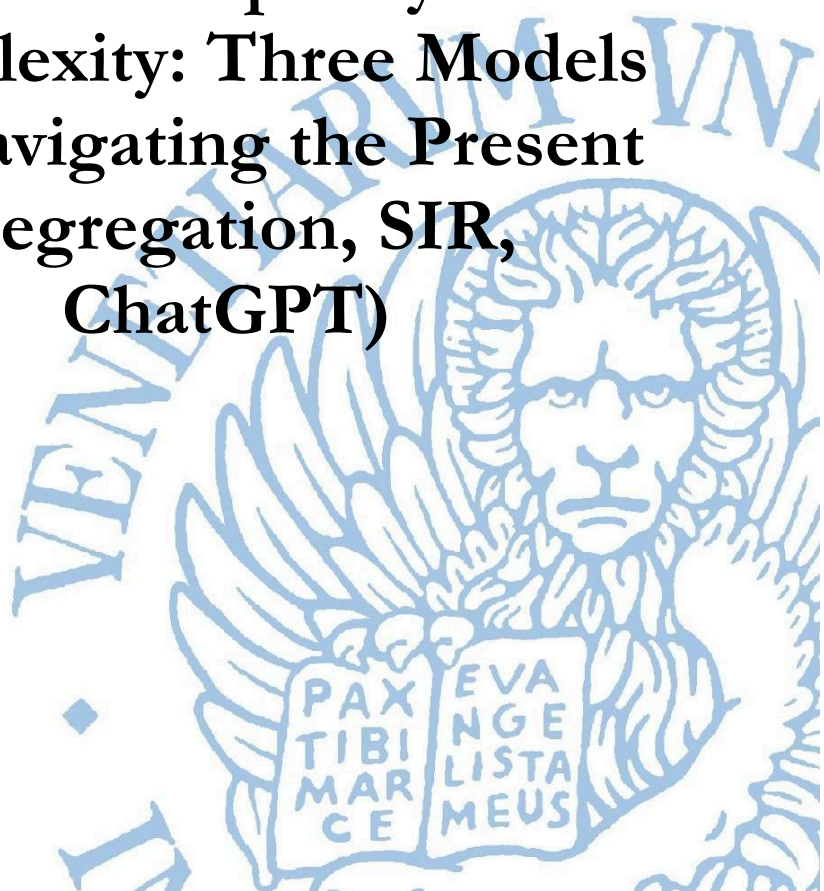
Department
of Economics

Working Paper

Paolo Pellizzari

**From Simplicity to
Complexity: Three Models
for Navigating the Present
(Segregation, SIR,
ChatGPT)**

ISSN: 1827-3580
No. 12/WP/2024





From Simplicity to Complexity: Three Models for Navigating the Present (Segregation, SIR, ChatGPT)

Paolo Pellizzari

Ca' Foscari University of Venice

Abstract

Models are the cornerstones of scientific thought. They illuminate complex realities, provide keys for interpretation and solutions, and serve as training grounds for intellectual tolerance, rigorous reasoning, flexibility, and humility.

This note describes three models, which with a touch of contemporaneity, share the attempt to elucidate what surrounds us. In their diversity, they demonstrate how to delve into the social and linguistic complexity with heightened awareness and a critical spirit.

Keywords

Computational modelling; epidemics; segregation; ChatGPT

JEL Codes

C63, B41, A12

Address for correspondence:

Paolo Pellizzari

Department of Economics
Ca' Foscari University of Venice
Cannaregio 873, Fondamenta S.Giobbe
30121 Venezia - Italy
e-mail: paolop@unive.it

This Working Paper is published under the auspices of the Department of Economics of the Ca' Foscari University of Venice. Opinions expressed herein are those of the authors and not those of the Department. The Working Paper series is designed to divulge preliminary or incomplete work, circulated to favour discussion and comments. Citation of this paper should consider its provisional character.

Dalla semplicità alla complessità: tre modelli per barcamenarsi nel presente: segregazione, SIR, ChatGPT

Sommario

I modelli sono le pietre angolari del pensiero scientifico. Illuminano realtà complesse, offrono chiavi di lettura e soluzioni, sono palestre di tolleranza intellettuale, rigore nel ragionamento, flessibilità ed umiltà. In questa nota sono descritti tre modelli che, con un tocco di attualità, sono accomunati dal tentativo di spiegare quanto ci circonda. Nella loro varietà, mostrano come immergersi nella complessità sociale e linguistica con maggiore consapevolezza e spirito critico.

Abstract

Models are the cornerstones of scientific thought. They illuminate complex realities, provide keys for interpretation and solutions, and serve as training grounds for intellectual tolerance, rigorous reasoning, flexibility, and humility.

This note describes three models, which with a touch of contemporaneity, share the attempt to elucidate what surrounds us. In their diversity, they demonstrate how to delve into the social and linguistic complexity with heightened awareness and a critical spirit.

Paolo Pellizzari

Dalla semplicità alla complessità: tre modelli per barcamenarsi nel presente: segregazione, SIR, ChatGPT

Paolo Pellizzari

Università Ca'Foscari Venezia

1 Cos'è un modello?

I modelli sono rappresentazioni formali e matematiche che aiutano a capire il mondo. Ne abbiamo bisogno e possono servire a ragionare, spiegare, pianificare, comunicare, agire, prevedere ed esplorare. È un lungo elenco, tratto da Page, “The model thinker” [4], e questo spiega perché siano fondamentali. Proverò a dare tre definizioni di modelli, nel tentativo di mostrare tante sfaccettature importanti che difficilmente si lasciano imbrigliare in una singola definizione.

Definizione 1. I modelli sono rappresentazioni semplificate e astratte di fenomeni concreti. Aiutano a capire i sistemi complessi e a predirne il comportamento. Sono spesso espressi in linguaggio matematico con equazioni. Più recentemente, il modello è un codice, scritto in qualche linguaggio di programmazione.

Definizione 2. I modelli sono strumenti per risolvere problemi in vari ambiti. Consentono di analizzare situazioni, prendere decisioni ed esplorare scenari. Coinvolgono studenti/decisioni e stimolano solidità concettuale, coerenza e creatività.

Definizione 3. I modelli creano l'impalcatura per comprendere situazioni e concetti complessi. Promuovono critical thinking, visione d'insieme e l'uso di capacità analitiche. Specie quando si prestano a simulazioni interattive, aiutano studenti/decisioni ad afferrare concetti astratti.

