Department of Applied Mathematics, University of Venice

QUADERNI DI DIDATTICA

Pierangelo Ciurlia, Riccardo Gusso,
Martina Nardon

Esercizi di algebra lineare e sistemi di equazioni lineari con applicazioni all'economia

Quaderno di Didattica n. 22/2006
Giugno 2006

I Quaderni di Didattica sono pubblicati a cura del Dipartimento di Matematica Applicata dell'Università di Venezia. I lavori riflettono esclusivamente le opinioni degli autori e non impegnano la responsabilità del Dipartimento. I Quaderni di Didattica vogliono promuovere la circolazione di appunti e note a scopo didattico. Si richiede di tener conto della loro natura provvisoria per eventuali citazioni o ogni altro uso.

Esercizi di algebra lineare e sistemi di equazioni lineari con applicazioni all'economia

Pierangelo Ciurlia
<ciurlia@unive.it>

Riccardo Gusso
<rgusso@unive.it>

Martina Nardon
<mnardon@unive.it>

Dipartimento di Matematica Applicata
Università Ca' Foscari di Venezia

Dipartimento di Matematica Applicata
Università Ca' Foscari di Venezia
Dorsoduro 3825/E
30123 Venezia, Italy
http://www.dma.unive.it/

Premessa

Questa dispensa propone alcuni esercizi svolti di algebra lineare e sui sistemi di equazioni lineari con applicazioni all'economia. Alcuni problemi sono tratti da temi d'esame o ispirati agli esercizi del testo di Waner e Costenoble (2006) "*Strumenti Quantitativi per la Gestione Aziendale*".

Questo lavoro è rivolto agli studenti dei corsi di Matematica II della Facoltà di Economia e rappresenta un utile strumento per la preparazione all'esame.

GLI AUTORI

Esercizi di algebra lineare

Introduzione

Alcuni esercizi su vettori e matrici sono più semplici e sono da considerarsi propedeutici agli esercizi successivi. La seconda parte di questa dispensa è dedicata ai sistemi di m equazioni lineari in n incognite. Particolare attenzione è rivolta alle applicazioni economiche.

Vettori e matrici

Esercizio 1 *Siano* $\mathbf{x} = \big(2, -5, 10, 6\big)$ *e* $\mathbf{y} = \big(-11, 4, 15, -8\big)$ *due vettori di* $\mathbb{R}^4$. *Calcolare il prodotto scalare* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Soluzione. Dati due vettori $\mathbf{x} = \big(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n\big)$ e $\mathbf{y} = \big(y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n\big)$ di $\mathbf{R}^n$, si definisce prodotto scalare di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ il numero reale

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1\, y_1 \,+\, x_2\, y_2 \,+\, \dots \,+\, x_n\, y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k .$$

Dalla definizione, risulta quindi

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \big(2,\ -5,\ 10,\ 6\big) \cdot \big(-11,\ 4,\ 15,\ -8\big) = \\
&= 2 \cdot (-11) \,+\, (-5) \cdot 4 \,+\, 10 \cdot 15 \,+\, 6 \cdot (-8) = \\
&= -22 \,-\, 20 \,+\, 150 \,-\, 48 \,=\, 60 .
\end{aligned}$$

□

Esercizio 2 *Le vendite del mese di dicembre della libreria* Books & Co. *sono riportate nella seguente tabella:*

narrativa per ragazzi	350
saggistica	56
romanzi	458
guide turistiche	89

Si stima che il prezzo medio di un libro per ragazzi sia € 12.50*, quello di un saggio sia* € 28.00*, mentre per un romanzo si spendono mediamente* € 16.80 *e per una guida turistica* € 23.00*. Si determini il ricavo totale relativo alle vendite del mese di dicembre.*

Soluzione. Rappresentiamo le quantità vendute per ciascuna tipologia in un vettore

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 350 & 56 & 458 & 89 \end{pmatrix},$$

e analogamente rappresentiamo il vettore dei prezzi

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 12.50 & 28.00 & 16.80 & 23.00 \end{pmatrix}.$$

Il ricavo totale sarà dato dal prodotto scalare di $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p}$:

$$R = \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + q_3 p_3 + q_4 p_4 .$$

Quindi

$$R = 350 \cdot 12.50 \,+\, 56 \cdot 28.00 \,+\, 458 \cdot 16.80 \,+\, 89 \cdot 23.00 \,=\, 15\,684.40 .$$

Osservazione 1: Il risultato del prodotto scalare di due vettori è un numero $\mathbb{R}$.

Osservazione 2: Il prodotto scalare di due vettori può essere considerato come il prodotto tra due matrici: una matrice $1 \times n$ per la seconda matrice $n \times 1$ (nel caso specifico, $n = 4$)

$$R = \begin{pmatrix} 350 & 56 & 458 & 89 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12.50 \\ 28.00 \\ 16.80 \\ 23.00 \end{pmatrix} \,=\, 15\,684.40 .$$

□

Esercizio 3 *Si dica se è possibile effettuare il prodotto delle due matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

e in caso affermativo calcolarne il risultato.

