Department of Applied Mathematics, University of Venice

QUADERNI DI DIDATTICA

Marta Cardin Paola Ferretti

Stefania Funari

Introduzione soft alla matematica per l'economia e la finanza: IL CONCETTO DI FUNZIONE COME ELEMENTO BASE DELLA MODELLIZZAZIONE

Quaderno di Didattica n. 26/2008
Febbraio 2008

Introduzione soft alla matematica per l'economia e la finanza:

IL CONCETTO DI FUNZIONE COME ELEMENTO BASE DELLA MODELLIZZAZIONE

Marta Cardin
<mcardin@unive.it>

Paola Ferretti
<ferretti@unive.it>

Stefania Funari
<funari@unive.it>

Dipartimento di Matematica Applicata
Università Ca' Foscari di Venezia

(Febbraio 2008)

Notazioni

$\in$	Appartiene.
$\notin$	Non appartiene.
$\forall$	Per ogni.
$\exists$	Esiste.
$\emptyset$	Insieme vuoto.
$\mathbf{N}$	Numeri naturali $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
$\mathbb{R}$	Numeri reali.
$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	Numeri reali non nulli.
$\mathbb{R}^+$	Numeri reali non negativi.
$\mathbb{R}^+_*$	Numeri reali positivi.
$]a, b[$	Intervallo aperto limitato $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
$[a, b]$	Intervallo chiuso limitato $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.
$]a, b]$	Intervallo limitato aperto a sinistra $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.
$[a, b[$	Intervallo limitato aperto a destra $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.
$[a, +\infty[$	Intervallo chiuso illimitato superiormente $\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$.
$]a, +\infty[$	Intervallo aperto illimitato superiormente $\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$.
$]-\infty, a]$	Intervallo chiuso illimitato inferiormente $\{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$.
$]-\infty, a[$	Intervallo aperto illimitato inferiormente $\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$.
$\sum_{k=1}^{n} a_k$	La somma $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$.

Il concetto di funzione come elemento base della modellizzazione

In questo quaderno si introdurrà il concetto di funzione che costituisce uno dei concetti più importanti della matematica e riveste un ruolo fondamentale in molte applicazioni. Infatti viene utilizzato ogni volta che si vuole descrivere la dipendenza di una grandezza (detta anche variabile dipendente) in relazione alla variazione di una o più grandezze. Ad esempio, basti pensare alla quantità acquistata di un determinato bene che dipende dal suo prezzo, oppure ai profitti di un'azienda al variare del tempo.

1 Definizioni e proprietà

Nel seguito si considereranno unicamente funzioni reali di variabile reale. Diamo quindi la definizione formale di funzione solamente per funzioni di questo tipo.

Una funzione reale di variabile reale è un sottoinsieme non vuoto A di $\mathbb{R}^2$ tale che per ogni x reale esiste al più un reale y tale che la coppia $(x, y) \in A$.

Risulta quindi naturale rappresentare graficamente una funzione reale di variabile reale nel piano cartesiano.

Esempio 1 Sia $A = \{(2, 3), (0, 2), (2, 5)\}$; si osservi che l'insieme A non è una funzione.

Esempio 2 L'insieme $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}$ non è una funzione, perchè , ad esempio, $(0, 2) \in A$ e $(0, -2) \in A$.

Esempio 3 Sia $A = \{(2,3),(0,2),(1,5)\}$; si osservi che l'insieme A è una funzione.

Esempio 4 L'insieme $A = \{(x,y) : y = x+1\}$; si vede che l'insieme A è una funzione.

Esempio 5 Sia $A = \{(x,y) : y = |x|\}$; si osservi che l'insieme A è una funzione.

Dalla definizione discende che una funzione è caratterizzata dai seguenti ingredienti:

- un insieme di numeri reali, chiamato *dominio* della funzione e indicato con D, contenente tutti i numeri reali x per i quali esiste un numero reale y tale che (x,y) appartiene ad A, cioè

$$D = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ e } (x,y) \in A\}$$

- un insieme di numeri reali, chiamato *immagine* della funzione, cioè l'insieme che contiene tutti i numeri reali y per i quali esiste un numero reale x tale che (x,y) appartiene ad A, cioè

$$f(D) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D \text{ e } (x,y) \in A\}$$

- una *regola*, che associa ad ogni x del dominio l'elemento y.

Una funzione viene solitamente indicata con una lettera minuscola dell'alfabeto, ad esempio f, e si usa la seguente notazione:

$$f : D \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto y = f(x)$$

dove y è chiamato *immagine* del numero reale x. Questa è la notazione che sarà usata in seguito.