Le precedenti definizioni sono probabilmente ridondanti ma, ritengo, siano in grado di stimolare riflessioni incrociate di valore. La prima definizione, che ci ricorda forse Schopenhauer, mostra che i modelli sono solo rappresentazioni e, quindi, sono potenzialmente tanti quanti i possibili modi di matematizzare la realtà. Ogni modello è limitato perché ogni rappresentazione è (anche) un punto di vista che accentua alcuni fatti ponendone in ombra altri. La seconda definizione è operativa

e sottolinea l'importanza pratica di possedere strumenti interpretativi, conoscitivi e previsivi per prendere decisioni. Tutti gli strumenti sono utili se usati bene e, allo stesso tempo, non esistono strumenti perfetti. Lo stesso vale per i modelli. George Box, lo statistico che ha dato grandi contributi allo sviluppo dei modelli ARMA per le serie storiche, afferma che "tutti i modelli sono sbagliati, ma alcuni sono utili". L'ultima definizione è strutturale e sottolinea il bisogno di andare oltre le apparenze per cogliere le fondamenta dei fenomeni. Invita a librarsi in volo e a guardare le cose dalla giusta distanza che, per i matematici, significa "al giusto livello di astrazione", quello che consente di cogliere l'essenza senza essere travolti dal rumore e dalla minutaglia.

Scott Page, nel suo libro, sostiene che i modelli sono le finestre di un'abitazione: consentono di vedere cosa c'è fuori da angoli diversi. E, per converso, non avere o non usare modelli espone inevitabilmente al rischio di essere ciechi e di non vedere nulla. Page utilizza l'acronimo REDCAPE per aiutare a memorizzare i molti utilizzi dei modelli (e questo elenco è stato già citato in apertura)

- Reason - Ragionare
- Explain - Spiegare
- Design - Progettare
- Communicate - Comunicare
- Act - Agire
- Predict - Prevedere
- Explore - Esplorare

Il volume [3], che è stato fonte di grande ispirazione per Page, semplifica il quadro e sostiene che i modelli fanno principalmente tre cose: spiegano i fenomeni empirici; generano previsioni; aiutano a costruire e progettare sistemi.

Trovo illuminanti e appropriate alcune riflessioni pragmatiche e "partenopee" di Domenico Piccolo, in "Statistica", [5]¹: un modello è una rappresentazione *semplificata, analogica e necessaria della realtà*.

¹ Vedi anche [6].

Semplificare è il punto d'arrivo della rigorosa applicazione del cosiddetto "rasoio di Occam", che suggerisce di non aggiungere nessuna ipotesi non necessaria (quando se ne può usare una più semplice). Questo spinge a potare i modelli, rendendoli scarni e più comprensibili e funzionali, un sano *less is more* che tanto è presente nel buon design e nella buona architettura. I modelli sono *analogie*, non sono la realtà, e si focalizzano solo su alcuni aspetti, quelli che di volta in volta e per motivi vari sono oggetto di attenzione. I risultati dei modelli dipendono *necessariamente* dalle assunzioni che vengono fatte. È evidente che da assunzioni diverse discendono risultati diversi e poiché le assunzioni si possono (e si devono) cambiare emerge, nei casi virtuosi, una dialettica circolare in cui si fanno ipotesi, si formula un modello, lo si analizza concettualmente e se ne verifica la consistenza empirica e, infine, si riparte da nuove assunzioni, come in una spirale ascendente.

È importante ribadire che i modelli sono (solo) *storie sufficienti*: proprio perché il modello non è la realtà, è *uno dei modi* per spiegare alcuni fatti o meccanismi, non *il modo*. Un modello (e l'insieme delle assunzioni volatili che sono le sue fondamenta) è, appunto, *sufficiente* a spiegare la realtà ma ci sono spesso (in realtà, si dovrebbe dire quasi sempre) molti altri modi per farlo. Questa forma debole di conoscenza è utilissima, forse l'unica possibile, e i buoni modelli sono fonte d'ispirazione pur essendo flessibili e soggetti a modifiche e discussioni. Anche rischiando di essere fraintesi, un modello è una storia sufficiente a spiegare alcuni fatti in un modo che deriva necessariamente dalle assunzioni che lo fondano, come detto qualche riga or sono.

L'acronimo KISS, "keep it simple, stupid!" è uno slogan mnemonico che ritengo molto utile dato che ricorda con simpatia e forza la necessità di evitare appesantimenti e costi concettuali (anche perché ciò che non c'è "non si può rompere"). Il principio, probabilmente dovuto a Kelly Johnson, https://en.wikipedia.org/wiki/KISS_principle, si può declinare anche in altri modi come "keep it simple stupid" (osservate quanto una virgola possa cambiare le cose) o "keep it super simple" o, ancora "keep it simple and straightforward"².

² Tienilo semplice e chiaro.

Ma perché questi continui appelli alla semplicità? O, se volete, cosa c'è di male a creare un modello complesso e ingarbugliato? Un modo interessante di rispondere alla domanda è tenere sotto controllo l'*overfitting*, che è la peste del modellista. La tendenza al sovra-adattamento si adegua al rumore presente nei dati, nelle osservazioni, nei ragionamenti e sembra in grado di raggiungere un'alta precisione. Questa accuratezza *in sample* (sui dati osservati) è illusoria, dato che tipicamente i modelli complessi non hanno capacità di generalizzare *out of sample* (su nuove osservazioni), perché l'abbondanza di parametri consente di fotocopiare i dati ma, per così dire, non li capisce.

La figura 1 mostra l'adattamento ai dati di tre modelli, al variare del parametro di *smoothing* che ne rappresenta la semplicità³. Il modello a sinistra genera una curva che interpola quasi perfettamente i punti e una misura d'errore (ad esempio, basata sulla differenza fra previsioni e dati reali) sarebbe certamente molto bassa, inducendo magari a pensare, tanto ingenuamente quanto erroneamente, che si possono ottenere ottime previsioni. All'estremo opposto, la curva a destra, generata da un modello molto più semplice e praticamente rettilineo, coglie perfettamente l'andamento in funzione del peso e può essere usata con confidenza anche se, ovviamente, si compie un errore, fisiologico e ineliminabile, sia sui punti del campione che sulle nuove vetture che si dovessero esaminare.

I buoni scienziati limitano ai danni generati da modelli troppo complessi, cioè risultati fuorvianti, interpretabilità ridotta e mancata individuazione di relazioni rilevanti, ricercando la generalità dei modelli semplici (con pochi parametri). Due tecniche usate, specie in ambito statistico, per ottenere questi obiettivi sono la regolarizzazione e la cross-validation (validazione incrociata): nel primo caso, si cerca di ridurre la grandezza dei coefficienti stimati e, per fare un'analogia, è come quando non potendo ridurre il numero di attacchi scatenati da una malattia, si cerca almeno di ridurre l'impatto; nel secondo caso, i modelli

³ Si tratta di tre modelli non parametrici stimati sul peso di autovetture (wt sull'asse orizzontale) e sul consumo in km per litro di carburante (sull'asse verticale). È evidente che vetture più pesanti consumano di più!

sono addestrati su dati mai visti prima e ciò si ottiene segmentando le osservazioni in opportuni insiemi destinati a training e validation.