Soluzione. Ricordiamo che per poter effettuare il prodotto di due matrici il numero n di colonne della prima deve essere uguale al numero m di righe della seconda. In questo caso, si ha $n = 4$ e $m = 4$ per cui ciò è possibile. Il risultato si ottiene effettuando il prodotto riga per colonna, ricordando che l'elemento c_{ij} della matrice prodotto C è definito in questo caso da

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} b_{kj}.$$

Si ottiene quindi come risultato una matrice 3×2

$$C = \begin{pmatrix} 17 & -16 \\ 17 & -26 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} .$$

□

Esercizio 4 *Calcolare il determinante della seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -15 & 0 & 7 \\ -3 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Il Teorema di Laplace ci dice che il determinante di una matrice quadrata A di ordine n è dato dalla somma dei prodotti degli elementi di una qualsiasi riga i-esima per i rispettivi complementi algebrici

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,(-1)^{i+j}\,M_{ij},$$

oppure dalla somma dei prodotti degli elementi di una qualsiasi colonna j-esima per i rispettivi complementi algebrici

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,(-1)^{i+j}\,M_{ij}.$$

Allo scopo di ridurre al minimo i calcoli necessari, calcoliamo il determinante di A sviluppando rispetto alla seconda riga (o, equivalentemente, rispetto all seconda colonna) poiché è quella che contiene il maggior numero di zeri. Si ha

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-15)\,(-1)^{2+1}\,\det\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} + 7\,(-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} = \\ &= 15\big(5\cdot 4 - 2\cdot 8\big) - 7\big((-1)\cdot 8 - 5\cdot(-3)\big) = 11. \end{aligned}$$

□

Esercizio 5 *Si calcoli il determinante della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Per calcolare il determinante utilizziamo la regola di Laplace, che dice che il determinante di una matrice A è dato dalla somma dei prodotti di una qualsiasi riga i-esima (o colonna i-esima) per i rispettivi complementi algebrici

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad \text{(sviluppo secondo la riga } i\text{-esima).}$$

Per semplificare i calcoli è opportuno scegliere una riga o colonna che contenga il maggior numero di zeri; nel nostro caso ad esempio la seconda riga o la terza colonna. Sviluppando ad esempio lungo la terza colonna, si ha

$$\det(A) = 2(-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} + 2(-1)^{4+3}\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

In modo analogo otteniamo

$$\det\begin{pmatrix}1 & \text{-1} & 1\\ 0 & \text{-1} & 2\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix} = 1(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix}\text{-1} & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix} + 1(-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix}\text{-1} & 1\\ \text{-1} & 2\end{pmatrix} = (-1-8)+(-2+1) = -10\,,$$

$$\det\begin{pmatrix}1 & \text{-1} & 1\\ 0 & \text{-1} & 2\\ 3 & \text{-2} & 1\end{pmatrix} = 1(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix}\text{-1} & 2\\ \text{-2} & 1\end{pmatrix} + 3(-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix}\text{-1} & 1\\ \text{-1} & 2\end{pmatrix} = (-1+4)+3(-2+1) = 0\,;$$

da cui si ha

$$\det(A) = 2(-10) - 2(0) = -20\,.$$

$\square$

Esercizio 6 *Dire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il determinante della matrice*

$$A = \begin{pmatrix}k-2 & 0 & 6\\ -1 & 4 & k+3\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

è diverso da zero.

Soluzione. Calcoliamo il determinante della matrice A in base allo sviluppo di Laplace secondo la terza riga

$$\det(A) = -2\,(-1)^{3+2}\det\begin{pmatrix}k-2 & 6\\ -1 & k+3\end{pmatrix} = 2\;[(k-2)(k+3) - 6\,(-1)] = 2\,(k^2+k)\,.$$

Risulta immediato verificare che il determinante è diverso da zero per $k \neq 0$ e per $k \neq -1$.

Osservazione: La condizione

$$\det(A) \neq 0$$

è *necessaria* e *sufficiente* affinché la matrice A sia *invertibile.* $\square$

Esercizio 7 *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix}k-2 & 0 & 6\\ -1 & 4 & k+3\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

calcolare, quando esiste, la matrice inversa A^{-1}.

Soluzione. Dato il risultato dell'esercizio 6, si ha che per valori del parametro k diversi da 0 e -1, la matrice è invertibile. Calcoliamo i complementi algebrici:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 4 & k+3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} -1 & k+3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} k-2 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} k-2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 4 & k+3 \end{pmatrix} \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} k-2 & 6 \\ -1 & k+3 \end{pmatrix} \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} k-2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene

$$A_{11} = 2k+6 \qquad A_{12} = 0 \qquad A_{13} = 2$$

$$A_{21} = 12 \qquad A_{22} = 0 \qquad A_{23} = 2k-4$$

$$A_{31} = -24 \qquad A_{32} = -k^2 - k \qquad A_{33} = 4k-8\,.$$

La *matrice aggiunta* A^* è allora data da

$$A^* = \begin{pmatrix} 2k+6 & 0 & 2 \\ 12 & 0 & 2k-4 \\ -24 & -k^2-k & 4k-8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2k+6 & 12 & -24 \\ 0 & 0 & -k^2-k \\ 2 & 2k-4 & 4k-8 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo, infine, la matrice inversa

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det(A)} = \frac{1}{2\,(k^2+k)} \begin{pmatrix} 2k+6 & 12 & -24 \\ 0 & 0 & -k^2-k \\ 2 & 2k-4 & 4k-8 \end{pmatrix},$$

o equivalentemente

$$A^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{k+3}{k^2+k} & \dfrac{6}{k^2+k} & -\dfrac{12}{k^2+k} \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{k^2+k} & \dfrac{k-2}{k^2+k} & \dfrac{2k-4}{k^2+k} \end{pmatrix},$$

per ogni $k \in \mathbb{R}$ tale che $k \neq 0$ e $k \neq -1$. $\square$

Esercizio 8 *Calcolare la matrice inversa (se esiste) di*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Da un teorema dell'algebra, sappiamo che una matrice A di ordine n è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero ($\det(A) \neq 0$). Inoltre, se tale condizione è verificata, gli elementi dell'inversa A^{-1} sono dati dai complementi algebrici della matrice trasposta, divisi per $\det(A)$.
Pertanto, accertiamo innanzitutto la condizione (necessaria e sufficiente) per l'invertibilità della matrice A:

$$\det(A) = 3\,(-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \;+\; 1\,(-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -10 \;(\neq 0).$$