Esempio 6 La funzione $f : D \to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto y = f(x) = x \quad$ è nota come funzione identità .

Quando una funzione viene introdotta specificando una regola, si considera come suo dominio il più grande sottoinsieme di numeri reali che ammettono un'immagine definita attraverso la regola data.

Esempio 7 Il dominio della funzione la cui regola di assegnazione è la seguente

$$x \mapsto \frac{1}{x^2 - x - 6}$$

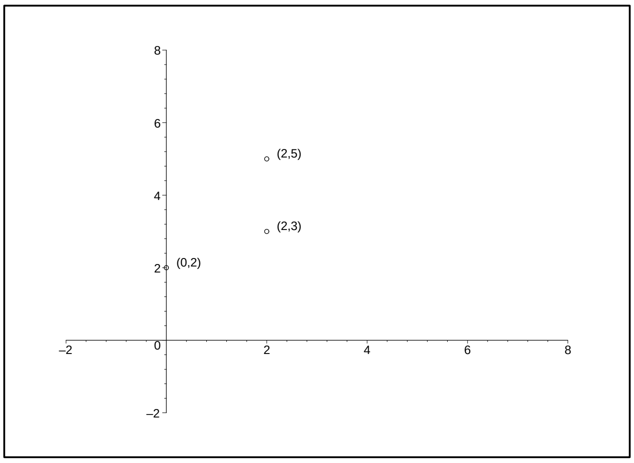

Figura 1: Esempio 1

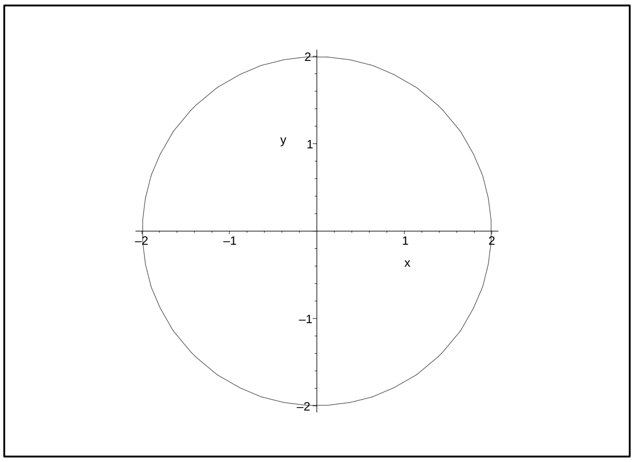

Figura 2: Esempio 2

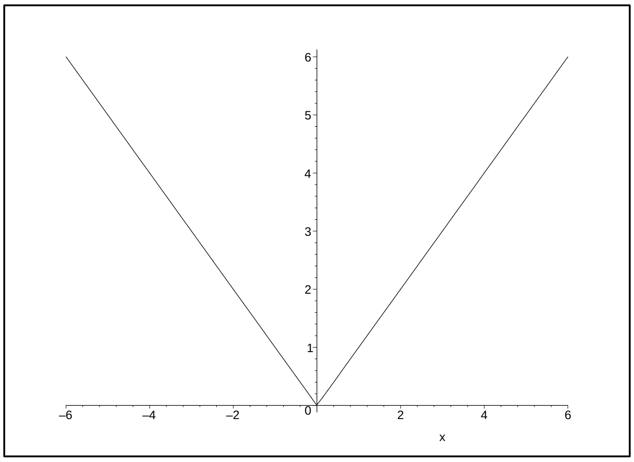

Figura 3: Esempio 5

è $\mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$.
Infatti, affinchè l'immagine y sia un numero reale il denominatore non deve annullarsi. Deve quindi essere $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3) \neq 0$, cioè $x \neq -2$ e $x \neq 3$.

Esempio 8 Il dominio della funzione la cui regola di assegnazione è la seguente

$$x \mapsto \sqrt{x+3}$$

è l'intervallo $[-3, +\infty[$.
Infatti, affinchè l'immagine y sia un numero reale, il radicando non deve essere negativo, quindi $x + 3 \geq 0$, da cui $x \geq -3$.

Esempio 9 Il dominio della funzione la cui regola di assegnazione è la seguente

$$x \mapsto \sqrt{1-x} + \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

è l'intervallo $]-1, 1]$.
Infatti devono essere verificate simultaneamente le seguenti diseguaglianze $1 - x \geq 0$ (da cui segue $x \leq 1$) e $1 + x > 0$ (da cui $x > -1$).