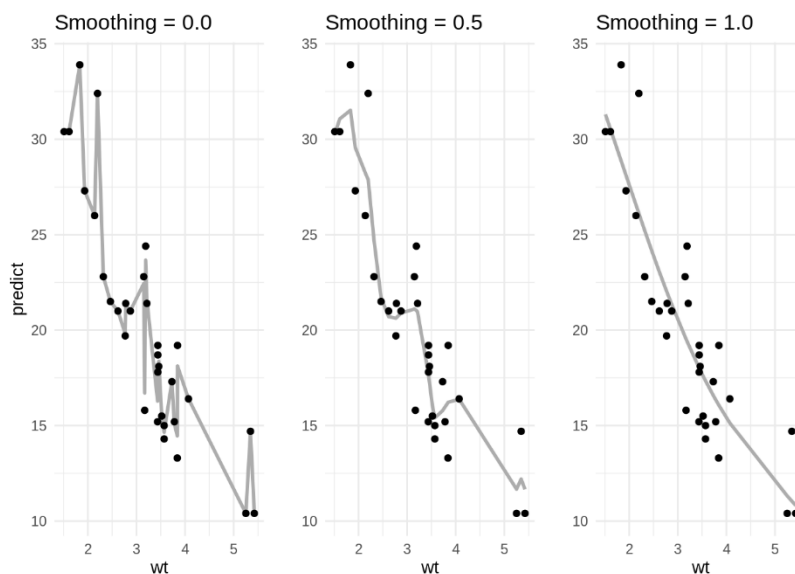


Figura 1. Esempi di modelli statistici, da sinistra a destra aumenta la semplicità. Fonte: <https://www.quantargo.com/blog/2019-01-23-why-management-loves-overfitting>. Tutte le figure di questo articolo sono a colori e gli originali si possono vedere sul sito della rivista: <https://www.centromorin.it/home/pubblicazioni/default.htm>.

Spero che le precedenti osservazioni mostrino perché costruire un buon modello sia un'arte, oltre che una scienza. È un esercizio d'equilibrio fra complessità e performance, richiede disciplina intellettuale e la capacità di rimettersi in gioco, cambiando e aggiustando senza mai lasciarsi prendere la mano, resistendo alla tentazione di aumentare cosmeticamente l'apparente precisione dei risultati.

Le sezioni che seguono discutono tre modelli molto diversi per concezione e ambito d'indagine. I modelli sono accomunati dallo sforzo di comprensione del presente e illuminano, forse, temi interessanti quali

la segregazione razziale, gli andamenti epidemici e la capacità di generare automaticamente testi e conversazioni “intelligenti” in linguaggio naturale. In particolare, la seconda sezione presenta il modello di segregazione di Schelling, la terza sezione si sofferma su una versione del modello compartimentale, detto SIR, di un’epidemia e infine, nella quarta sezione, ci sono alcune considerazioni su ChatGPT, il motore d’intelligenza artificiale con cui possiamo dialogare per avere informazioni e produrre testi per finalità varie.

2 Il modello di segregazione di Schelling

Nel 1971, Thomas Schelling, pubblica sul Journal of Mathematical Sociology [7], un articolo in cui analizza alcune determinanti della segregazione visibile in molte contesti urbani statunitensi, in cui molti quartieri appaiono densamente popolati da residenti di un’unica razza, quasi si fossero formati o riorganizzati su base etnica. Per avere un’idea pensate all’immagine, forse un po’ cinematografica, di New York divisa in

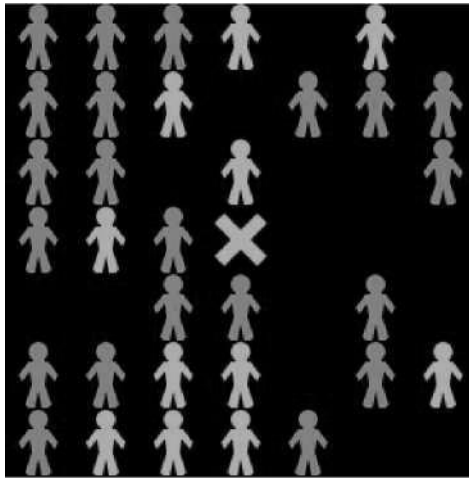


Figura 2: Una porzione di tessuto urbano abitata da agenti rossi ed azzurri. Il residente azzurro individuato da una croce al centro della figura non è soddisfatto perché uno solo dei suoi 4 vicini appartiene alla stessa razza. Osservate che i 4 spazi neri non contano.

un Queens pieno di WASPs (White AngloSaxon Protestants); Bronx, abitato da neri; Little Italy, dove ci sono i compatrioti; China Town, quasi esclusivamente popolato da cinesi e così via.

Thomas Schelling si chiede se questa segregazione, oltre che da motivi molto diversi come dinamiche reddituali, sociali e storiche, che quasi certamente hanno avuto e hanno un peso, possa dipendere da deboli preferenze personali.

Il suo modello⁴ è molto semplice:

- Assumiamo che i residenti siano di due colori (razze) e si possano collocare in una delle celle di una griglia quadrata. Per semplicità, ogni cella può essere, ad esempio, occupata da un agente rosso oppure azzurro o essere vuota (nera);
- Ogni residente desidera vivere in un contesto locale in cui almeno una frazione (percentuale) a di vicini abbia il suo stesso colore. Gli agenti in questa situazione si dichiarano soddisfatti e non fanno nulla;
- Gli agenti che invece non sono soddisfatti (quelli per cui la percentuale dei vicini della stessa razza non raggiunge a) traslocano in un'altra cella libera.

La figura 2 esemplifica quanto accade in una porzione di tessuto urbano in cui assumiamo che tutti preferiscano vivere in luoghi dove almeno il 40% (cioè, $a = 0.40$) dei vicini ha la stessa razza. Considerate il residente azzurro al centro della figura, contrassegnato con una croce: questo agente non sarà soddisfatto perché solo 1 dei 4 vicini che popolano l'intorno di 8 celle che lo circondano è della stessa razza. Ora, $1/4$ è minore del 40% che lo soddisferebbe e, quindi, quel residente si sposterà in un altro luogo nel periodo successivo. Se analizzate invece la situazione del cittadino rosso immediatamente a sinistra della croce azzurra, potrete concludere che si tratta di un residente soddisfatto dato che 3 dei suoi 6 vicini sono rossi e $3/6$ supera la soglia richiesta.

⁴ Thomas Schelling (1921–2016) è stato un economista americano, insignito del Premio Nobel per i suoi contributi alla teoria dei conflitti e della cooperazione (quindi, non per il modello di cui parliamo in questa sede, che lo ha reso popolarissimo anche a prescindere dal Nobel).