Possiamo ora procedere alla costruzione della matrice inversa A^{-1} attraverso i seguenti passi:

1. scriviamo la matrice trasposta di A

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \;;$$

2. costruiamo la matrice dei complementi algebrici di A^T, detta *matrice aggiunta* di A e indicata con A^*

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \;,$$

dove

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene

$$A_{11} = 25 \qquad A_{12} = -11 \qquad A_{13} = -1$$

$$A_{21} = -5 \qquad A_{22} = 1 \qquad A_{23} = 1$$

$$A_{31} = 5 \qquad A_{32} = -3 \qquad A_{33} = -3\,;$$

3. determiniamo la matrice inversa di A mediante la seguente formula

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^* .$$

Pertanto si ha

$$A^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 25 & -11 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.5 & 1.1 & 0.1 \\ 0.5 & -0.1 & -0.1 \\ -0.5 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix} .$$

□

Esercizio 9 *Si calcoli (se esiste) l'inversa della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Soluzione. Innanzitutto bisogna calcolare il determinante della matrice per vedere se essa è invertibile; sviluppando ad esempio per la seconda riga si ottiene che $\det(A) = -5$ e dunque la matrice è invertibile. A questo punto gli elementi b_{ij} della matrice inversa A^{-1} si calcolano usando la regola

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det(A)}.$$

Ad esempio l'elemento di posto $(3, 2)$ sarà dato da:

$$b_{3,2} = \frac{A_{2,3}}{\det(A)} = \frac{(-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}{-5} = \frac{3}{5}.$$

In modo analogo si calcolano tutti gli altri elementi e si ottiene

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -7/5 & -2/5 & 6/5 & 1/5 \\ -2/5 & -2/5 & 1/5 & 1/5 \\ -2/5 & 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 17/5 & 2/5 & -11/5 & -1/5 \end{pmatrix} .$$

□

Esercizio 10 *Si discuta, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, il rango della matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & -1 \\ 2 & 2a & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Soluzione. Innanzitutto calcoliamo il determinante della matrice: esso risulterà essere una funzione del parametro a. Utilizzando la regola di Laplace si ottiene

$$\det(A) = -4a^2 + 13a - 3\,;$$

abbiamo così ottenuto un'equazione di secondo grado nell'incognita a, i cui eventuali zeri saranno dunque i valori di a per cui $\det(A) = 0$, cioè per cui $\mathrm{r}(A) \leq 3$. La formula risolutiva delle equazioni di secondo grado ci porge le due soluzioni

$$a_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 12}}{-8} = \frac{-13 \pm 11}{-8} = \begin{cases} 1/4 \\ 3 \end{cases}$$

dunque per $a_1 = 1/4$ e $a_2 = 3$, si ha $\mathrm{r}(a) \leq 3$. Sostituendo tali valori otteniamo rispettivamente le due matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 & \text{-}1 \\ 2 & 1/2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ \text{-}1 & \text{-}1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & \text{-}1 \\ 2 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ \text{-}1 & \text{-}1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Calcolando il determinante della sottomatrice di A_1

$$\begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ \text{-}1 & \text{-}1 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

formata prendendo le prime tre colonne e le ultime tre righe, si vede che esso è uguale a $21/2$, e dunque $\mathrm{r}(A_1) = 3$. Analogamente calcolando il determinante della sottomatrice di A_2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ \text{-}1 & \text{-}1 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

si vede che esso è uguale a 10 e quindi anche $\mathrm{r}(A_2) = 3$.

Riassumendo si ha dunque

$$\begin{aligned} \mathrm{r}(A) = 4 \qquad & \text{se} \quad a \neq 1/4,\, 3 \\ \mathrm{r}(A) = 3 \qquad & \text{se} \quad a = 1/4,\, 3\,. \end{aligned}$$

□

Dipendenza e indipendenza lineare

Esercizio 11 *Siano dati i seguenti tre vettori di* $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

si stabilisca se tali vettori sono linearmente dipendenti (LD) o linearmente indipendenti (LI).

Soluzione. La generica combinazione lineare nulla dei 3 vettori risulta

$$c_1\,\mathbf{x}_1 \;+\; c_2\,\mathbf{x}_2 \;+\; c_3\,\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}\,,$$

con $c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{R}$ (detti *scalari*). Se l'uguaglianza è verificata con almeno uno degli scalari diverso da zero, i vettori sono LD, mentre se l'uguaglianza è verificata nel solo caso $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ i vettori sono LI. Esplicitando ed effettuando le operazioni di moltiplicazione per uno scalare e di addizione tra vettori, otteniamo il seguente sistema

$$\begin{cases} c_1 + 3\,c_2 + 2\,c_3 = 0 \\ 3\,c_1 + 3\,c_2 = 0 \\ -3\,c_2 - 3\,c_3 = 0\,. \end{cases}$$

Scritto in forma matriciale diventa

$$A\,\mathbf{c} = \mathbf{0},$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In generale, un sistema lineare del tipo