Per costruire nuove funzioni da due o più funzioni date, si può usare la nozione di funzione composta.

Date due funzioni $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : C \to \mathbb{R}$, tali che $f(D) \subseteq C$, si dice funzione composta di f e g, e si indica con $g \circ f$, la funzione

$$g \circ f : D \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto y = g(f(x))$$

Esempio 10 Considerata la funzione f con la seguente regola di assegnazione $x \mapsto 2x - 3$ e la funzione g, con la seguente regola di assegnazione $x \mapsto 5x + 1$, si possono definire le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$. Infatti è facile riconoscere che i domini D e C delle due funzioni, come pure gli insiemi immagine, coincidono con $\mathbb{R}$. Le funzioni composte sono definite come segue:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x+1) = 2(5x+1) - 3 = 10x - 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-3) = 5(2x-3) + 1 = 10x - 14.$$

Come si vede dall'esempio, non è in generale vero che $f \circ g$ è uguale a $g \circ f$.

Considerata una funzione f reale di variabile reale, è spesso utile chiedersi se è possibile determinare una funzione g tale che se f assume in x il valore $f(x)$, allora g assume nel punto $f(x)$ il valore x. In altri termini la funzione g *annulla l'effetto della funzione* f, in modo che la funzione composta $g \circ f$ sia la funzione identità .

Diamo quindi la seguente definizione.

Data una funzione reale di variabile reale, cioè un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^2$, questa si dice invertibile se l'insieme A^{-1}

$$A^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in A\}$$

è una funzione. In questo caso il sottoinsieme A^{-1} si dice funzione inversa di A.

Esempio 11 Se $A = \{(2, 3), (0, 2), (1, 5)\}$, allora $A^{-1} = \{(3, 2), (2, 0), (5, 1)\}$ è una funzione e quindi la funzione data è invertibile.

Esempio 12 Sia $A = \{(x, y) : y = x + 1\}$, allora $A^{-1} = \{(x, y) : y = x - 1\}$ e la funzione data è invertibile.

Esempio 13 Se $A = \{(x, y) : y = |x|\}$, allora A^{-1} non è una funzione perchè $(2, 2)$ e $(2, -2)$ appartengono ad A^{-1}.

Se si usa la notazione

$$f : D \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto y = f(x)$$

e la funzione f è invertibile, la funzione inversa viene indicata con f^{-1} e

$$f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R} \qquad y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

A questo punto si può osservare che $f^{-1} \circ f$ e $f \circ f^{-1}$ sono funzioni identità .

Esempio 14 Data la funzione $x \mapsto 2x + 1$, la funzione inversa è $x \mapsto (x - 1)/2$.

Esempio 15 La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$, non è ovviamente invertibile, mentre la funzione $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 \quad$ è invertibile e la funzione inversa è $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$.

Esempio 16 Data la funzione $x \mapsto 2^x$, la funzione inversa è $x \mapsto \log_2(x)$.

2 Proprietà qualitative delle funzioni

Vengono presentate alcune proprietà delle funzioni che saranno utili nella scelta e formulazione dei modelli matematici per la descrizione di alcuni fenomeni economici ed aziendali.

Una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ si dice iniettiva se

$$x_1, x_2 \in D, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Esempio 17 La funzione f, con la regola di assegnazione

$$x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$$

è iniettiva. Infatti presi due punti $a, b \in D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, tali che $f(a) = f(b)$, si può verificare che $a = b$, come indicato dai passaggi seguenti.

$$\begin{array}{rccc} f(a) = f(b) & \Rightarrow & \dfrac{a+1}{a-1} & = & \dfrac{b+1}{b-1} \\ & \Rightarrow & (a+1)(b-1) & = & (b+1)(a-1) \\ & \Rightarrow & ab - a + b - 1 & = & ab - b + a - 1 \\ & \Rightarrow & 2a & = & 2b \\ & \Rightarrow & a & = & b \end{array}$$

Esempio 18 La funzione f, con la regola di assegnazione

$$x \mapsto x^3$$

è iniettiva. Infatti

$$\begin{array}{rcc} f(a) = f(b) & \Rightarrow & a^3 = b^3 \\ & \Rightarrow & a^3 - b^3 = 0 \\ & \Rightarrow & (a-b)(a^2 + ab + b^2) = 0 \end{array}$$

Essendo
$$b^2 + ab + a^2 = \left(b + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4}.$$
allora $b^2 + ab + a^2$ è positivo a meno che sia a che b siano zero. Quindi $b - a = 0$.