È immediato, ma anche interessante, notare che si può' essere soddisfatti nel modello anche in presenza di un mix etnico che vede, ad esempio, metà dei residenti di razze diverse. In questo senso, in precedenza

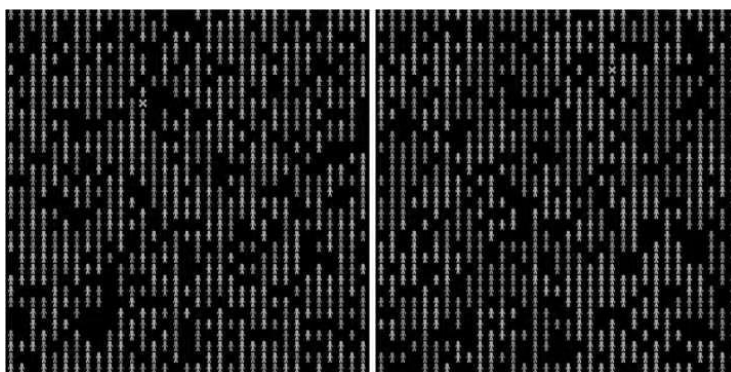


Figura 3: A sinistra si vede una configurazione causale di agenti, metà rossi e metà azzurri. Gli abitanti sono sparpagliati in modo che in media tutti vivono in luoghi in cui è egualmente probabile avere vicini rossi o azzurri. Dopo ripetuti spostamenti degli agenti via via insoddisfatti, si giunge alla situazione rappresentata sulla destra, che mostra evidentemente un massiccio grado di segregazione razziale, in cui quasi tutti i residenti vivono a contatto con vicini della stessa razza.

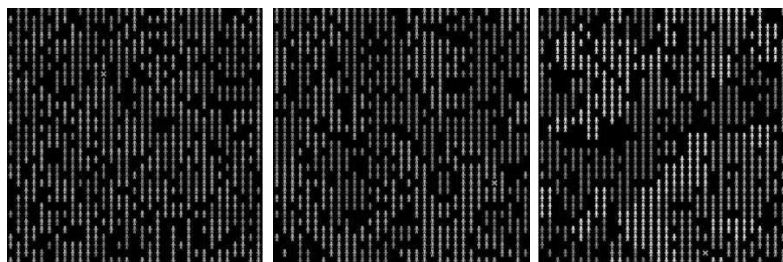


Figura 4: Tre configurazioni finali ottenute partendo dal pannello sinistro della Figura 3 quando si pone $a = 0.30$ (a sinistra), $a = 0.5$ (al centro) e quando si introduce anche un terzo di residenti gialli, aumentando il numero di razze a tre (a destra).

abbiamo usato l'aggettivo "debole" per descrivere delle preferenze per l'omogeneità di razza che "tollerano" ampia presenza di "diversi"⁵ .

La figura 3 mostra, a sinistra, una configurazione iniziale e casuale di residenti rossi ed azzurri e il suo stato finale, a destra, quando tutti sono contenti avendo avuto occasione, in vari periodi successivi, di spostarsi quando erano momentaneamente non soddisfatti del loro vicinato⁶ . La città sulla destra è fondamentalmente diversa da quella che vediamo a sinistra e la presenza di interi quartieri omogenei per razza è molto evidente. Si tratta di un risultato generico: anche se ogni simulazione produce ovviamente risultati diversi, gli spostamenti dei residenti che aspirano al 40% di vicini simili generano come esito città polarizzate, con ampie zone abitate solamente da una etnia e un numero esiguo di zone inter-etniche. La cosa appare sorprendente perché mentre le preferenze dei singoli erano non estreme (deboli, appunto), il risultato finale è marcato, per non dire preoccupante.

Si tratta di un risultato molto robusto e in Figura 4 si vede cosa accade quando, sempre partendo dalla situazione mostrata a sinistra della Figura 3, si cambia la soglia, ponendo $a = 30%$, $50%$, rispettivamente nei pannelli a sinistra e al centro.

Nel primo pannello della figura si vede come anche $a = 30%$ produca livelli ben visibili di segregazione, pur in presenza di qualche area "frastagliata". Per dare la misura dell'effetto, la media dei vicini con stessa razza è $72.6%$ quando, lo ribadiamo, tutti "si sarebbero accontentati" di un più modesto $30%$. L'immagine al centro di Figura 4 mostra, per $a=50%$, che la segregazione si accentua ancora più, originando non solo aree compatte ma quasi dei "fossati" che separano zone a prevalenza rossa o azzurra. Chi voglia fare degli esperimenti con una versione computazionale del modello di Schelling può scaricare il programma

⁵ Chissà se tutte queste virgolette indicano l'importanza del linguaggio e dei suoi effetti quando si parla di discriminazione, accoglienza, segregazione?

⁶ Il lettore attento dalla vista acuminata potrà ritrovare nella quadrante in alto a sinistra la croce azzurra visibile anche nella Figura ??? . Inoltre, quel residente "crociato" e inizialmente insoddisfatto alla fine si è spostato un po' a destra e in alto, come si vede nel pannello di destra.

NetLogo, <https://ccl.northwestern.edu/netlogo/>, e lanciare Segregation dalla libreria di esempi che accompagnano il software.



Figura 5: La città di Chicago nel 2010, colorata a seconda della prevalenza etnica, fonte: <https://towardsdatascience.com/schellings-model-of-racial-segregation>

Il principale risultato del modello di Schelling è quello di mostrare computazionalmente come preferenze non troppo marcate a livello individuale nondimeno diano origine a effetti aggregati molti più intensi (ad esempio, dal desiderato 30% al 73% di vicini del pannello di sinistra della Figura 4). È interessante capire come questo accada per due motivi: un agente insoddisfatto che si sposta tende ad accentuare la polarizzazione, da un lato perché abbandonando un'area tende a impoverire ulteriormente quella zona in diversità e, di conseguenza, in futuro forse altri la abbandoneranno; dall'altro c'è un effetto anche nel quartiere "di arrivo", dove si possono rompere (precari) equilibri che rendevano tutti felici, innescando nuovamente movimenti a catena. Non si può dedurre che preferenze blande generino effetti macroscopici blandi, come se ci fosse una qualche forma di gradualità o continuità. Il colpevole di questa sorpresa è l'interazione ripetuta che amplifica e potenzia, per i meccanismi appena descritti, gli effetti delle preferenze

dei singoli. Molti sistemi complessi sono interessanti e vivaci proprio perché vi si dispiegano massicce interazioni fra individui e con scale diverse.

Questa conclusione generale, come detto prima parlando di robustezza, è costante e non muta cambiando, anche di molto, la dimensione degli intorni o la soglia o rendendo eterogenei gli agenti di modo che uno abbia soglia diversa dall'altro oppure, ancora, inserendo una terza razza gialla, come mostrato nel pannello di destra della Figura 4 in cui abbiamo utilizzato $a = 50\%$.

Il modello di Schelling offre un esempio di emergenza, la proprietà dei sistemi complessi di generare in aggregato fenomeni (segregazione, in questo caso) che non sono facilmente prevedibili o riconducibili alle caratteristiche degli agenti (blanda preferenza per l'omogeneità) che vivono nel sistema. L'emergenza è sorpresa, desta curiosità e sconcerto, è difficile da razionalizzare. It's the interaction, baby!