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

con A matrice $(m \times n)$, $\mathbf{x}$ vettore di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{0}$ vettore nullo di $\mathbb{R}^m$, si dice *sistema lineare omogeneo*. La soluzione banale $\mathbf{x}^* = \left(x_1^*,\ x_2^*,\ \ldots,\ x_n^*\right) = \mathbf{0}$ è sempre soluzione. Il sistema ammette anche soluzioni diverse dal vettore nullo (e sono infinite) se e solo se $r(A) < n$ (nel caso di A matrice $(n \times n)$ se e solo se $\det(A) = 0$).
Da quanto detto, calcoliamo il determinante di A

$$\det(A) = 3\,(-1)^{2+1}\,\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \;+\; 3\,(-1)^{2+2}\,\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = 0.$$

Essendo $\det(A) = 0$, le soluzioni del sistema omogeneo $A\,\mathbf{c} = \mathbf{0}$ sono infinite (ovvero, esiste almeno una combinazione lineare nulla con coefficienti non tutti nulli) e quindi possiamo

affermare che i tre vettori sono LD.
Dato che la seguente sottomatrice

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo (ossia, $\det(A') = -3$), otteniamo che $r(A) = 2$. Il sistema omogeneo ha quindi $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni. Scegliendo come parametro l'incognita corrispondente alla colonna non usata nella costruzione della sottomatrice A', ossia l'incognita c_1, si ottiene il seguente sistema associato

$$A'\,\mathbf{c}' = \mathbf{b},$$

dove

$$\mathbf{c}' = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Risolviamo ora il sistema associato mediante l'inversione della matrice A', ossia

$$\mathbf{c}' = (A')^{-1}\,\mathbf{b}$$

La matrice inversa $(A')^{-1}$ risulta

$$(A')^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sostituendo nella formula risolutiva, otteniamo

$$\mathbf{c}' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -c_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

Le soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\,\mathbf{c} = \mathbf{0}$ sono quindi rappresentate dal seguente insieme

$$\{(c_1,\ -c_1,\ c_1) \mid c_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Risulta pertanto

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 12 *Determinare se i 4 vettori di* $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} \text{-1} \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti.

Soluzione. Dato che ci troviamo nel caso di n vettori di $\mathbb{R}^n$, sappiamo che essi sono linearmente indipendenti se e solo se la matrice che ha per colonne (o per righe) i suddetti vettori ha rango pieno, cioè se il suo determinante è non nullo. Dobbiamo quindi calcolare il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Usando la regola di Laplace si trova $\det(A) = 15$ e dunque i vettori sono linearmente indipendenti. $\square$

Esercizio 13 *Dati i tre vettori di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

stabilire se sono linearmente indipendenti.

Soluzione. Ricordiamo che i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti se da

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

segue $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.
Sostituendo nell'espressione precedente i tre vettori, si ottiene l'equazione

$$c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

che riscritta in forma matriciale diventa

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -6 & 10 & -11 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

o in maniera più compatta

$$A\,\mathbf{c} = \mathbf{0}\,.$$

Si osservi che A è una matrice 4×3, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^4$.
Il sistema lineare omogeneo in questione ammette come unica soluzione il vettore nullo $(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$ se e solo se $r(A) = r(A|\mathbf{0}) = 3$, e in tal caso potremmo affermare che i tre vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

Determiniamo, innanzitutto, il rango della matrice A. Dal calcolo dei determinanti di tutte le sottomatrici 3×3 che si possono ricavare dalla matrice A,

$$\det \begin{pmatrix} -6 & 10 & -11 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 8 & 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 8 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ -6 & 10 & -11\\ 5 & 8 & 1\end{pmatrix} = 0 \qquad \det\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ -6 & 10 & -11\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix} = 0\,,$$

si verifica che il rango di A non può essere 3.
Se si considerano, ad esempio, le prime due righe e le prime due colonne di A, si ha che

$$\det\begin{pmatrix}3 & 2\\ -6 & 10\end{pmatrix} = 3\cdot 10 - 2(-6) = 42 \neq 0$$

e quindi si può concludere che $r(A) = r(A|\mathbf{0}) = 2 < 3$.

I tre vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti se e solo se almeno uno dei coefficienti c_1, c_2 o c_3 è diverso da zero. Inoltre, in caso di dipendenza lineare, è possibile scrivere almeno uno dei vettori come combinazione lineare dei rimanenti.

Risolviamo ora il sistema lineare

$$A\,\mathbf{c} = \mathbf{0}\,.$$

Esso ammetterà infinite soluzioni. Per la risoluzione, consideriamo le prime due equazioni e come parametro c_3. Dobbiamo quindi risolvere il seguente sistema,

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ -6 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2c_3\\ 11c_3\end{pmatrix}$$

la cui matrice dei coefficienti è la stessa sottomatrice di A che abbiamo considerato per il calcolo del rango. Possiamo riscrivere il sistema in forma matriciale

$$A'\mathbf{c}' = \mathbf{b}\,,$$

dove

$$A' = \begin{pmatrix}3 & 2\\ -6 & 10\end{pmatrix} \qquad \mathbf{c}' = \begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix}-2c_3\\ 11c_3\end{pmatrix}\,.$$

Noto che $\det(A') = 42$, in base alla regola di Cramer, determiniamo le soluzioni

$$c_1 = \frac{\det\begin{pmatrix}-2c_3 & 2\\ 11c_3 & 10\end{pmatrix}}{42} = -c_3$$

$$c_2 = \frac{\det\begin{pmatrix}3 & -2c_3\\ -6 & 11c_3\end{pmatrix}}{42} = \frac{1}{2}c_3\,.$$