Esempio 19 La funzione f, con la regola di assegnazione
$$x \mapsto 3|x-1| - 2$$
non è iniettiva. Infatti $f(2) = 1 = f(0)$.

Data una funzione di cui sia nota la rappresentazione grafica nel piano cartesiano, per vedere se questa sia iniettiva, basta controllare che ogni retta orizzontale abbia al più un punto di intersezione con il grafico della funzione.
Il teorema che segue mette in evidenza il legame tra la nozione di iniettività e quella di invertibilità .

Teorema Una funzione è invertibile se e solo se è iniettiva.

Come è già stato osservato, una funzione iniettiva è una funzione che associa elementi distinti ad elementi distinti. Per le funzioni reali di variabile reale, poichè sono definite in sottoinsiemi di numeri reali, è possibile non solo riconoscere se due elementi sono diversi, ma anche il loro ordinamento: scelti x e y si sa riconoscere se $x \leq y$ o $x \geq y$. A questo punto, quindi, si può verificare se l'ordinamento delle immagini $f(x)$ e $f(y)$ *conserva* o *rovescia* quello di x e y. La definizione che segue precisa questo concetto.

Una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ si dice

- crescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;
- strettamente crescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
- decrescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;
- strettamente decrescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Una funzione è detta monotona se è crescente o decrescente e analogamente per il caso di stretta monotonia.

Poichè una funzione strettamente monotona associa ad elementi diversi immagini diverse, vale il seguente risultato.

Teorema Una funzione strettamente monotona è invertibile.

Tra le proprietà qualitative che caratterizzano una funzione è importante segnalare le nozioni di funzione concava e di funzione convessa. Queste ammettono una interessante interpretazione geometrica.

Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo della retta reale, si dice

- concava se $\forall a, b \in I$ e $\forall \lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b);$$

- convessa se $\forall a, b \in I$ e $\forall \lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

Dati i due punti a e b sulla retta reale, il punto $\lambda a + (1 - \lambda)b$, dove $\lambda \in [0, 1]$, rappresenta un punto sul segmento congiungente i due punti: un punto interno all'intervallo $[a, b]$ se $\lambda \in (0, 1)$, un punto che coincide con a se $\lambda = 1$ e con b se $\lambda = 0$. Cioè , al variare di $\lambda \in [0, 1]$ si trovano tutti e soli i punti $\lambda a + (1 - \lambda)b$ del segmento $[a, b]$.
Analogamente, $(\lambda a + (1 - \lambda)b, \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b))$ rappresenta un punto sul segmento di estremi $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.
La definizione di concavità , allora, assume una semplice interpretazione geometrica: una funzione concava è una funzione in cui ogni generico punto $\lambda a + (1 - \lambda)b$ sul segmento di estremi a e b ha immagine $f(\lambda a + (1 - \lambda)b)$ che è non inferiore alla sua immagine sulla retta passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

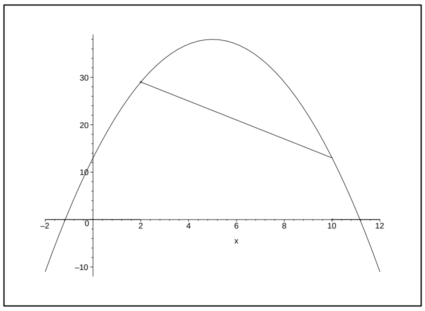

Figura 4: Esempio di funzione concava

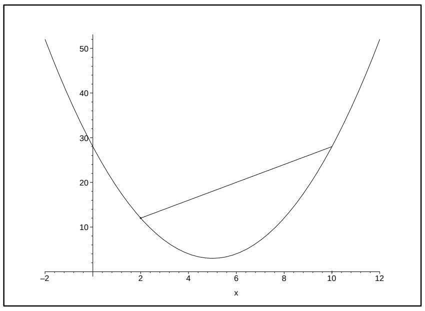

Figura 5: Esempio di funzione convessa

Spesso nelle applicazioni è interessante trovare, se esistono, i valori in corrispondenza dei quali la funzione assume il valore massimo o minimo (ad esempio, la quantità prodotta da un'impresa che consente di massimizzare il ricavo o di minimizzare i costi). In altri termini l'interesse è volto alla ricerca del massimo o del minimo dell'insieme dei valori assunti dalla funzione cioè il massimo e il minimo dell'insieme immagine. La definizione che segue precisa la nozione di punto di massimo e di punto di minimo.

Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale. Il punto $x_0 \in D$ è

- punto di massimo globale (o assoluto) se
$$f(x_0) \geq f(x), \qquad \forall x \in D;$$
- punto di minimo globale (o assoluto) se
$$f(x_0) \leq f(x), \qquad \forall x \in D;$$
- punto di massimo locale (o relativo) se esiste un intervallo $I = [x_0 - k, x_0 + k], k > 0$ tale che
$$f(x_0) \geq f(x), \qquad \forall x \in I \cap D;$$
- punto di minimo locale (o relativo) se esiste un intervallo $I = [x_0 - k, x_0 + k], k > 0$ tale che
$$f(x_0) \leq f(x), \qquad \forall x \in I \cap D.$$

Il numero $f(x_0)$ è detto massimo (minimo) globale o locale della funzione.
Evidentemente ogni punto di massimo globale è anche di massimo locale, mentre il viceversa non è in generale necessariamente vero. Questa implicazione è verificata quando la funzione è una funzione particolare, come viene precisato nel teorema che segue.

Teorema (locale-globale). Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo della retta reale, ed f una funzione concava (convessa). Ogni punto di massimo (minimo) locale è di massimo (minimo) globale.

Dimostrazione Sia f una funzione concava. Si supponga, per assurdo, che x_0 sia punto di massimo locale ma non di massimo globale per f. Allora esiste un intervallo $J \subset I$ tale che $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in J$.
Poichè x_0 non è di massimo globale, esiste un punto $x \in I$ tale che $f(x) > f(x_0)$. Se si considera il punto $\lambda x + (1-\lambda)x_0$ con $\lambda \in (0,1)$ tale che $\lambda x + (1-\lambda)x_0 \in J$, allora, poichè f è concava, segue che

$$f(\lambda x + (1-\lambda)x_0) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x_0) > \lambda f(x_0) + (1-\lambda)f(x_0) = f(x_0)$$

contro l'ipotesi di partenza.
La dimostrazione nel caso di f convessa è analoga.

Dal momento che l'immagine di una funzione è un sottoinsieme di numeri reali, si possono caratterizzare alcune proprietà delle funzioni considerando alcune propeietà dell'insieme immagine, come precisato nella seguente definizione.

Una funzione si dice

- limitata inferiormente se l'insieme immagine è limitato inferiormente;
- limitata superiormente se l'insieme immagine è limitato superiormente;
- limitata se è limitata inferiormente e superiormente.

Esempio 20 La funzione reale di variabile reale associata alla regola $x \mapsto x^2$ è una funzione strettamente decrescente per $x < 0$ e strettamente crescente per $x > 0$, quindi non è monotona. Inoltre è convessa. Infatti

$$(\lambda a + (1-\lambda)b)^2 \leq \lambda(a)^2 + (1-\lambda)(b)^2$$

$$\begin{aligned}
\iff\quad & \lambda^2 a^2 + 2\lambda(1-\lambda)ab + (1-\lambda)^2 b^2 \leq \lambda a^2 + (1-\lambda)b^2 \\
\iff\quad & 0 \leq \lambda(1-\lambda)a^2 - 2\lambda(1-\lambda)ab + ((1-\lambda) - (1-\lambda)^2)b^2 \\
\iff\quad & 0 \leq \lambda(1-\lambda)a^2 - 2\lambda(1-\lambda)ab + \lambda(1-\lambda)b^2 \\
\iff\quad & 0 \leq \lambda(1-\lambda)(a^2 - 2ab + b^2) \\
\iff\quad & 0 \leq \lambda(1-\lambda)(a-b)^2.
\end{aligned}$$

che è verificata per ogni $\lambda \in [0,1]$.

La funzione non è limitata in quanto essa è limitata inferiormente, poichè $f(x) \geq 0$, ma non limitata superiormente. Il punto $x = 0$ è punto di minimo assoluto.

Esempio 21 La funzione reale di variabile reale associata alla regola $x \mapsto |x|$ è una funzione strettamente decrescente per $x < 0$ e strettamente crescente per $x > 0$. Inoltre è convessa. Infatti

$$\begin{aligned} |\lambda a + (1-\lambda)b| &\leq |\lambda a| + |(1-\lambda)b| \\ &\leq \lambda|a| + (1-\lambda)|b| \end{aligned}$$

per ogni $\lambda \in [0, 1]$.
La funzione non è limitata in quanto essa è limitata inferiormente, poichè $f(x) \geq 0$, ma non limitata superiormente. Il punto $x = 0$ è punto di minimo assoluto.