Il modello, per molti versi è di semplicità assoluta: una città diventa una griglia, c'è il solo parametro a e poco più. Eppure, capiamo meglio che la segregazione su base razziale potrebbe essere generata anche da preferenze sfumate che, nel lungo periodo, possono dare forma a città in cui il melting pot è evaporato a poco a poco per troppi traslochi, senza nemmeno che questi fossero figli di razzismo od ostilità. Osservate, per tornare a un concetto espresso prima, che il modello non dice che la segregazione è figlia delle preferenze ma che queste ultime sono sufficienti (da sole) a spiegarla. Forse contano anche la politica, l'economia e i mass-media, certo. Ma il modello dovrebbe far riflettere sui potenziali effetti di espressioni scivolose come "non sono razzista e accetto anche un po' di diversi" o "è perfettamente legittimo voler vivere con vicini della stessa razza", che mostrano preferenze blande. Chi le usa non sarà razzista ed è tutto legittimo ma c'è il rischio di derive verso società che non riconosciamo e che non dovrebbero piacerci per nulla.

Notiamo, alla fine di questa sezione, che si può pure ragionare a ritroso: il fatto che una città come Chicago apparisse nel 2010 come in Figura 5 non dimostra che necessariamente i suoi abitanti non tollerino la diversità e il modello di Schelling ci dice anche quanto il cambiamento

della forma mentis e delle preferenze individuali possa alla lunga incidere sul mondo, proprio come gocce lievemente diverse possono creare oceani molto distinti.

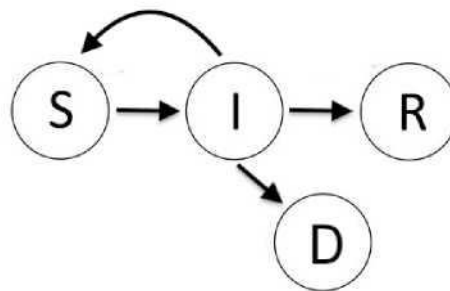


Figura 6: Rappresentazione schematica del modelli SIR con i comparti S-suscettibili, I-infetti, R-recuperati e D-deceduti. Le frecce indicano le direzioni dei possibili flussi in entrata e uscita.

3 Il modello epidemiologico SIR

Esaminiamo ora la madre di tutti i modelli epidemiologici, il cosiddetto SIR, abbreviazione di “Susceptible, Infected, Recovered” (in italiano, infettabili storpiato per comodità in “suscettibili”; infetti; guariti o “recuperati”)⁷.

Assumiamo di dividere gli agenti in compartimenti, insiemi di individui omogenei ai fini dell’epidemia: ogni agente può essere suscettibile o infetto o recuperato o deceduto. La Figura 6 raffigura un diagramma che mostra come un membro del comparto suscettibile possa passare al comparto degli infetti; in modo simile gli infetti possono recuperare, guarendo definitivamente, o tornare in S, fra quanti si possono re-infettare, o entrare fra i deceduti (D ed R sono definiti stati assorbenti dato

⁷ La letteratura è sterminata, l’esempio che segue è tratto da [3]. Per iniziare si veda la sezione sui modelli compartimentali di https://it.wikipedia.org/wiki/Modelli_matematici_in_epidemiologia

che una volta entrati in quei compartimenti non si esce più); infine, i recuperati, cioè i guariti, rimangono tali per sempre (immunizzandosi definitivamente).

Ogni epidemia in questo modello è un travaso continuo di persone fra compartimenti e per fissare le idee assumiamo che:

- il 5% dei suscettibili si infetta per ciascun periodo (e, implicitamente, il rimanente 95% resta suscettibile-infettibile);
- l'1% dei malati muore, il 10% guarisce con immunità, il 4% guarisce ma non diventa immune (tornando fra i suscettibili). Il rimanente 85% resta malato per un altro periodo;
- il 100% dei recuperati diventa immune;
- tanto tristemente quanto lapalissianamente, il 100% dei deceduti resta tale.

Questi dati si possono utilmente inserire in una matrice 4 x 4 di transizione:

$$V = \begin{pmatrix} S & I & R & D \\ 0.95 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0.10 & 1 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice V si può agevolmente leggere per colonne, che sono state intitolate allo stato che rappresentano: come detto, i suscettibili si ripartiscono in modo che il 95% vada (cioè, resti) in S e il 5% migri verso I , si veda la prima colonna; nella seconda colonna si vede che il 4% torna in S , l'85% resta infetti, il 10% si sposta su R e il rimanente 1% muore, trasferendosi in D . Tutte le colonne hanno elementi che sommano a 1, dato che ogni membro dei compartimenti da qualche parte deve andare senza aumenti o riduzioni di numero e le due ultime colonne mostrano visivamente gli stati assorbenti per la presenza di valori unitari: il 100% degli appartenenti a R e a D è inchiodato nello stato in cui si trova.

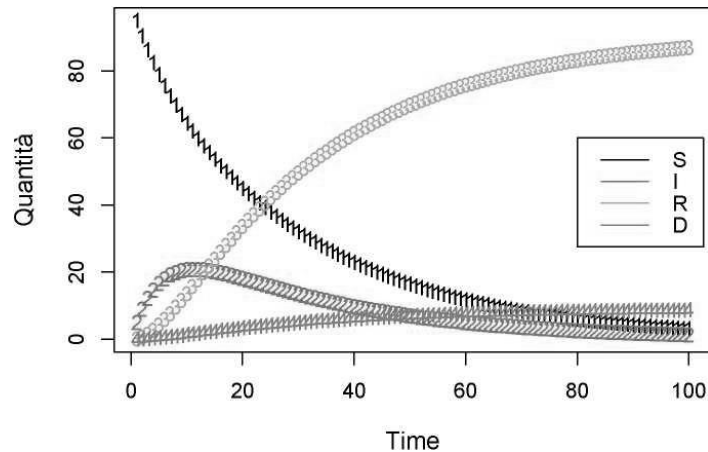


Figura 7: Soluzione del modello SIR con i parametri della matrice di transizione V .

La dinamica della popolazione si può agevolmente descrivere tenendo traccia di quante persone si trovano in ogni stato in ciascun periodo (ad esempio, ogni settimana). Sia $x_0 = (100, 0, 0, 0)$ il vettore (colonna) della distribuzione della popolazione nei 4 stati S, I, R, D al tempo $t = 0$. È facile verificare che la situazione al tempo $t = 1$ è $x_1 = Vx_0$ o

$$x_1 = Vx_0 = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0.10 & 1 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 95 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Allo stesso modo, continuando ad ottenere x_{t+1} tramite la moltiplicazione Vx_t si ottiene

$$x_2 = Vx_1 = \begin{pmatrix} 90.45 \\ 9 \\ 0.5 \\ 0.05 \end{pmatrix} \text{ e } x_3 = Vx_2 \cong \begin{pmatrix} 86.29 \\ 12.17 \\ 1.4 \\ 0.14 \end{pmatrix} \text{ e così via.}$$

Nella terza settimana dall'inizio dell'epidemia, quindi, il numero di infettabili è sceso a 86.29 per ogni centinaio di persone, il 12.17% è infetto, quasi l'1.5% si è immunizzato e 0.14 persone ogni 100 sono morte.