Tutte le (infinite) soluzioni del sistema di partenza si presentano nella forma $(-c_3,\ 0.5c_3,\ c_3)$, con $c_3 \in \mathbb{R}$. Si ha, inoltre,

$$-c_3\begin{pmatrix}3\\ -6\\ 2\\ 5\end{pmatrix} + \frac{1}{2}c_3\begin{pmatrix}2\\ 10\\ 4\\ 8\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}1\\ -11\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\,.$$

Del resto, era (quasi) immediato verificare che il terzo vettore risultava dalla differenza tra il primo e il secondo moltiplicato per 1/2:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

□

Sistemi lineari

Esercizio 14 *Si determini se il sistema di equazioni lineari*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione, e in caso affermativo la si calcoli.

Soluzione. Dato che abbiamo a che fare con un sistema di n equazioni in n incognite possiamo utilizzare il Teorema di Cramer: il sistema avrà un'unica soluzione se e solo se il determinante della matrice formata dai coefficienti delle incognite è non nullo. Nel nostro caso si ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Calcolando il determinante si ottiene $\det(A) = 4$ e dunque il sistema ammette un'unica soluzione. Per calcolarla esplicitamente ricordiamo che le componenti del vettore soluzione si ottengono tramite la formula

$$x_i = \frac{D_i}{\det(A)} ,$$

dove D_i è il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la colonna i-sima con il vettore dei termini noti. Ad esempio si ottiene

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{4} = \frac{36}{4} = 9 .$$

Analogamente si procede per gli altri casi e si trova $x_2 = 7$, $x_3 = 3$, $x_4 = -11$. □

Esercizio 15 *Si determini (senza risolverlo) se il sistema di equazioni*

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ & & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \end{cases}$$

ammette soluzioni.

Soluzione. Abbiamo a che fare con un sistema di 4 equazioni in 3 incognite; è dunque il caso di utilizzare il teorema di Rouchè-Capelli. La matrice A dei coefficienti è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & \text{-1} & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Il rango di questa matrice è ovviamente ≤ 3 dato che il numero delle colonne è 3; calcolando il determinante della sottomatrice quadrata 3×3

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

formata prendendo le ultime 3 righe, si vede che esso è uguale a -12 e quindi si ha effettivamente $\mathrm{r}(A) = 3$. Dunque il sistema ammette soluzioni se e solo se il rango della matrice

$$A|\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & \text{-1} & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è anch'esso uguale a 3. Calcolando il determinante si ottiene

$$\det(A|\mathbf{b}) = 12$$

e dunque $\mathrm{r}(A|\mathbf{b}) = 4 > 3$, per cui il sistema non ammette soluzioni. □

Esercizio 16 *Una scuola di ballo sta programmando i suoi corsi di danza moderna, danza classica e danza latino-americana. In relazione alla difficoltà dei tre diversi corsi di ballo, ciascun istruttore può impartire lezioni di danza moderna, classica e latino-americana rispettivamente a* 10, 5 *e* 15 *ballerini partecipanti, mentre i ricavi per ciascuna classe di ogni tipo di corso sono stimati rispettivamente a* 200, 100, 400 *euro. Assumendo che la scuola disponga di* 15 *classi, preveda di raggiungere il numero programmato di* 200 *iscrizioni e intenda ricavare* 5 000 *euro, quante classi di ciascun corso deve organizzare?*

Soluzione. Per comprendere e tradurre matematicamente il problema seguiamo il seguente schema generale:

1. *Identificare ed etichettare le incognite.* In ogni problema viene richiesto esplicitamente, in forma di domanda, o implicitamente, mediante un ragionamento logico, di determinare delle quantità incognite in modo che siano contemporaneamente soddisfatte un'insieme di relazioni di uguaglianza (ossia, *equazioni*).

   Considerando la domanda contenuta nella frase finale del problema proposto, possiamo etichettare le incognite nel modo seguente:

   $x_1 :=$ numero di classi destinate al corso di danza moderna;

   $x_2 :=$ numero di classi destinate al corso di danza classica;

   $x_3 :=$ numero di classi destinate al corso di danza latino-americana.

2. *Utilizzare le informazioni fornite per impostare equazioni nelle incognite.* Per questo compito, in genere più complesso del precedente, non sempre può risultare conveniente servirsi di una tabella per organizzare le informazioni corrispondenti alla matrice dei coefficienti del sistema. Conviene allora cercare di scrivere direttamante il sistema di equazioni lineari e accertarsi che ciascuna equazione traduca matematicamente le proposizioni del problema.

   Etichettate le incognite, è possibile tradurre le proposizioni del problema in esame nelle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 15 \\ 10\,x_1 & + & 5\,x_2 & + & 15\,x_3 & = & 200 \\ 200\,x_1 & + & 100\,x_2 & + & 400\,x_3 & = & 5\,000 \end{array} \end{cases}$$

Scritto in forma matriciale diventa

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 15 \\ 200 & 100 & 400 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 200 \\ 5000 \end{pmatrix}.$$

Risolviamo il sistema ricorrendo al seguente:

Teorema di Cramer. Sia dato il sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con A matrice quadrata di ordine n e invertibile (ossia, $\det(A) \neq 0$). Allora il sistema ha una e una sola soluzione $\mathbf{x}^* = \big(x_1^*,\ x_2^*,\ \ldots,\ x_n^*\big)$ con

$$x_i^* = \frac{D_i}{\det(A)},$$

essendo $D_i = \det(A_i)$, dove A_i è la matrice ottenuta da A sostituendo la colonna i-esima con il vettore dei termini noti. Pertanto, il primo passo da compiere per l'applicazione di questo teorema è la verifica dell'invertibilità di A mediante il calcolo del determinante

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1\,(-1)^{1+1} \det\begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 100 & 400 \end{pmatrix} + 1\,(-1)^{1+2} \det\begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 200 & 400 \end{pmatrix} + \\ &\quad + 1\,(-1)^{1+3} \det\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 200 & 100 \end{pmatrix} = -500. \end{aligned}$$

La matrice A è invertibile per cui è possibile applicare la formula risolutiva del Teorema di Cramer. Si ha

$$x_1^* = \frac{\det\begin{pmatrix} 15 & 1 & 1 \\ 200 & 5 & 15 \\ 5000 & 100 & 400 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{-2500}{-500} = 5\,,$$

$$x_2^* = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 15 & 1 \\ 10 & 200 & 15 \\ 200 & 5000 & 400 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{0}{-500} = 0\,,$$

$$x_3^* = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 15 \\ 10 & 5 & 200 \\ 200 & 100 & 5000 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{-5000}{-500} = 10\,.$$

Pertanto, la scuola di ballo dovrebbe organizzare 5 classi per il corso di danza moderna e 10 classi per il corso di danza latino-americana, mentre per il corso di danza classica non dovrebbe organizzare alcuna classe. Notiamo che con la soluzione trovata la scuola di ballo utilizza esattamente tutte le classi a disposizione ($5 + 0 + 10 = 15$) e consegue, con un numero di iscritti pari a

$$10\,(5) \;+\; 5\,(0) \;+\; 15\,(10) = 200\,,$$

un ricavo totale in euro di

$$200\,(5) \;+\; 100\,(0) \;+\; 400\,(10) = 5\,000\,.$$

□

Esercizio 17 *Una banca d'affari specializzata nel settore della new economy ha investito* 100 *milioni di euro nelle azioni delle seguenti società hi-tech: Alpha, Beta, Gamma e Delta. L'investimento nelle azioni Alpha ha superato di* 10 *milioni di euro il triplo dell'investimento nelle azioni Beta, mentre la somma degli investimenti nelle azioni Gamma e Delta ha superato di* 20 *milioni di euro il valore dell'investimento nelle azioni Beta. La banca comunica che ha guadagnato il* 10 % *del capitale investito nelle azioni Alpha, il* 20 % *del capitale investito nelle azioni Delta, mentre non ha conseguito utili né perdite sull'investimento nelle azioni Gamma e infine ha perso il* 20 % *del capitale investito nelle azioni Beta. Sapendo che la banca d'affari ha realizzato un guadagno totale di* 5 *milioni di euro, determinare la composizione del portafoglio di investimento.*

Soluzione. Seguendo lo schema generale descritto nel precedente esercizio, possiamo etichettare le incognite nel seguente modo:

$x_1 :=$ quota parte del portafoglio investita nelle azioni della società Alpha;

$x_2 :=$ quota parte del portafoglio investita nelle azioni della società Beta;

$x_3 :=$ quota parte del portafoglio investita nelle azioni della società Gamma;

x_4 := quota parte del portafoglio investita nelle azioni della società Delta.

Leggendo ora il problema otteniamo le seguenti equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100 \\ x_1 - 3x_2 = 10 \\ - x_2 + x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 50 \end{cases}$$

La prima equazione è facile da scrivere poiché afferma che l'intero capitale di 100 milioni di euro è investito nelle azioni delle quattro società hi-tech, mentre la seconda e la terza equazione descrivono delle relazioni di confronto tra la coppia (x_1, x_2) e la terna (x_2, x_3, x_4), rispettivamente. Dalle informazioni sui rendimenti delle diverse quote di investimento, otteniamo la seguente equazione

$$\frac{1}{10}\,x_1 - \frac{2}{10}\,x_2 + 0\,x_3 + \frac{2}{10}\,x_4 = 5\,,$$

che semplificata diventa la quarta equazione del sistema.
Il sistema di equazioni lineari può essere scritto nella seguente forma matriciale

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}\,,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Risolviamo il sistema ricorrendo al seguente:

Teorema di Rouchè-Capelli. Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ di m equazioni in n incognite abbia soluzioni è che la caratteristica $r(A)$ della matrice del sistema A sia uguale alla caratteristica $r(A|\mathbf{b})$ della matrice completa $A|\mathbf{b}$; cioè,

$$r(A) = r(A|\mathbf{b})\,.$$

In tal caso le soluzioni sono $\infty^{n-r(A)}$, cioè le soluzioni dipendono da $(n - r(A))$ parametri. Ricordando che $r(A) \le \min\{m, n\}$ se A è una matrice (m, n), procediamo al calcolo della caratteristica (o rango) della matrice A

$$\det(A) = 1\,(-1)^{2+1}\,\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + (-3)\,(-1)^{2+2}\,\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -10\,.$$

La matrice A ha rango pieno, per cui risulta che $r(A) = r(A|\mathbf{b}) = 4$ e per il Teorema di Rouchè-Capelli il sistema ha $\infty^{4-4} = \infty^0 = 1$ soluzione. Per determinare tale soluzione calcoliamo la matrice inversa di A

$$A^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -6 & -4 & 6 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & -7 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & -0.6 & 0 \\ 0.2 & -0.2 & -0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0.7 & -0.5 \\ -0.1 & -0.4 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Dalla formula risolutiva, otteniamo