3 Funzioni lineari e non lineari

In questo paragrafo vengono presentati alcuni esempi particolarmente importanti di funzioni, funzioni che saranno poi riprese nel successivo paragrafo quando si analizzeranno degli esempi di modelli matematici.

Una funzione affine è una funzione con regola di assegnazione

$$x \mapsto ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Nel caso particolare in cui $a = 0$, la funzione è detta funzione costante. Nel caso in cui $b = 0$, la funzione è detta funzione lineare.

Spesso, anche se impropriamente, si usa il termine lineare anche per le funzioni affini.
Ogni funzione affine ha una rappresentazione grafica nel piano cartesiano data da una retta con coefficiente angolare a e intercetta b. Il dominio della funzione è $D = \mathbb{R}$ e l'insieme immagine è $f(D) = \mathbb{R}$ se $a \neq 0$, altrimenti $f(D) = \{b\}$. La funzione è limitata solo nel caso in cui $a = 0$.
Si nota che la funzione $f(x) = ax + b$ è strettamente crescente se $a > 0$ e strettamente decrescente se $a < 0$. Se $a \neq 0$ allora $ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$, che significa che $x \mapsto ax + b$ si annulla in corrispondenza di un unico valore ($x = -\frac{b}{a}$), il quale corrisponde all'intersezione della funzione con l'asse delle ascisse. Questo comportamento viene riassunto nelle tabelle che seguono.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x) = ax + b$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

$x \mapsto ax + b$, con $a > 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x) = ax + b$		$\searrow$	0	$\searrow$	

$x \mapsto ax + b$, con $a < 0$.

La funzione $f(x) = ax + b$ è una funzione iniettiva per $a \neq 0$, è concava e convessa e non ammette punti di massimo e di minimo.

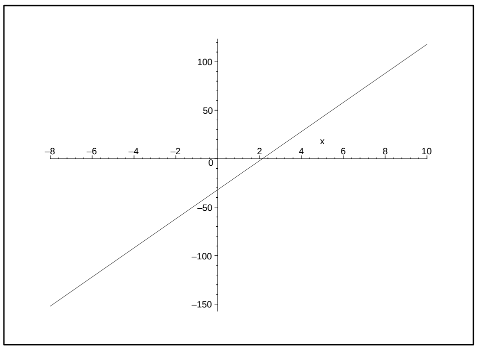

Figura 6:
Funzione affine ($a = 15, b = -32$)

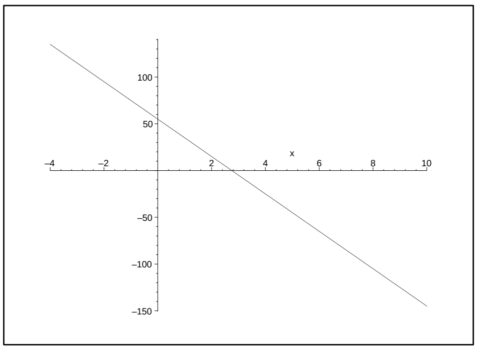

Figura 7:
Funzione affine ($a = -20, b = 55$)

Una funzione quadratica è una funzione con regola di assegnazione

$$x \mapsto ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

Ogni funzione quadratica ha una rappresentazione grafica nel piano cartesiano data da una

parabola. Il dominio della funzione è $D = \mathbb{R}$.
Se $a > 0$ la funzione ha un punto di minimo in $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, ed è convessa. Se $a < 0$ la funzione ha un punto di massimo in $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ ed è concava.
La funzione non è monotona e non è iniettiva. L'insieme immagine è $f(D) = [f(-b/2a), +\infty[$ se $a > 0$ e $f(D) =]-\infty, f(-b/2a)]$ se $a < 0$. La funzione è limitata inferiormente se $a > 0$ e limitata superiormente se $a < 0$.
Le tabelle che seguono riassumono le informazioni precedenti.

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$\searrow$	Minimo	$\nearrow$

$x \mapsto ax^2 + bx + c$, con $a > 0$.

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$\nearrow$	Massimo	$\searrow$

$x \mapsto ax^2 + bx + c$, con $a < 0$.