Il modello è essenzialmente un'equazione alle differenze lineare con 4 variabili di stato e si può descrivere la sua soluzione in forma (semi-) chiusa utilizzando gli autovalori e gli autovettori della matrice V e la condizione iniziale x_0 . È possibile risolvere numericamente il modello, continuando iterativamente a moltiplicare il vettore x per la matrice V , anche con un semplice foglio di calcolo. La Figura 7 mostra l'andamento nel tempo delle 4 sub-popolazioni risultanti.

L'andamento delle curve epidemiche è estremamente interessante: si vede che il numero degli infettabili in S (curva nera) è destinato lentamente a scendere, man mano che gli agenti acquisiscono l'immunità (che in questo caso si ottiene solo dopo la malattia) o muoiono. Si vede che il numero dei malati (in rosso) aumenta per circa 11 settimane e poi scema lentamente, contribuendo all'aumento dei deceduti (in blu). Per differenza, il numero di chi è guarito e immune aumenta. Dopo 100 settimane, come si vede in figura, $x_{100} \cong (3.07, 1.31, 86.93, 8.69)$ o, in altre parole, solo il 3% circa della popolazione è ancora infettabile, i malati sono poco più dell'1% e quasi l'87% ha acquisito l'immunità a fronte di 8.7 decessi per ogni 100 abitanti. Asintoticamente si può verificare che $x_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} x_t = (0, 0, 90.91, 9.09)$ che significa che, "alla fine", circa il 9.10% degli agenti sarà deceduto mentre il rimanente avrà conseguito l'immunità.

Questi risultati, seppur non calibrati su alcuna situazione concreta e non necessariamente realistici, assieme alle altre analisi che si possono fare simulando e sperimentando sul modello⁸, sono molto utili. Ci soffermiamo su alcune ulteriori considerazioni fondamentali.

⁸ Come detto, il modello è in parte analizzabile in forma chiusa e, ad esempio, x_∞ è stato ottenuto utilizzando una trattazione formale che non è svolta in questa sede ma è alla portata di chi conosce l'algebra lineare.

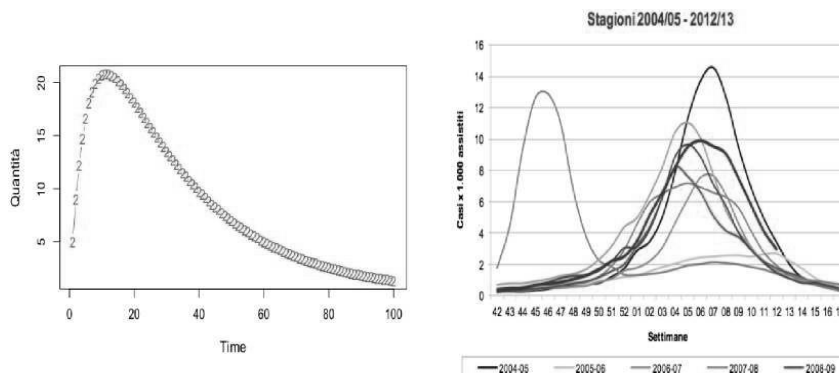


Figura 8: A sinistra, il numero degli infetti nel modello SIR (si tratta della stessa curva già vista in Figura 7 con diversa scala verticale). Sulla destra, il numero di infetti in diverse epidemie influenzali. Le somiglianze strutturali fra le curve sono notevoli.

La curva rossa degli infetti nel modello assume la forma di una campana oblunga. Questa forma, generata da una semplice ricorsione matriciale, approssima bene gli andamenti osservati in molte epidemie, come mostrato in Figura 8, dove abbiamo zoomato solo sulla curva rossa e deformato il grafico sul lato destro al solo scopo di appaiarlo e renderlo visivamente confrontabile coi dati storici mostrati sul lato sinistro.

Le analogie fra le curve sono impressionanti, specie se si considera che sulla sinistra sono disegnate epidemie influenzali di diversa gravità e verificatesi nel corso di un decennio. L'approssimazione non è perfetta, anche perché non è stato fatto alcuno sforzo per adattare il modello ai dati, ma l'idea di studiare una pandemia sotto la lente dei flussi fra compartimenti appare assai ragionevole e flessibile.

Se quanto appena visto dimostra che una buona idea fa fare molta strada in termini descrittivi, vogliamo fornire un esempio in più sull'utilità del modello SIR. Un aspetto in particolare della curva rossa è di enorme interesse, il suo punto di massimo. Vorremmo infatti abbassarlo, se possibile, e spostarlo a destra. Ridurre il massimo, che ora è poco più di 20, vuol dire aiutare le strutture sanitarie a farsi carico di un numero

minore di ammalati anche nel picco pandemico. Traslare a destra il punto di massimo, ora posto a 11 settimane, ci farebbe guadagnare tempo consentendo di migliorare logistica e organizzazione per fare fronte al picco. I tecnici, con espressione che è diventata ben nota durante la recente epidemia di COVID, parlavano in continuazione di “allungare la curva”, riferendosi esattamente alla linea rossa rappresentata a sinistra in Figura 8.

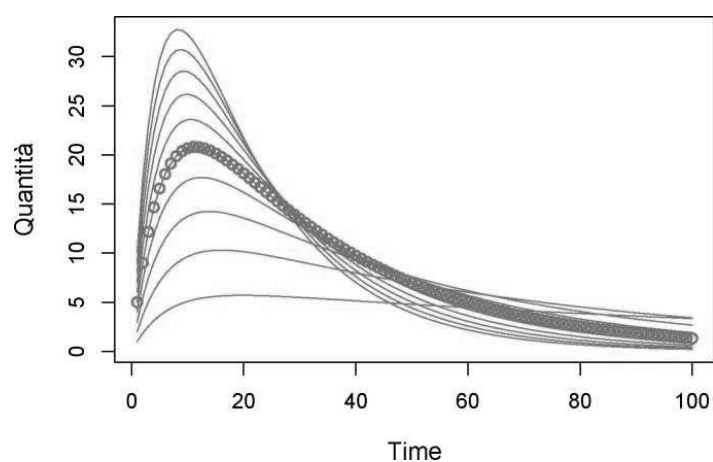


Figura 9: Curve di mortalità ottenute quando $a = 0.01, 0.02, \dots, 0.09, 0.10$, dalla più bassa alla più alta. La curva relativa ad $a = 0.05$, visibile anche in Figura 7, è evidenziata in mezzo al “fascio” di curve.

Riprendiamo la matrice V e vediamo quello che succede generaliz-

zando la sola prima colonna: $V(a) = \begin{pmatrix} 1-a & 0.04 & 0 & 0 \\ a & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0.10 & 1 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in cui a

prima assumeva il valore 0.05 (era il 5% dei suscettibili che s’infettava).