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & -0.6 & 0 \\ 0.2 & -0.2 & -0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0.7 & -0.5 \\ -0.1 & -0.4 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 \\ 14 \\ 21 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, la banca d'affari investe 52, 14, 21 e 13 milioni di euro nelle azioni delle società Alpha, Beta, Gamma e Delta, rispettivamente. Dividendo il vettore soluzione $\mathbf{x}^*$ per il capitale investito di 100 milioni di euro e moltiplicando per 100, si esprimono le quote di composizione del portafoglio in termini percentuali. □

Esercizio 18 *Discutere e risolvere il seguente sistema di equazioni lineari parametriche*

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 = 5k + 35 \\ 7x_1 + (2-k)x_3 = 9 - 8k \\ 2x_1 + 2x_3 = 4 - 2k \end{cases}$$

Soluzione. Riscriviamo il sistema parametrico in forma matriciale

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 7 & 0 & (2-k) \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5k+35 \\ 9-8k \\ 4-2k \end{pmatrix}.$$

Studiamo al variare del parametro k la caratteristica della matrice dei coefficienti del sistema. Calcolato rispetto alla seconda colonna, il determinante di A risulta

$$\det(A) = 8\,(-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 7 & (2-k) \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -16(k+5).$$

Poiché $\det(A) = 0$ se e solo se $k = -5$, si ha che $r(A) = 3$ per $k \neq -5$ ed $r(A) < 3$ per $k = -5$.

Per $k = -5$ la matrice dei coefficiente divine

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 7 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Essendo il determinante della sottomatrice

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

diverso da zero, si ha $r(A) = 2$.

Andiamo ora a determinare la caratteristica della matrice completa $A|\mathbf{b}$. Poiché $A|\mathbf{b}$ è una matrice (3×4) avrà al massimo caratteristica 3. Tenendo presente che $r(A|\mathbf{b}) \geq r(A)$, possiamo affermare che per $k \neq -5$, $r(A|\mathbf{b}) = r(A) = 3$. Vediamo adesso il caso $k = -5$. La matrice $A|\mathbf{b}$ diviene

$$A|\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 & 10 \\ 7 & 0 & 7 & 49 \\ 2 & 0 & 2 & 14 \end{pmatrix}.$$

Poiché tutte le sottomatrici quadrate di ordine 3 hanno determinante nullo segue che $2 \leq \; r(A|\mathbf{b}) < 3$, quindi $r(A|\mathbf{b}) = r(A) = 2$ e il sistema ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni. Scegliendo come parametro l'incognita corrispondente alla colonna non usata nella costruzione della sottomatrice A', ossia l'incognita x_3, si ottiene il seguente sistema associato

$$A'\,\mathbf{x}' = \mathbf{b}',$$

dove

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad\qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 49 - 7x_3 \end{pmatrix}.$$

Dall'inversione della matrice A', otteniamo

$$\mathbf{x}'^{*} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{56} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 49 - 7x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - x_3 \\ -\frac{11}{8} + \frac{3}{8}\,x_3 \end{pmatrix}.$$

Per $k \neq -5$, il sistema ha una e una sola soluzione data da

$$\mathbf{x}^{*} = \frac{1}{-16(k+5)} \begin{pmatrix} 0 & -16 & 16-8k \\ -2k-10 & 6 & 3k-6 \\ 0 & 16 & -56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5k+35 \\ 9-8k \\ 4-2k \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-16(k+5)} \begin{pmatrix} 16k^2 \; + \; 64k \; - \; 80 \\ -16k^2 \; - \; 144k \; - \; 320 \\ - \; 16k \; - \; 80 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-k \\ k+4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 19 450 *ristoranti di una città vengono classificati in quattro categorie I, II, III, IV (in ordine decrescente). La differenza tra i ristoranti che ricevono una classificazione pari a II o IV e quelli classificati nelle categorie I o III è* 50*; il numero di ristoranti che ricevono una valutazione pari a IV è* 120*; i ristoranti che ricevono una valutazione pari a I o III è* 180*. Si formalizzi il problema e si dica se ammette soluzione.*

Soluzione. Indichiamo con x_1, x_2, x_3 e x_4 il numero di ristoranti appartenenti rispettivamente alle categorie I, II, III e IV. Utilizzando le informazioni fornite dal problema, scriviamo il seguente sistema lineare di quattro equazioni in quattro incognite:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 450 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 50 \\ x_4 = 120 \\ x_1 + x_3 = 180 \end{cases}$$

Riscritto in forma matriciale $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, il sistema diviene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 50 \\ 120 \\ 180 \end{pmatrix}.$$

Dal calcolo del determinate della matrice dei coefficienti, si ha che

$$\det(A) = 0\,,$$

(risultato immediato, se si osserva che la prima e la terza colonna sono identiche!). Quindi la matrice A non può avere rango pieno. Mentre dal calcolo del rango della matrice completa si ha

$$r(A|\mathbf{b}) = 4 > r(A)\,.$$

Concludiamo che il sistema non ammette soluzione.