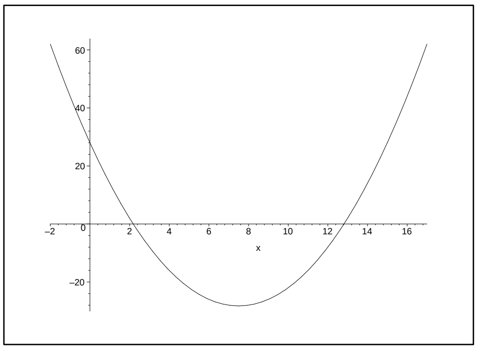

Figura 8:
Funzione quadratica
$(a = 1, b = -15, c = 28)$

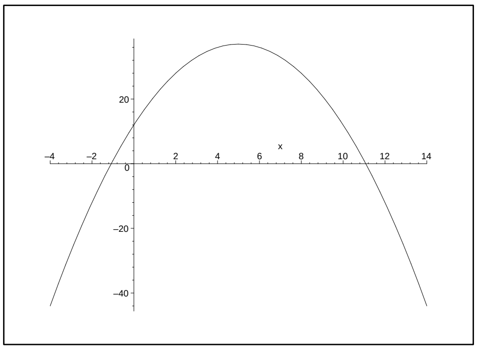

Figura 9:
Funzione quadratica
$(a = -1, b = 10, c = 12)$

Una funzione esponenziale di base a è una funzione con regola di assegnazione

$$x \mapsto a^x, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

Il dominio della funzione esponenziale è $D = \mathbb{R}$ e l'insieme immagine è $f(D) = \mathbb{R}_*^+$. La funzione è limitata inferiormente, non ammette massimi e minimi, è strettamente monotona. In particolare, la funzione è strettamente crescente se $a > 1$ e strettamente decrescente se $0 < a < 1$.
Le tabelle che seguono riassumono le informazioni precedenti.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = a^x$	0 $\nearrow$	

$x \mapsto a^x$, con $a > 1$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = a^x$	$\searrow$ 0	

$x \mapsto a^x$, con $0 < a < 1$.

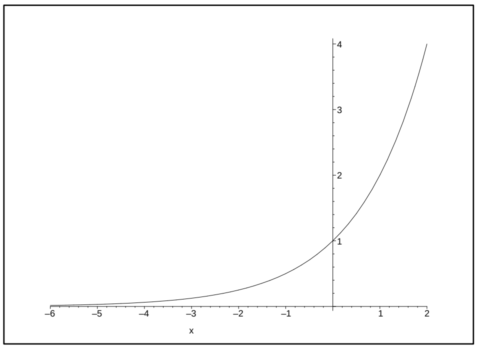

Figura 10:
Funzione esponenziale ($a > 1$)

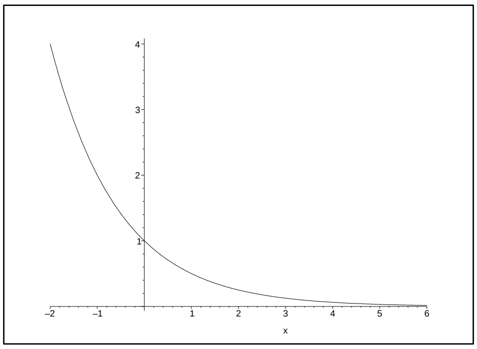

Figura 11:
Funzione esponenziale ($0 < a < 1$)

La funzione esponenziale è strettamente monotona quindi iniettiva. Esiste allora la funzione inversa che è la funzione logaritmica di base a secondo la seguente definizione.

Una funzione logaritmica di base a è una funzione con regola di assegnazione

$$x \mapsto \log_a(x), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

Il dominio della funzione logaritmica è l'insieme immagine della funzione esponenziale, cioè $D = \mathbb{R}_*^+$; l'insieme immagine è il dominio della funzione esponenziale $f(D) = \mathbb{R}$. La funzione non ammette massimi e minimi, è strettamente monotona. In particolare, la funzione è strettamente crescente se $a > 1$ e strettamente decrescente se $0 < a < 1$. Non è limitata.
Le tabelle che seguono riassumono le informazioni precedenti.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x) = \log_a(x)$	$\nearrow$ $\quad$ $\nearrow$

$x \mapsto \log_a(x)$, con $a > 1$.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x) = \log_a(x)$	$\searrow$ $\quad$ $\searrow$

$x \mapsto \log_a(x)$, con $0 < a < 1$.