Che cosa accade se siamo in grado di alterare quel parametro? La Figura 9 mostra le diverse curve rosse che si ottengono facendo variare a in $\{0.01, 0.02, \dots, 0.09, 0.10\}$. Per comodità, la curva relativa al caso di

riferimento visto prima, $a = 0.05$, è evidenziata in mezzo al fascio di andamenti che si vede in figura.

Risulta evidente che diminuire a consente di “allungare la curva” notevolmente: quando $a = 0.03$, ad esempio, il massimo diventa 14.24 dopo 14 settimane. In altre parole, abbiamo ridotto il picco di pazienti infetti di quasi un terzo e abbiamo guadagnato una ventina di giorni. Il modello mostra che questo risultato è possibile riducendo il tasso di contagio da 5 a 3%. Bene, ma come si fa? Ricorrendo a misure di contenimento (leggi, lockdown) e a dispositivi di protezione individuale come le mascherine e i guanti.

In questo caso non serve nemmeno che il modello fornisca previsioni accurate, o che si voglia usarle, perché in ogni caso mostra con lucidità quelle che sono le dinamiche del fenomeno che si tenta di capire e di governare ed è una chiamata alle armi: se riduci a (e certamente costa fatica farlo), allora il picco si schiaccia e arriva dopo. Ambedue le cose si traducono in vite umane salvate e minore sofferenza inflitta a pazienti, operatori sanitari e familiari.

Per concludere questa sezione, osservate che il modello predice che, prima o poi, tutti si ammaleranno. Non serve nemmeno la matematica per capirlo, basta riguardare la Figura 6 per vedere che per uscire da S e finire guarito in R oppure morto in D bisogna passare per I, infettandosi⁹. Quindi, prima o poi se lo prendono tutti, è vero. Questa osservazione è stata usata da teste di legno e cuori di pietra per argomentare che lockdown e altre misure prese in occasione dell'epidemia di COVID erano, in ultima analisi, inutili e vessatorie dato che, appunto, chi ce lo fa fare se ce lo becchiamo tutti? Lasciamo che la natura faccia il suo corso e amen. O no? Ripercorro questo sragionamento sottile proprio per mostrare che senza modelli è difficile controbattere a simili ciarlatanerie di stampo #NoVax con efficacia. La risposta, alla luce del

⁹ Ci sono altre versioni del SIR in cui questo non succede: pensate a cosa accade se aggiungete una freccia che va da S a R direttamente, ad esempio perché alcuni suscettibili si vaccinano e diventano immuni per sempre o per un certo periodo. Non c'è un modello giusto e tutte queste varianti aiutano ad esplorare possibili mondi e le loro implicazioni.

modello, è un sonoro “No, non è lo stesso!”. Come visto prima, la conferma che ce lo prendiamo tutti non significa che tutto è ineluttabile e la curva la possiamo allungare, lavorando su a , salvando vite e, cosa meno importante, anche la coerenza del ragionamento e la pulizia della scienza fatta bene, pur con tutti i limiti del caso.

4 ChatGPT

→ ChatGPT, acronimo di “Chat Generative Pre-trained Transformer”, è un avanzato modello di linguaggio sviluppato da OpenAI. Si basa sull’architettura GPT-3.5 che è fra le più recenti evoluzioni nell’elaborazione del linguaggio naturale.

Utilizza reti neurali, sistemi computazionali ispirati al cervello umano, per comprendere e generare testo. Apprende da vaste quantità di dati testuali, consentendogli di generare risposte adeguate al contesto e coerenti.

Risponde a prompt generando testo simile a quello umano. Dimostra comprensione contestuale generando risposte coerenti e rilevanti al contesto.

Le sue capacità includono risposte a domande, completamento di frasi e conversazioni interattive. Si nutre di diverse fonti testuali, permettendo di imitare vari stili di scrittura e ambiti di contenuto... ←

Rileggete, se volete, le quattro frasi precedenti, quelle che ho incluse fra due freccette, perché non sono state scritte da Paolo Pellizzari ma da ChatGPT medesimo! Curiosamente, un programma-modello che parla di sé stesso: una volta, forse, avremmo pensato che questa specie di “autoconsapevolezza” era la prova stessa dell’intelligenza ma ora, giustamente, siamo più scafati e vi consiglio di attendere un attimo prima di dare giudizi¹⁰.

¹⁰ Anche in questo caso non è semplice dare indicazioni bibliografiche comprensibili: partirei dalla pagina <https://it.wikipedia.org/wiki/ChatGPT>, che dà anche cenni storici, o meglio ancora da <https://www.techrepublic.com/arti->

Resta il fatto che il testo generato da ChatGPT è informativo e di buona qualità, anche se vedo qualche ripetizione nella frase che riportato in corsivo). Ma non ha senso andare per il sottile e io ne sono rimasto impressionato.

Ha senso parlare di ChatGPT in questo articolo perché esso presuppone un modello di linguaggio, pensato come a una sequenza di parole in cui, prima e dopo un certo vocabolo, seguono altre parole con una certa probabilità. ChatGPT, quindi compone le frasi assemblandole in modo che dopo un pezzo di testo seguano parole che con alta probabilità si trovano in quel contesto nei ziloni¹¹ di pagine che ha letto e “memorizzato”. Se chiedete a ChatGPT di completare la frase “the cat is”, probabilmente vi dirà “on the table” dato che nel contesto delle pagine in cui trova “the cat is” poi molto spesso si trova un “on the table”.

Osservate che, se di comprensione si tratta, è una ben strana “comprensione”: ChatGPT non sa cosa sia un “cat” né un “table” e non perché ignora l’inglese. Sono solo “parole, parole, parole” come canterebbe Mina, e queste parole creano un contesto che probabilmente si completa in un modo più spesso che in un altro. ChatGPT, in un certo senso, nemmeno capisce se parliamo in inglese o in un’altra lingua ma è altamente probabile che, se inizi in inglese, la frase prosegua con l’inglese e non con lo swahili! Se etimologicamente “comprendere” significa cum-prendere, “prendere con sé” o “fare proprio”, allora ChatGPT a mio modesto avviso non capisce nulla e non porta con sé alcunché, ma scrive e parla molto bene perché sa cosa dire dopo che si sono dette altre cose.

Ritengo molto interessante che un simile modello di linguaggio possa produrre risposte e performance che sono quanto di più avanzato il genere umano abbia ottenuto finora da un computer. E mi chiedo, retoricamente ma non tanto, se anche noi quando parliamo ci riferiamo a dei contenuti oppure infiliamo parole appropriate come perline nel filo di

cle/chatgpt-cheat-sheet/. Mi pare molto utile anche la lettura, di più ampio respiro, che trovate in <https://www.iltascabile.com/scienze/origini-intelligenza-artificiale/>

¹¹ Francamente, non so quante pagine abbia consultato... e “zillion” è una parola inglese che sta per “grande numero incalcolabile”.

una collana contestuale. E mi chiedo, con un vago senso di crescente smarrimento, se i nostri studenti, o certi nostri politici se è per questo, abbiano capito quello che dicono o semplicemente dicano le cose nel modo giusto (in senso di contesto, avendo capito quello che ci si aspetta da loro nelle interrogazioni o al telegiornale).