□

Esercizio 20 *Una ricerca in ambito veterinario ha stabilito che, per una crescita sana, un gatto deve assumere giornalmente* 80 *unità di proteine,* 200 *unità di carboidrati e* 50 *unità di grassi.*
Avendo a disposizione quattro diversi tipi di cibo per gatti da miscelare:

A) 5 *unità di proteine,* 20 *unità di carboidrati,* 3 *unità di grassi;*

B) 4 *unità di proteine,* 30 *unità di carboidrati,* 3 *unità di grassi;*

C) 8 *unità di proteine,* 15 *unità di carboidrati,* 10 *unità di grassi;*

D) 12 *unità di proteine,* 5 *unità di carboidrati,* 7 *unità di grassi;*

dire (senza determinare una soluzione) se esiste una miscela dei quattro alimenti tale da soddisfare il fabbisogno giornaliero dei gatti.

Soluzione. Indichiamo con x_1, x_2, x_3 e x_4 le quantità, rispettivamente, di cibo A, B, C e D. Il problema può essere formalizzato come segue:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 12x_4 = 80 \\ 20x_1 + 30x_2 - 15x_3 + 5x_4 = 200 \\ 3x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 7x_4 = 50 \end{cases}$$

La prima equazione ci dice che miscelando insieme la quantità x_1 di cibo A, che contiene 5 unità di proteine per unità di prodotto, la quantità x_2 di cibo B, che contiene 4 unità di proteine per unità di prodotto, la quantità x_3 di cibo C, che contiene 8 unità di proteine per unità di prodotto e, infine, la quantità x_4 di cibo D, che contiene 12 unità di proteine per unità di prodotto, si deve ottenere esattamente la quantità di proteine necessaria al fabbisogno giornaliero del gatto. In maniera del tutto analoga si possono interpretare le altre due equazioni.

Si tratta quindi di verificare se il sistema di tre equazioni in quattro incognite ammette soluzione. Il sistema può essere riscritto come segue

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 & 12 \\ 20 & 30 & 15 & 5 \\ 3 & 3 & 10 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 200 \\ 50 \end{pmatrix},$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 & 12 \\ 20 & 30 & 15 & 5 \\ 3 & 3 & 10 & 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 80 \\ 200 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Per la determinazione del rango della matrice A si può, ad esempio, prendere in considerazione le prime tre colonne della matrice e verificare che

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 20 & 30 & 15 \\ 3 & 3 & 10 \end{pmatrix} = 415\,.$$

Si conclude che il rango della matrice A è uguale al rango della matrice completa $A|\mathbf{b}$ (e non potrebbe essere altrimenti in questo caso!):

$$r(A) = r(A|\mathbf{b}) = 3 < 4\,,$$

dove 4 è il numero delle incognite. In base al teorema di Rouchè-Capelli, il sistema ammette ∞^{4-3} soluzioni.

□

Esercizio 21 *Siete i proprietari di un fast-food in franchising. È quasi l'ora di chiusura, ma vi avanzano* 13 *panini,* 19 *porzioni di manzo scongelate e una confezione aperta con* 15 *fette di formaggio. Decidete di utilizzarli per preparare dei piatti da vendere a prezzo scontato. Per* 1 *hamburger semplice occorrono* 1 *porzione di carne e* 1 *panino. Nei doppi cheeseburger vanno* 2 *porzioni di manzo,* 1 *panino e* 2 *fette di formaggio. I cheeseburger normali richiedono* 1 *porzione di manzo,* 1 *panino e* 1 *fetta di formaggio. Quanti piatti di ciascun tipo dovete produrre?*

Soluzione. È necessario, innanzitutto, individuare le variabili:

x_1 := numero di hamburger,

x_2 := numero di doppi cheeseburger,

x_3 := numero di cheeseburger semplici.

La seguente tabella sintetizza i dati del problema:

	Hamburger	D-Cheese	S-Cheese	totale
panini	1	1	1	13
manzo	1	2	1	19
formaggio	0	2	1	15

Risulta quasi immediato scrivere un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite a partire dai dati della tabella precedente, che esprimono la necessità di utilizzare il materiale deperibile che si ha a disposizione

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 19 \\ 2x_2 + x_3 = 15\,. \end{cases}$$

Il determinante della matrice dei coefficienti associata al sistema è

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1\,.$$

Ricordiamo che la condizione $\det(A) \neq 0$ è necessaria e sufficiente affinché un sistema di n equazioni in n incognite ammetta un'unica soluzione. Tale soluzione può essere determinata mediante la regola di Cramer:

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 13 & 1 & 1 \\ 19 & 2 & 1 \\ 15 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = 4$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 13 & 1 \\ 1 & 19 & 1 \\ 0 & 15 & 1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = 6$$

$$x_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 13 \\ 1 & 2 & 19 \\ 0 & 2 & 15 \end{pmatrix}}{\det(A)} = 3\,.$$

La soluzione del sistema è $\mathbf{x} = (4, 6, 3)$. Solamente producendo 4 hamburger, 6 doppi cheeseburger e 3 cheeseburger semplici riusciamo ad utilizzare tutto il materiale avanzato. Infatti, con questa soluzione, i panini utilizzati sono $4 + 6 + 3 = 13$, le porzioni di manzo $4 + 12 + 3 = 19$ e, infine, $0 + 12 + 3 = 15$ le fette di formaggio.

□

Bibliografia

[BC] Barozzi, G.C., C. Corradi (1999). *Matematica Generale per le Scienze Economiche.* Il Mulino, Bologna.

[CFF] Cardin M., P. Ferretti, S. Funari (2005). *Introduzione Soft alla Matematica per l'Economia e la Finanza.* Diaprtimento di Matematica Applicata, Università Ca' Foscari di Venezia.

[WC] Waner S., S.R. Costenoble (2006). *Strumenti Quantitativi per la Gestione Aziendale.* Apogeo, Milano.