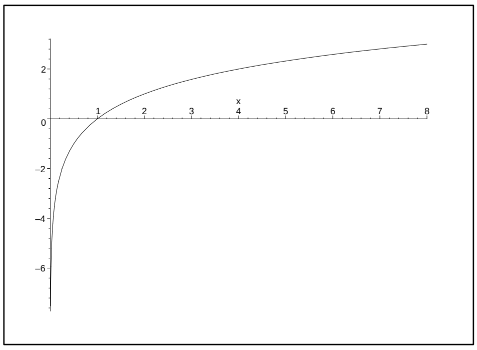

Figura 12:
Funzione logaritmica ($a > 1$)

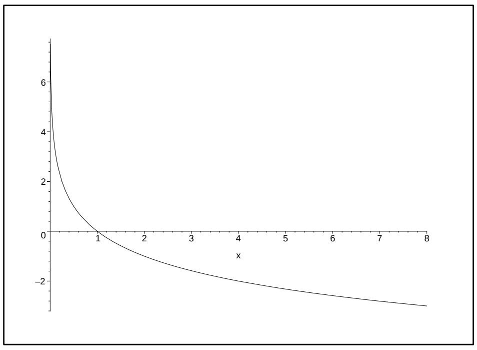

Figura 13:
Funzione logaritmica ($0 < a < 1$)

4 Alcuni esempi di modelli lineari e non lineari

Si presentano in questo paragrafo alcuni esempi in cui le funzioni descritte precedentemente possono essere utilizzate nella costruzione di semplici modelli di diversa natura, economica, aziendale, sociale.

Modelli lineari

Consideriamo un modello lineare di produzione. Un'impresa produce un bene sostenendo dei costi fissi di produzione (ad esempio collegati agli impianti) e dei costi che dipendono dalla quantità del bene prodotto. Dalla vendita del bene l'impresa ottiene un ricavo e dalla differenza fra ricavi e costi si può ottenere il profitto d'impresa.
Nell'ipotesi più semplice si può supporre che sia i costi variabili che il ricavo siano direttamente proporzionali alla quantità del bene prodotta. In questo caso la funzione che rappresenta il costo totale è una funzione affine della quantità , mentre la funzione ricavo è una funzione lineare.
Indicando con q la quantità prodotta del bene, con c_f il costo fisso d'impresa, con c e p, rispettivamente, il costo unitario di produzione e il prezzo unitario di vendita, si possono determinare la funzione di costo totale $C(q)$, di ricavo totale $R(q)$ e di profitto $\Pi(q)$ nel modo seguente:

$$C(q) = c_f + cq, \quad R(q) = pq$$

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = pq - c_f - cq = (p - c)q - c_f$$

Quello presentato è solamente uno dei possibili esempi in cui si possono impiegare funzioni lineari e affini per modellizzare situazioni concrete. Si pensi ad esempio alle imposte come funzione del reddito, allo spazio percorso e alla velocità come funzioni del tempo. Se da un lato i modelli lineari sono semplici nella loro costruzione e interpretazione, d'altro lato la loro applicabilià risulta giustificata solo in ipotesi restrittive, come ad esempio in riferimento a limitati intervalli temporali.

Modelli non lineari

Risulta importante notare che nei modelli lineari la crescita o la decrescita avvengono ad un tasso costante e questa ipotesi spesso non risulta realistica. Alcuni comportamenti non lineari possono essere adeguatamente rappresentati da modelli quadratici o da modelli esponenziali.
Si riprenda l'esempio precedentemente considerato di un'impresa che produce un bene sostenendo dei costi di produzione e costi fissi d'impresa. In molti casi è realistico supporre che il profitto d'impresa inizialmente cresca all'aumentare della produzione e raggiunto un certo

livello decresca. Una funzione quadratica può adeguatamente descrivere un comportamento di questo tipo. Detta q la quantità prodotta del bene, si può assumere che la funzione profitto sia la seguente

$$\Pi(q) = aq^2 + bq + c \qquad a < 0, b > 0, c < 0.$$

I modelli quadratici possono rappresentare adeguatamente fenomeni in cui ad una fase di crescita segue una di decrescita, o viceversa. Quando invece si voglia rappresentare matematicamente un fenomeno in cui si verifichi una crescita (o decrescita) nell'intervallo considerato, è opportuno considerare modelli esponenziali o logaritmici. Si pensi ad esempio al fenomeno della crescita di una popolazione, al decadimento di una sostanza radioattiva, al valore di un investimento a capitalizzazione composta.
Ad esempio, nei casi in cui si vogliano modellizzare fenomeni di crescita rispetto al tempo in cui vi sia un raddoppio in ogni intervallo unitario, viene utilizzata la seguente funzione:

$$f(t) = k2^t$$

dove la costante k rappresenta il valore iniziale.
Si può notare che nei casi in cui, invece, si vogliano modellizzare fenomeni di decrescita rispetto al tempo, è opportuno considerare funzioni esponenziali, con base a minore di 1, del tipo

$$f(t) = ka^t.$$