Preferisco evitare di dilungarmi su aspetti tecnici relativi a ChatGPT, che si possono trovare in [1] o al link https://proceedings.neurips.cc/paper_files/paper/2020/file/1457c0d6bfc4967418bfb8ac1.pdf, per soffermarmi su alcune altre cose. ChatGPT è un *large language model* diverso dai due visti in precedenza: il modello di segregazione di Schelling è per certi versi semplicissimo e ha poco più di un parametro; nel SIR il numero di parametri, i numeri che stanno nella matrice di transizione, possono raggiungere la mezza dozzina; ChatGPT, nella versione di cui vi parlo, ha 170 milioni di parametri, si tratta dei pesi della rete neurale che analizza il testo e snocciola parole altamente probabili come output. L'enormità di 170.000.000 in rapporto alle nostre abitudini è sconcertante ma può dipendere dalla complessità del compito affidato al modello: parlare con un umano utilizzando il suo linguaggio (che è intricato, denso, e si evoluto in migliaia di anni). In termini relativi, poi, se si confronta il numero di frasi o vocaboli presenti in milioni di pagine con i 170 milioni di connessioni, può anche darsi che il modello sia compatto e quasi "semplicistico".

Dal punto di vista didattico, ChatGPT può essere utilmente impiegato per formulare domande a risposte multiple come le due che vedete di seguito (le risposte giuste indicate dal programma sono contrassegnate con un asterisco):

Qual è l'acronimo corretto per il modello di linguaggio sviluppato da OpenAI chiamato "ChatGPT"?

1. "Chat Generative Pre-trained Transformer" *
2. "Chat General Processing Tool"
3. "Cognitive Grammar Prediction Technique"
4. "Clever Grammar Processing Toolkit"

Oppure: *Qual è la soluzione corretta dell'equazione seguente:*

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 ?$$

1. $x = 1$ e $x = -3$
2. $x = 3$ e $x = -1$ *
3. $x = 3$ e $x = 1/2$
4. $x = -3$ e $x = 1/2$

Suggerisco cautela nell'uso di ChatGTP nell'insegnamento della matematica, dato che il testo prodotto è contestuale ma "non compreso" nel frutto di calcoli o di passaggi logici. Anche se ci sono migliaia di pagine didattiche che parlano di equazioni di secondo grado da cui attingere esempi, conti, pezzi di testo, frasario e quant'altro, nel caso appena visto, la risposta corretta non è fra le scelte proposte!

Questo potrebbe comunque essere un vantaggio poiché si può sempre chiedere agli studenti di usare ChatGPT per risolvere gli esercizi e poi discuterne la correttezza che, ripeto, non è scontata, avviando una discussione che, oltre al pregio di verificare se lo studente ha compreso quello di cui parla, ha quello di aumentarne il senso critico e la consapevolezza. Come ultimo esempio, alla mia richiesta "vorrei una domanda in cui anche la soluzione dipende da un parametro", ChatGTP testualmente ha risposto quanto vedete di seguito fra le freccette:

→ Ecco una domanda in cui la soluzione dipende da un parametro:

Data l'equazione quadratica $3x^2 - (k^2 - 1)x + 2 = 0$, dove k è un parametro, qual è il valore di k che rende l'equazione a una sola soluzione reale?

1. $k = 1$
2. $k = 2$
3. $k = -1$
4. $k = 0$

Risposta corretta: 2) $k = 2$. Quando $k = 2$, l'equazione avrà una sola soluzione reale. ←

Lascio al lettore il piacere di trovare, oltre che qualche difetto linguistico, l'errore matematico e il garbuglio di numeri complessi e altro che ne consegue. Di sicuro sbagliando s'impara e controllare se lo studente è in grado di verificare quanto scritto da ChatGPT, o se può sistemare

il testo e i conti, è uno strepitoso modo di condurre una sessione di lavoro istruttiva e "frizzante"!

5. Conclusioni

In questo articolo abbiamo ragionato sui modelli, costruzioni concettuali utili a descrivere i fenomeni e a razionalizzare quello che ipotizziamo in modo sistematico, al fine di produrre previsioni, comprensione e linee guida per l'azione.

Gli esempi proposti, il modello di segregazione di Schelling, il modello a comparti SIR e ChatGPT, esemplificano anche diversi livelli di complessità: da un solo parametro, sufficiente a spiegare la separazione etnica, si arriva a 170 milioni di connessioni per approssimare linguaggio e ragionamento, passando per un modello in cui mezza dozzina di parametri descrivono con efficacia i flussi fra suscettibili, infetti e recuperati in una pandemia.

Tutti e tre i modelli, evidentemente, fanno delle ipotesi e sono sbagliati dato che la segregazione è più di quello che abbiamo visto, le curve pandemiche fanno le bizze e ogni virus ha le sue particolarità, il linguaggio è ben più complesso del "contesto". Eppure, ognuno degli esempi discussi può aiutare a navigare nella realtà, ispirare i decisori e promuovere dialoghi "scientifici" fra persone di buona volontà.

Riferimenti bibliografici

1. Tom Brown, Benjamin Mann, Nick Ryder, Melanie Subbiah, Jared D Kaplan, Prafulla Dhariwal, Arvind Neelakantan, Pranav Shyam, Girish Sastry, Amanda Askell, Sandhini Agarwal, Ariel Herbert-Voss, Gretchen Krueger, Tom Henighan, Rewon Child, Aditya Ramesh, Daniel Ziegler, Jeffrey Wu, Clemens Winter, Chris Hesse, Mark Chen, Eric Sigler, Mateusz Litwin, Scott Gray, Benjamin Chess, Jack Clark, Christopher Berner, Sam McCandlish, Alec Radford, Ilya Sutskever, and Dario Amodei. Language models are few-shot learners. In H. Larochelle, M. Ranzato, R. Hadsell, M.F. Balcan, and H. Lin, editors, *Advances in Neural Information Processing Systems*, volume 33, pages 1877-1901. Curran Associates, Inc., 2020.

2. Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Introduction to Applied Linear Algebra*. 2018.
3. Charles Lave and James March. *An Introduction to Models in the Social Sciences*. University Press of America, 1993.
4. Scott Page. *The Model Thinker: What You Need to Know to Make Data Work for You*. Basic Books, 2018.
5. Domenico Piccolo. *Statistica*. Il Mulino, 2010.
6. Domenico Piccolo and Cosimo Vitale. *Metodi statistici per l'analisi economica. Statistica e modelli lineari*. Il Mulino, 1974.
7. Thomas Schelling. *Dynamic models of segregation*. *Journal of Mathematical Sociology*, 1:143-186, 1971.